参考答案及解析

2023—2024 学年度上学期高三年级一调考试 · 数学

一、选择题

1. C 【解析】由 $-3<2x-1\leqslant 3$,可得 $-1<x\leqslant 2$,又 $x\in\mathbf{Z}$,所以集合 $\{x\mid -3<2x-1\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,2\}$.

2. A 【解析】$m(3+\mathrm{i})-(2-\mathrm{i})=3m-2+(m+1)\mathrm{i}$,因为 $\frac{2}{3}<m<1$,所以 $3m-2>0$,$m+1>0$,所以复数 $m(3+\mathrm{i})-(2-\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点 $(3m-2,m+1)$ 位于第一象限.

3. C 【解析】因为 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,所以内角 A 的角平分线与 BC 垂直,所以 $AB=AC$,因为 $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$,则 $\triangle ABC$ 是底边和腰不相等的等腰三角形.

4. A 【解析】由 $\mathrm{e}^{a-b}>2$,可得 $\mathrm{e}^{a-b}>1$,$a-b>0$,$a>b$,故 $\mathrm{e}^{a-b}>2$ 是 $a>b$ 的一个充分条件,故 A 正确;由 $\ln\frac{a}{b}>0$,可得 $\frac{a}{b}>1$,不妨取 $a=-2$,$b=-1$,推不出 $a>b$,故 B 错误;$a^a>b^b$,不妨取 $a=-2$,$b=-1$,满足 $a^a=\frac{1}{4}>b^b=-1$,推不出 $a>b$,故 C 错误;$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,不妨取 $a=-2$,$b=1$,满足 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,推不出 $a>b$,故 D 错误.

5. B 【解析】因为在平行四边形 $ABCD$ 中,M 为 BC 中点,AC 与 MD 相交于点 P,所以 $\frac{AD}{CM}=\frac{AP}{PC}=2$,所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. 又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,所以 $x=y=\frac{2}{3}$,$x+y=\frac{4}{3}$.

6. A 【解析】因为 $\sin(2\,019\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. 又因为 α 为第三象限角,所以 $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$,所以 $\sin 2\alpha+\cos^2\alpha+1=2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+1=2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{4\sqrt{5}+13}{9}$.

7. D 【解析】当 $x+1\geqslant 0$,即 $x\geqslant -1$ 时,$f(x)=x^2+x+1$,所以 $f(x)\geqslant(m+2)x-1$,即 $x^2+x+1\geqslant(m+2)x-1$,即 $x^2-(m+1)x+2\geqslant 0$,令 $g(x)=x^2-(m+1)x+2$,对称轴为直线 $x=\frac{m+1}{2}$,当 $\frac{m+1}{2}\leqslant -1$,即 $m\leqslant -3$ 时,$g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(-1)=m+4$,所以只要 $m+4\geqslant 0$ 即可,解得 $m\geqslant -4$,所以 $-4\leqslant m\leqslant -3$. 当 $\frac{m+1}{2}>-1$,即 $m>-3$ 时,$g(x)_{\min}=g\left(\frac{m+1}{2}\right)=\frac{(m+1)^2}{4}-\frac{(m+1)^2}{2}+2=-\frac{(m+1)^2}{4}+2$,所以只要 $-\frac{(m+1)^2}{4}+2\geqslant 0$ 即可,解得 $-1-2\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}-1$,所以 $-3<m\leqslant 2\sqrt{2}-1$. 所以当 $x\geqslant -1$ 时,$-4\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}-1$. 当 $x<-1$ 时,$f(x)=x^2-x-1$,所以 $x^2-x-1\geqslant(m+2)x-1$,解得 $x\leqslant m+3$,所以只要 $m+3\geqslant -1$ 即可,解得 $m\geqslant -4$. 综上,$-4\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}-1$.

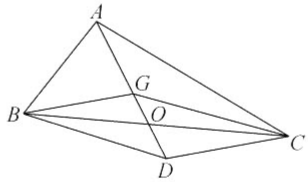
8. D 【解析】因为 $f(x)=\left(4\cos^2\frac{x}{2}-2\right)\sin x+\cos 2x+2=2\cos x\sin x+\cos 2x+2=\sin 2x+\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$,由 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$. 当 $k=1$ 时,$x=\frac{3\pi}{8}$,故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8},2\right)$ 对称,由等差中项的性质可得 $a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$,所以数列 $\{y_n\}$ 的前 9 项和为 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_9)=4\times 4+f(a_5)=18$.

