2024 北京北师大附中高二（上）期末

数　学

班级：________ 姓名：________ 学号：________

考生须知	
	1．本试卷有三道大题，共 6 页．考试时长 120 分钟，满分 150 分．
	2．考生务必将答案填写在答题卡上，在试卷上作答无效．
	3．考试结束后，考生应将答题卡交回．

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2$，且$a_1=2$，那么$a_3=$（　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

2. 双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的离心率为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

3. 圆心在直线$x-y=0$上且与y轴相切于点$(0,1)$的圆的方程是（　）

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　B. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

4. 下列说法正确的是（　）

A. 平行于同一直线的两个平面平行　　B. 平行于同一平面的两条直线平行

C. 垂直于同一平面的两个平面平行　　D. 垂直于同一直线的两个平面平行

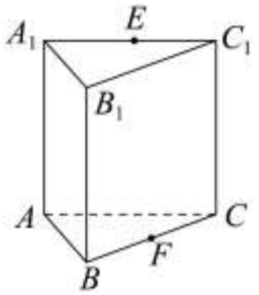
5. 已知抛物线$C:y^2=12x$的焦点为F，点M在C上．若M到直线$x=-2$的距离为 5，则$|MF|=$（　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

6. 光圈是一个用来控制光线透过镜头，进入机身内感光面的光量的装置.表达光圈的大小我们可以用光圈的F值表示，光圈的F值系列如下：$F1$，$F1.4$，$F2$，$F2.8$，$F4$，$F5.6$，$F8$，…，$F64$.光圈的F值越小，表示在同一单位时间内进光量越多，而且上一级的进光量是下一级的 2 倍，如光圈从$F8$调整到$F5.6$，进光量是原来的 2 倍.若光圈从$F4$调整到$F1.4$，则单位时间内的进光量为原来的（　）

A. 2 倍　　B. 4 倍　　C. 8 倍　　D. 16 倍

7. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 E，F 分别是棱 A_1C_1，BC 的中点，则下列结论中不正确的是（　）



A. CC_1 // 平面 A_1ABB_1　　B. AF // 平面 $A_1B_1C_1$

C. EF // 平面 A_1ABB_1　　D. AE // 平面 B_1BCC_1

8. 已知直线 $l: x=my-2$，P 为圆 $C: x^2+y^2-4x=0$ 上一动点，则点 P 到直线 l 的距离的最大值为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

9. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和.则“$a_4>a_3$”是“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq 3$，$S_n>S_3$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列，且 $a_1=3$，$a_7=8$，对 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，$a_{k+1}=a_k+1$ 与 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k+2}$ 有且仅有一个成立，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7$ 的最小值为（　）

A. 18　　B. 20　　C. 21　　D. 23

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{4}=1$，则双曲线 C 的右焦点到其渐近线的距离是________.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为其前 n 项和，若 $S_2=3a_1$，$a_2^2=a_3$，则 $q=$________；$S_5=$________.

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，若点 P 在椭圆上，且 $\angle F_1PF_2=90°$，则点 P 到 x 轴的距离为________.

14. 设 O 为原点，双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的右支上．则 C 的渐近线方程是________；$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的最大值是________.

15. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上．给出下列四个结论：

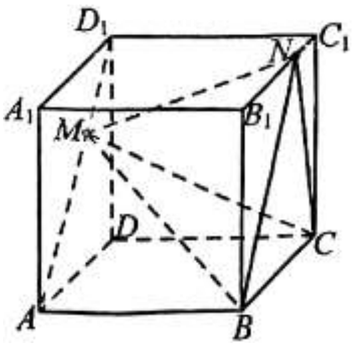
① MN 的最小值为 2；

②三棱锥 $N-MBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$；

③有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直；

④存在点 M，N，使 $\triangle MBN$ 为等腰三角形.

其中所有正确结论的序号是________.