二、选择题

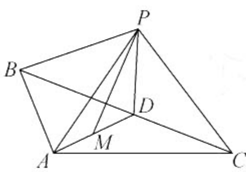
9. ACD 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z\cdot\bar{z}=(a+b\mathrm{i})\cdot(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2=|z|^2$,故 A 正确;令 $z=\mathrm{i}$,满足 $|z|=|\mathrm{i}|=1$,故 B 错误;设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$,则 $z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}$,所以 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{d^2+c^2}=|z_1||z_2|$,故 C 正确;设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $|z-1|=|a-1+b\mathrm{i}|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1$,即 $(a-1)^2+b^2=1$,表示以 $(1,0)$ 为圆心,1 为半径的圆,$|z+1|=\sqrt{(a+1)^2+b^2}$ 表示圆上的点到点 $(-1,0)$ 的距离,故 $|z+1|$ 的最小值为 1,故 D 正确.

10. ACD 【解析】对于 A,当点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心时,如图所示,设 BC 中点为 O,连接 GO 并延长至点 D,

使得 $GO=OD$,连接 BD,CD,



易得四边形 $BDCG$ 为平行四边形,根据重心性质可得 $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GO}$,则 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GO}=\mathbf{0}$,所以 A 正确;对于 B,因为 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影为 $|\overrightarrow{AC}|\cos 120^\circ=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$,所以 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影向量为 $\overrightarrow{BA}$,所以 B 错误;对于 C,因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,所以 $\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以 $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{AG}=\frac{1}{9}(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{9}\cdot(2\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{9}\left[8+2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-16\right]=-\frac{4}{3}$,所以 $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GA}=\frac{4}{3}$,所以 C 正确;对于 D,如图,



取 BC 的中点为 D,连接 AD,PD,PA,取 AD 中点 M,连接 PM,则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PM}$,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{4}\times(4-8+16)=3$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2\times\frac{1}{4}\left[(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD})^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PD})^2\right]=2\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}^2=2\overrightarrow{PM}^2-\frac{3}{2}$,显然当 P,M 重合时,$\overrightarrow{PM}^2=0$,$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$,所以 D 正确.

11. AD **【解析】** 因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减,$f(x)$ 关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称,所以当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,$f(x)$ 取得最小值,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi\right)=-2$,所以 $\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　①,且 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$,可得 $T\geqslant\frac{5\pi}{6}$,所以 $0<\omega\leqslant\frac{12}{5}$,因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$,所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 在同一个单调递减区间,所以 $\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　②,①②两式相减可得 $\frac{5\pi}{12}\omega=\frac{5\pi}{6}$,所以 $\omega=2$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,因为 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A,由 $-\frac{7\pi}{12}\times2+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,可得 $k=-1$,所以点 $\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心,故选项 A 正确;对于 B,$\omega=2$,故选项 B 不正确;对于 C,令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ 上单调递增,在区间 $\left(-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减,故选项 C 不正确;对于 D,$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$,故选项 D 正确.

12. ABD **【解析】** 对于 A,因为 $a+b=a+\frac{e^2}{a}$ 在 $1<a<e$ 时单调递减,在 $e\leqslant a<e^2$ 时单调递增,所以 $2e\leqslant a+b<e^2+1$,选项 A 正确;对于 B,因为 $ab=e^2$,所以 $\ln a+\ln b=2$,所以 $0<\ln a\cdot\ln b\leqslant\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}\right)^2=1$,当且仅当 $a=b=e$ 时,等号成立,选项 B 正确;对于 C,$\ln a+\log_a b=\ln a+\frac{\ln b}{\ln a}=\ln a+\frac{2-\ln a}{\ln a}=\ln a+\frac{2}{\ln a}-1$,设 $t=\ln a\in(0,2)$,所以 $\varphi(t)=t+\frac{2}{t}-1$ 在 $0<t<\sqrt{2}$ 时单调递减,在 $\sqrt{2}\leqslant t<2$ 时单调递增,所以 $\varphi(t)=t+\frac{2}{t}-1\in[2\sqrt{2}-1,+\infty)$,选项 C 错误;对于 D,设 $\lambda=a^{\ln b}$,所以 $\ln\lambda=\ln a^{\ln b}=\ln b\ \ln a\leqslant1$,所以 $\lambda\leqslant e$,当且仅当 $a=b=e$ 时等号成立,选项 D 正确.

三、填空题

13. 1 **【解析】** 因为 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,所以 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{b}^2=0$,即 $6+4-\lambda\times10=0$,解得 $\lambda=1$.

14. $3\sqrt{2}$ **【解析】** 由柯西不等式得 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\geqslant(x+2y+2z)^2$,则 $(x+2y+2z)^2\leqslant2\times9=$

18，所以 $x+2y+2z\leqslant 3\sqrt{2}$，当且仅当 $y=z=2x$ 时，等号成立，所以 $x+2y+2z$ 的最大值为 $3\sqrt{2}$.

15. $(0,1)$【解析】由题意可知关于 x 的方程 $ax^2-2|x|+a=0$ 有 4 个不同的实数解，可分为以下几种情况：①当 $a=0$ 时，方程 $ax^2-2|x|+a=0$，即 $-2|x|=0$，解得 $x=0$，不满足题意，舍去；②当 $a\neq0$ 时，且 $x\geqslant0$ 时，方程 $ax^2-2|x|+a=0$，即 $ax^2-2x+a=0$，此方程有两个正根，即 $\begin{cases}\Delta=4-4a^2>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{2}{a}>0,\\ x_1x_2=1>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<1$；③当 $a\neq0$ 时，且 $x<0$ 时，方程 $ax^2-2|x|+a=0$，即 $ax^2+2x+a=0$，此方程有两个负根，即 $\begin{cases}\Delta=4-4a^2>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}<0,\\ x_1x_2=1>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<1$. 由①②③可知，实数 a 的取值范围是 $\{a|0<a<1\}$.

16. ②③④【解析】因为 $2a_nS_n=1+a_n^2$，当 $n=1$ 时，$2a_1S_1=1+a_1^2$，解得 $S_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，所以 $2(S_n-S_{n-1})S_n=1+(S_n-S_{n-1})^2$，整理得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，所以数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 $S_1^2=1$，公差为 1 的等差数列，故②正确. $S_n^2=1+(n-1)\times1=n$，又正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，所以 $S_n=\sqrt{n}$，当 $n=1$ 时，$S_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，即 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，又当 $n=1$ 时，满足 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，所以 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，又 $a_{n+1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，因为 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，即 $a_{n+1}<a_n$，故①不正确；令 $f(x)=e^x-x-1(x\geqslant0)$，$f'(x)=e^x-1$，当 $x\geqslant0$ 时，$e^x-1\geqslant0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $e^x-x-1\geqslant0(x\geqslant0)$，所以 $e^x\geqslant x+1$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，令 $x=\sqrt{n}-1(n\geqslant1,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $e^{\sqrt{n}-1}\geqslant\sqrt{n}$，又 $S_n=\sqrt{n}$，故 $S_n\leqslant e^{\sqrt{n}-1}$，故③正确；对于④，因为 $S_n=\sqrt{n}$，所以 $S_{n+2}=\sqrt{n+2}$，所以 $b_n=\log_2\dfrac{S_{n+2}}{S_n}=\log_2\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}=\log_2\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{1}{2}[\log_2(n+2)-\log_2 n]$，所以 $T_n=b_1+b_2+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=\dfrac{1}{2}[\log_2 3-\log_2 1+\log_2 4-\log_2 2+\log_2 5-\log_2 3+\cdots+\log_2(n+1)-\log_2(n-1)+\log_2(n+2)-\log_2 n]=\dfrac{1}{2}[-1+\log_2(n+1)+\log_2(n+2)]=\dfrac{1}{2}[-1+\log_2(n+1)(n+2)]$. 因为 $T_n\geqslant3$，即 $\dfrac{1}{2}[-1+\log_2(n+1)(n+2)]\geqslant3$，化简整理得 $n^2+3n-126\geqslant0$，当 $n=9$ 时，$9^2+3\times9-126=-18<0$；当 $n=10$ 时，$10^2+3\times10-126=4>0$，所以满足 $T_n\geqslant3$ 的 n 的最小正整数为 10，故④正确.