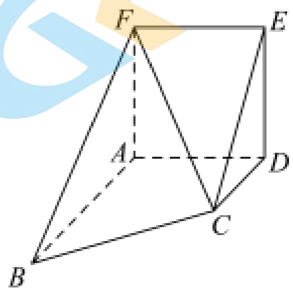
三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=-8$，$a_3+a_5=-20$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，记$c_n=b_n-a_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n．

17. 如图，四边形$ABCD$为梯形，$AB//CD$，四边形$ADEF$为矩形，$AB\perp$平面$ADEF$，$AF=AD=CD=1$，$AB=2$．



（1）求证：$BC\perp CF$；

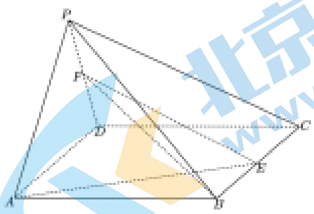
（2）求直线AB与平面BCF所成角的正弦值．

18. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆E的方程；

（2）设点$P(2,2)$，直线PA与椭圆E的另一个交点为C，O为坐标原点，判断直线OP与直线BC的位置关系，并说明理由．

19. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$AD=4$，$PA=PD=2\sqrt{2}$，E，F分别为BC，PD的中点．



（1）求证：$EF//$平面PAB；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $F-BE-A$ 的余弦值.

条件①：异面直线 PA 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$；

条件②：$PD=\frac{2}{3}EF$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点 $A(2,0)$，P 为椭圆 C 上的动点，且点 P 不在 x 轴上，O 是坐标原点，$\triangle AOP$ 面积的最大值为 1.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）过点 $H(-1,0)$ 的直线 PH 与椭圆 C 交于另一点 Q，直线 AP,AQ 分别与 y 轴相交于点 E，F. 当 $|EF|=2$ 时，求直线 PH 的方程.

21. 对于一个有穷正整数数列 Q，设其各项为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，各项和为 $S(Q)$，集合 $\{(i,j)|\ a_i>a_j,1\le i<j\le n\}$ 中元素的个数为 $T(Q)$.

（1）写出所有满足 $S(Q)=4,T(Q)=1$ 的数列 Q；

（2）对所有满足 $T(Q)=6$ 的数列 Q，求 $S(Q)$ 的最小值；

（3）对所有满足 $S(Q)=2023$ 的数列 Q，求 $T(Q)$ 的最大值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【分析】根据递推关系，逐一代入即可．

【详解】由题 $a_{n+1}=a_n+2$，$a_1=2$，所以 $a_2=a_1+2=2+2=4, a_3=a_2+2=4+2=6$．

故选：C．

2.【答案】C

【分析】求出 a、b、c 的值，可求得双曲线的离心率．

【详解】在椭圆 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，

因此，双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

故选：C．

3.【答案】A

【分析】

根据圆的标准方程得到圆心坐标，代入直线方程验证是否满足，再把 $(0,1)$ 点代入所给的选项验证是否满足，逐一排除可得答案．

【详解】A. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 圆心为 $(1,1)$，满足 $x-y=0$，即圆心在直线 $x-y=0$，

$(0,1)$ 代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，即 $(0-1)^2+(1-1)^2=1$ 成立，正确；

B. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 圆心 $(-1，-1)$，满足 $x-y=0$，即圆心在直线 $x-y=0$，

$(0,1)$ 代入 $(0+1)^2+(1+1)^2=5\neq 1$，错误；

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 圆心 $(1,1)$，满足 $x-y=0$，即圆心在直线 $x-y=0$，

$(0,1)$ 代入 $(0-1)^2+(1-1)^2=1\neq 2$，错误；

D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 圆心 $(-1，-1)$，满足 $x-y=0$，即圆心在直线 $x-y=0$，

$(0,1)$ 代入 $(0+1)^2+(1+1)^2=5\neq 1$，错误．

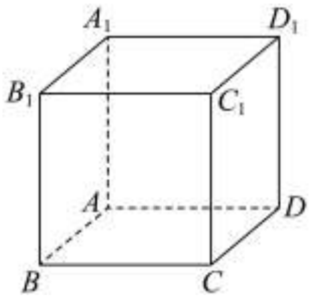
故选：A．

【点睛】本题考查圆的标准方程，圆与直线的位置关系，属于基础题．

4.【答案】D

【分析】通过找出的反例，判断 ABC 正误；利用直线垂直平面的性质判定 D 的正误，得到结果．

【详解】作正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，



$AB//$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$， $AB//$ 平面 C_1D_1DC，平面 $A_1B_1C_1D_1 \cap$ 平面 $C_1D_1DC = C_1D_1$，A 选项错误；

$AB//$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$， $BC//$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$， $AB \cap BC = B$，B 选项错误；

平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADD_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = AA_1$，C 选项错误；

根据线面垂直的性质定理可知垂直于同一直线的两条平面平行，D 选项正确.

故选：D

5.【答案】A

【分析】结合抛物线的定义计算即可得.

【详解】由抛物线 $C: y^2 = 12x$ 可知其焦点为 $F(3,0)$，其准线为 $x = -3$，

M 到 $x = -2$ 的距离为 5，则 M 到 $x = -3$ 的距离为 6，

故 $|MF| = 6$.

故选：A.

6.【答案】C

【分析】由题可得单位时间内的进光量形成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，即可求得.

【详解】由题可得单位时间内的进光量形成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$，

则 $F4$ 对应单位时间内的进光量为 a_5，$F1.4$ 对应单位时间内的进光量为 a_2，

从 $F4$ 调整到 $F1.4$，则单位时间内的进光量为原来的 $\frac{a_2}{a_5} = 8$ 倍.

故选：C.

7.【答案】D

【分析】利用线面平行的判定定理逐项判断即可.

【详解】解：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，可得 $CC_1 // AA_1$，$AA_1 \subset$ 平面 A_1ABB_1，$CC_1 \not\subset$ 平面 A_1ABB_1，

$\therefore CC_1 //$ 平面 A_1ABB_1，故 A 正确；

$AF \subset$ 平面 ABC，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，可得平面 $ABC //$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore AF //$ 平面 $A_1B_1C_1$，故 B 正确；

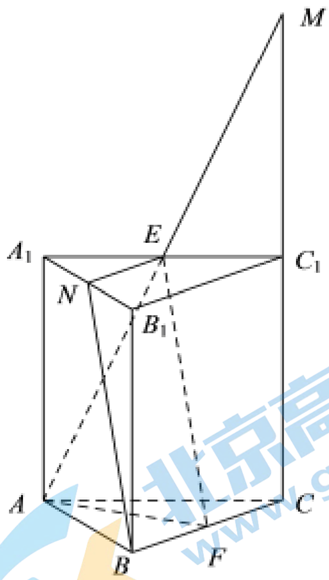
取 A_1B_1 中点 N，又 E 是 A_1C_1 中点，$\therefore NE // C_1B_1$，且 $NE = \frac{1}{2} C_1B_1$，

又 F 是棱 BC 的中点，所以 $BF = \frac{1}{2} C_1B_1$，$AF // C_1B_1$，$\therefore BF // NE$，$BF = NE$，

∴四边形 $BFEN$ 是平行四边形，∴$EF // BN$，$BN \subset$ 平面 A_1ABB_1，$EF \not\subset$ 平面 A_1ABB_1，∴$EF //$ 平面 A_1ABB_1，故 C 正确；

∵$EC_1 // AC$，但 $EC_1 \neq AC$，∴AE 与 CC_1 相交，从而有 AE 不平行于平面 B_1BCC_1，故 D 错误．

故选：D.



8. 【答案】D

【分析】由点到直线的距离公式可得圆心到直线的距离，即可得圆心到直线的距离的最大值，加上半径即为点 P 到直线 l 的距离的最大值.

【详解】由 $C: x^2+y^2-4x=0$，即 $C:(x-2)^2+y^2=4$，

即圆心为 $(2,0)$，半径为 2，

圆心 $(2,0)$ 到直线 $l: x-my+2=0$ 的距离 $d=\frac{|2+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$，

故圆心到直线 l 的距离的最大值为 $d_{\max}=\frac{4}{\sqrt{0^2+1}}=4$，

则点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $d_{\max}+r=4+2=6$.

故选：D.

9. 【答案】B

【分析】利用等差数列前 n 项和的函数性质判断"对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq 3$，$S_n>S_3$"与"$a_4>a_3$"推出关系，进而确定它们的关系.

【详解】由等差数列前 n 项和公式知：$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，

∴要使对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq 3$，$S_n>S_3$，则 $d>0$，即 $\{a_n\}$ 是递增等差数列，

∴"对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq 3$，$S_n>S_3$"必有"$a_4>a_3$"，

而 $a_4 > a_3$，可得 $d > 0$，但不能保证"对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \neq 3$，$S_n > S_3$"成立，

∴"$a_4 > a_3$"是"对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \neq 3$，$S_n > S_3$"的必要而不充分条件.

故选：B.