四、解答题

17. **解**：(1)因为 $a_1+a_3+a_5=15,S_7=49$，

所以 $\begin{cases}3a_1+6d=15,\\ 7a_1+21d=49,\end{cases}$ 所以 $a=1,d=2$，　　(2 分)

所以 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$.　　(4 分)

(2)由题意可知 $b_n=(2n-1)\times3^n$，

所以 $T_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-1)\times3^n$　①，

$3T_n=1\times3^2+3\times3^3+5\times3^4+\cdots+(2n-1)\times3^{n+1}$　②，　　(6 分)

①－②得，

$-2T_n=1\times3+2\times3^2+2\times3^3+2\times3^4+\cdots+2\times3^n-(2n-1)\times3^{n+1}$

$=3+\dfrac{2\times3^2-2\times3^{n+1}}{1-3}-(2n-1)\times3^{n+1}$　　(8 分)

$=(-2n+2)\times3^{n+1}-6$，

故 $T_n=(n-1)\times3^{n+1}+3$.　　(10 分)

18. **解**：(1)因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{ED}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=-\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{AD}|^2$，　　(2 分)

又 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3},AB=3,AC=2$，

故由余弦定理可得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC=7$，

则 $BC=\sqrt{7}$，

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $AD=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$，　　(5 分)

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}=-\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{AD}|^2=-\dfrac{2}{9}\times\dfrac{9\times21}{7\times7}=-\dfrac{6}{7}$.　　(6 分)

(2)以 O 为原点，OA 为 x 轴，OB 反方向为 y 轴，建立

平面直角坐标系，如图所示，则 $D\left(\frac{1}{2},0\right)$，$E\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，

设 $C(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$，

则 $\overrightarrow{CE}=\left(-\cos\theta,-\frac{1}{2}-\sin\theta\right)$，

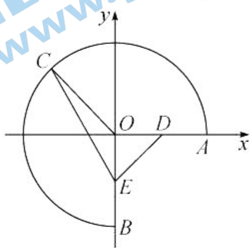
$\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$，（8 分）

因为 $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{4}$，

所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$，（10 分）

所以 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DE}\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\right]$．（12 分）



19. **解**：由已知条件和三角函数的定义，

可知 $A(\cos\varphi,\sin\varphi)$，$P(\sqrt{3}\cos\pi t,\sqrt{3}\sin\pi t)$，

所以 $f(t)=|AP|^2=(\cos\varphi-\sqrt{3}\cos\pi t)^2+(\sin\varphi-\sqrt{3}\sin\pi t)^2=4-2\sqrt{3}\cos(\pi t-\varphi)$．

(1)若 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(t)=4-2\sqrt{3}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$，（2 分）

令 $2k\pi\leqslant\pi t-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $2k+\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant 2k+\frac{4}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $t\in(0,2)$，

所以函数 $f(t)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$．（6 分）

(2)若 $f\left(\frac{1}{3}\right)=4-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=2$，

可得 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{5\pi}{6}$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}-\varphi<0$，

故 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，（8 分）

所以 $f\left(\frac{5}{6}\right)=4-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)$

$=4-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$

$=4+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$

$=4+2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$=4-2\sqrt{2}$．

故 $f\left(\frac{5}{6}\right)=4-2\sqrt{2}$．（12 分）

20. **解**：(1)设 A 站对 P 城市的净化效果为 y_1，比例系数为 k_1，则 $y_1=\frac{k_1a}{x}$．

当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$y_1=\frac{2a}{3}$，

即 $\frac{2a}{3}=\frac{k_1a}{\frac{3}{4}}$，所以 $k_1=\frac{1}{2}$．

设 B 站对 P 城市的净化效果为 y_2，比例系数为 k_2，

则 $y_2=k_2\cdot\frac{1-a}{1-x}$，

由 $x=\frac{3}{4}$，$y_2=1-a$，

得 $1-a=k_2\cdot\frac{1-a}{1-\frac{3}{4}}$，所以 $k_2=\frac{1}{4}$．

所以 A，B 两站对该城市的总净化效果 $y=y_1+y_2=\frac{a}{2x}+\frac{1-a}{4(1-x)}$，$x\in(0,1)$．（5 分）