10.【答案】B

【分析】令 $b_k = a_{k+1} - a_k$，由题设易知 b_k 或 b_{k-1} 有一项为 1，则 $b_1 = b_3 = b_5 = 1$，判断 $\{a_n\}$ 各项取值情况，进而求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ 的最小值.

【详解】当 a_2 满足 $a_{k+1} = a_k + 1$ 时，$a_2 = a_1 + 1 = 4$，

令 $b_k = a_{k+1} - a_k$，则 b_k 或 b_{k-1} 有一项为 1，而 $b_1 = 1$，

∴ $b_1 = b_3 = b_5 = 1$，又 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列，

∴ $a_3 \geq 1$，$a_4 \geq 2$，$a_5 \geq 1$，$a_6 \geq 2$，

此时 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ 的最小值为 $3+4+1+2+1+2+8=21$，

当 a_2 满足 $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_{k+2}$ 时，$a_1 = 3$，$a_2 = 1$，$a_3 = 2$，$a_4 = 1$，$a_5 = 2$，$a_6 = 3$，$a_7 = 8$ 时，

$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 3+1+2+1+2+3+8 = 20$，

因为 $20 < 21$，

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ 的最小值为 20.

故选:B.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】2

【分析】根据双曲线的标准方程写出右焦点坐标和渐近线方程，再利用点到直线距离公式求解即可.

【详解】$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点坐标为 $F(\sqrt{5},0)$，渐近线方程为 $y = \pm 2x$.

$F(\sqrt{5},0)$ 到 $y = 2x$ 即 $2x - y = 0$ 的距离为 $d = \frac{|2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2$.

由对称性知 $F(\sqrt{5},0)$ 到 $y = -2x$ 的距离为 $d = 2$.

故答案为：2.

12.【答案】 ①. 2 ②. 31

【分析】由等比数列基本量计算即可得 a_n，由等比数列前 n 项和公式可计算出 S_5.

【详解】设 $a_n = a_1 q^{n-1}\left(a_1 \neq 0\right)$，则 $S_2 = a_1 + a_1 q = 3a_1$，即 $q = 2$，

$a_2^2 = a_3 = \left(2a_1\right)^2 = a_1 \times 2^2 = 4a_1$，即 $a_1 = 1$，

故 $S_5=\frac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=\frac{1\times\left(1-2^5\right)}{1-2}=31$.

故答案为：2；31.

13.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】设出 P 点坐标，由 $\angle F_1PF_2=90°$，可得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，结合 P 点在椭圆上计算即可得.

【详解】设 $P(m,n)$，由椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，

有 $\overrightarrow{PF_1}=\left(-\sqrt{3}-m,-n\right)$，$\overrightarrow{PF_2}=\left(\sqrt{3}-m,-n\right)$

由 $\angle F_1PF_2=90°$，

故 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left(-\sqrt{3}-m\right)\left(\sqrt{3}-m\right)+n^2=m^2+n^2-3=0$，

由 $P(m,n)$ 在椭圆上，故有 $\frac{m^2}{4}+n^2=1$，即 $m^2=4\left(1-n^2\right)$，

故 $m^2+n^2-3=m^2=4\left(1-n^2\right)+n^2-3=0$，解得 $n^2=\frac{1}{3}$，

故 $n=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，故点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14.【答案】 ①. $y=\pm\sqrt{3}x$ ②. 2

【分析】由双曲线方程可得 a、b，即可得渐近线；设出 P 点坐标，表示出向量后结合点 P 在双曲线的右支上即可得 $\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的最大值.

【详解】由 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 可得 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，故 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，$F(2,0)$，

则其渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{1}x=\pm\sqrt{3}x$；

设 $P(m,n)(m\geq1)$，则 $\overrightarrow{OP}=(m,n)$，$\overrightarrow{OF}=(2,0)$，

$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+n^2}}$，由点 P 在双曲线上，故 $m^2-\frac{n^2}{3}=1$，即 $n^2=3\left(m^2-1\right)$，

故 $\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+3\left(m^2-1\right)}}=\sqrt{\frac{4m^2}{4m^2-3}}$

$=\sqrt{1+\dfrac{3}{4m^2-3}}$，由 $m\geq 1$，故 $\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}=\sqrt{1+\dfrac{3}{4m^2-3}}\leq\sqrt{1+\dfrac{3}{4-3}}=2$.

故答案为：$y=\pm\sqrt{3}x$；2.

15.【答案】①②④

【分析】①由 MN 的最小值为 AD_1 和 B_1C_1 之间的距离判断；$|D_1C_1|=2$，②由等体积法 $V_{N-MBC}=V_{M-NBC}$ 判断；③由 M，N 分别与 D_1,C_1 重合和 M 是线段 AD_1 的中点，N 与 B_1 重合时判断；④由 $AM=B_1N$ 时判断.

【详解】①点 M，N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 移动时，MN 的最小值为 AD_1 和 B_1C_1 之间的距离 $|D_1C_1|=2$，故正确；

②三棱锥 $V_{N-MBC}=V_{M-NBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle NBC}|D_1C_1|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\dfrac{4}{3}$，故正确；

③当 M，N 分别与 D_1,C_1 重合时，由正方体的性质知：$AD_1\perp D_1C_1$；

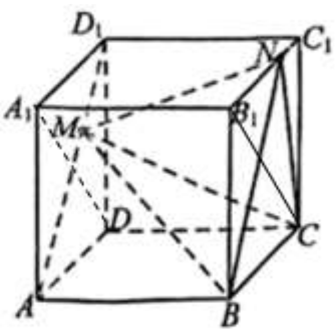
当 M 是线段 AD_1 的中点，N 与 B_1 重合时，由正方体的性质知：$A_1B_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，

且 $AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，则 $A_1B_1\perp AD_1$，又因为 $AD_1\perp A_1D$，且 $A_1B_1\cap A_1D=A_1,A_1B_1,A_1D\subset$ 平面 A_1DCB_1，所以 $AD_1\perp$ 平面 A_1DCB_1，

又 $MN\subset$ 平面 A_1DCB_1，则 $AD_1\perp MN$，故错误；

④当 $AM=B_1N$ 时，$\triangle AMB\cong\triangle B_1NB$，则 $BM=BN$，故存在点 M，N，使 $\triangle MBN$ 为等腰三角形，故正确；

故答案为：①②④



三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$a_n=-3n+2$

（2）$S_n=2^n+\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{n}{2}-1$

【分析】（1）由等差数列基本量计算即可得；

（2）借助等差数列求和公式及等比数列求和公式分组求和即可得.

【小问 1 详解】

设 $a_n=a_1+(n-1)d$，则 $a_1+a_3=2a_1+2d=-8$，$a_3+a_5=2a_1+6d=-20$，

解得 $a_1=-1$，$d=-3$，故 $a_n=a_1+(n-1)d=-1-3n+3=-3n+2$；

【小问 2 详解】

数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，故 $b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，

$c_n=b_n-a_n=2^{n-1}+3n-2$，

故 $S_n=1+3-2+2+6-2+\cdots+2^{n-1}+3n-2$

$$=\frac{1(1-2^n)}{1-2}+\frac{(1+3n-2)n}{2}=2^n+\frac{3}{2}n^2-\frac{n}{2}-1.$$

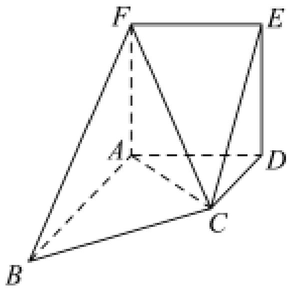
17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{6}}{6}$

【分析】（1）首先证明 $AC\perp BC$，再利用 $AB\perp$ 平面 $ADEF$，得到 $AB\perp AF$，再结合四边形 $ADEF$ 为矩形得到 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，进而得到 $AF\perp BC$，最后得到 $BC\perp$ 平面 ACF，最终得证；

（2）以 A 为原点，建立合适的空间直角坐标系，写出相关向量，计算出平面 BCF 的法向量为 $\vec{m}=(1,1,2)$，则可计算出线面角的正弦值.