(2)由题意得 $y\geqslant\frac{2}{3}$ 对 $\forall x\in(0,1)$ 恒成立，

所以只要当 $x\in(0,1)$ 时，$y_{\min}\geqslant\frac{2}{3}$ 即可．（6 分）

又 $\frac{a}{2x}+\frac{1-a}{4(1-x)}=\frac{1}{4}\left(\frac{2a}{x}+\frac{1-a}{1-x}\right)[x+(1-x)]$

$=\frac{1}{4}\left[a+1+\frac{2a(1-x)}{x}+\frac{(1-a)x}{1-x}\right]$

$\geqslant\frac{1}{4}\left(a+1+2\sqrt{\frac{2a(1-x)}{x}\cdot\frac{(1-a)x}{1-x}}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(a+1+2\sqrt{2a(1-a)}\right)$，

当且仅当 $\frac{2a(1-x)}{x}=\frac{(1-a)x}{1-x}$，

即 $\frac{1}{x}=1+\sqrt{\frac{1-a}{2a}}$ 时等号成立，（8 分）

则 $y_{\min}=\frac{1}{4}\left(a+1+2\sqrt{2a(1-a)}\right)$，

令 $\frac{1}{4}\left(a+1+2\sqrt{2a(1-a)}\right)\geqslant\frac{2}{3}$，

即 $6\sqrt{2a(1-a)}\geqslant 5-3a$，$a\in(0,1)$，

则 $81a^2-102a+25\leqslant 0$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{25}{27}$．

综上，无论 A，B 两站建在何处，若要求 A，B 两站对

P 城市的总净化效果至少达到$\frac{2}{3}$,a 的取值范围为$\left[\frac{1}{3},\frac{25}{27}\right]$.　(12 分)

21. **解**:(1)选择①:$b\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sqrt{3}c\cos B$,

即 $b\sin C=\sqrt{3}c\cos B$,

由正弦定理得 $\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos B$,

在△ABC 中,$C\in(0,\pi)$,

所以 $\sin C\neq 0$,所以 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$,

又 $B\in(0,\pi)$,且 $\sin B\neq 0$,$\cos B\neq 0$,

所以 $\tan B=\sqrt{3}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.　(4 分)

选择②:$2S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

即 $2\times\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}ca\cos B$,

即 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$,

在△ABC 中,

$B\in(0,\pi)$,且 $\sin B\neq 0$,$\cos B\neq 0$,

所以 $\tan B=\sqrt{3}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.　(4 分)

选择③:$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan C$,

即 $\tan A+\tan C=\sqrt{3}(\tan A\tan C-1)$

所以 $\tan B=-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\sqrt{3}$.

在△ABC 中,因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.　(4 分)

(2)因为 $AB\perp AD$,$BC\perp CD$,

所以 A,B,C,D 四点共圆,BD 为直径,因为 $BD=2$,

所以△ACD 的外接圆直径为 2,

由(1)知$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,所以$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$,

在△ACD 中,由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=BD$,

所以 $AC=BD\sin\angle ADC=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$,　(6 分)

设$\angle ABD=\alpha$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

在 Rt△ABD 中,$AD=BD\sin\alpha=2\sin\alpha$,

在 Rt△BCD 中,$CD=BD\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$,

所以 $C_{\triangle ACD}=AD+CD+AC=2\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sqrt{3}=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.　(10 分)

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

所以△ACD 的周长的取值范围为$(2\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.　(12 分)

22. (1)**解**:因为$\frac{a_{n+1}+a_n+2}{a_na_{n+1}+a_{n+1}}=-2$,

所以 $a_na_{n+1}=-\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n-1$,

则 $\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}+a_n+a_{n+1}+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}}=2$,

所以 $b_{n+1}-b_n=2$,　(3 分)

又 $a_1=0$,所以 $b_1=\frac{1}{a_1+1}=1$,

故数列$\{b_n\}$是首项为 1,公差为 2 的等差数列,

所以 $b_n=1+2(n-1)=2n-1$,

$a_n=\frac{1}{b_n}-1=\frac{1}{2n-1}-1=\frac{2-2n}{2n-1}$.　(6 分)

(2)**证明**:由(1)可得 $S_n=n^2$,所以$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2}$.

当 $n=1$ 时,$\frac{1}{S_1}=1<\frac{7}{4}$.　(8 分)

当 $n\geq 2$ 时,$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}$

$<1+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=1+\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{7}{4}$.　(12 分)