【小问 1 详解】



连接 AC，$\because AB\perp$ 平面 $ADEF$，$AD\subset$ 平面 $ADEF$，$\therefore AB\perp AD$，

$\because AB//CD$，$AD=CD=1$，$AB=2$，$\therefore AC=\sqrt{2}$，$\angle ABC=\angle ADC=45^\circ$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $BC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB?BC\cos\angle ABC}=\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore AC\perp BC$，

$\because AB\perp$ 平面 $ADEF$，$AF\subset$ 平面 $ADEF$，$\therefore AB\perp AF$，

$\because$ 四边形 $ADEF$ 为矩形，$\therefore AD\perp AF$，

$\because AB\cap AD=A$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AF\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AF\perp BC$，

又 $AF\cap AC=A$，$AF\subset$ 平面 ACF，$AC\subset$ 平面 ACF，$\therefore BC\perp$ 平面 ACF，

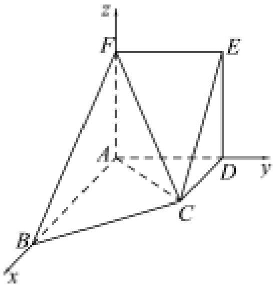
$\because CF\subset$ 平面 ACF，$\therefore BC\perp CF$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$AB\perp AD$，$AB\perp AF$，$AD\perp AF$，

$\therefore AB$，AD，AF 两两垂直，

$\therefore$以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(1,1,0)$，$F(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，

设平面 BCF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=2$，于是 $\vec{m}=(1,1,2)$，

设直线 AB 与平面 BCF 所成角为 α，$\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

则 $\sin\alpha=\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{AB}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times 2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 AB 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

18.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）垂直，理由见解析.

【分析】（1）由题意可得 a、c，计算即可得 b，即可得椭圆 E 的方程；

（2）求出直线 AP，与曲线联立后可计算出点 C 坐标，即可得直线 OP 与直线 BC 的斜率，即可得其位置关系.

【小问 1 详解】

椭圆过点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，故 $a=2$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $c=\sqrt{2}$，

则 $b=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，故 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；

【小问 2 详解】

由 $A(-2,0)$、$P(2,2)$，则直线 AP 为 $y=\dfrac{2-0}{2-(-2)}(x+2)$，即 $y=\dfrac{1}{2}x+1$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+1\end{cases}$，可得$3x^2+4x-4=0$，则$x_A+x_C=-\dfrac{4}{3}=-2+x_C$，

故$x_C=\dfrac{2}{3}$，则$y_C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{4}{3}$，即$C\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，

则$k_{OP}=\dfrac{2}{2}=1$、$k_{BC}=\dfrac{\frac{4}{3}-0}{\frac{2}{3}-2}=-1$，有$k_{OP}k_{BC}=1\times(-1)=-1$，

故直线OP与直线BC垂直.

19.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

【分析】（1）借助中位线证明平行四边形从而得到线线平行，结合线面平行的判定定理即可得；

（2）若选条件①：借助题目条件建立空间直角坐标系，利用异面直线PA与EF所成角的余弦值计算出AB的长度，即可得二面角$F-BE-A$的余弦值；若选条件②：借助题目条件利用勾股定理求出AB的长度，再建立空间直角坐标系即可得二面角$F-BE-A$的余弦值.

【小问1详解】

连接点F与PA中点G，连接BG，

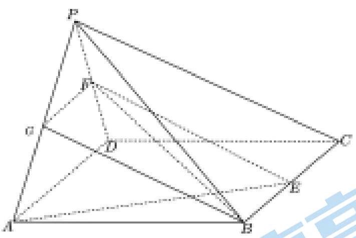
由底面$ABCD$为矩形且E为BC中点，故$BE=\dfrac{1}{2}AD$、$BE//AD$，

又F、G分别为PD，PA的中点，故$FG=\dfrac{1}{2}AD$、$FG//AD$，

故四边形$EFGB$为平行四边形，故$EF//GB$，

又$EF\not\subset$平面PAB、$GB\subset$平面PAB，

故$EF//$平面PAB；



【小问2详解】

若选条件①：异面直线PA与EF所成角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，

连接点P与AD中点M，连接EM，

由$PA=PD$，故$PM\perp AD$，故$PM=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{4}{2}\right)^2}=2$，

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

$PM \subset$ 平面 PAD，故 $PM \perp$ 平面 $ABCD$，

又 $EM \subset$ 平面 $ABCD$，故 $PM \perp EM$，

由 E、M 分别为 BC，AD 的中点，故 $AD \perp EM$，

故 AD、PM、EM 两两垂直，

故可以 M 为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

设 $AB = CD = a$，则有 $M(0,0,0)$、$P(0,0,2)$、$A(2,0,0)$、$E(0,a,0)$、

$B(2,a,0)$、$D(-2,0,0)$、$F(-1,0,1)$，

则 $\overrightarrow{PA} = (2,0,-2)$、$\overrightarrow{EF} = (-1,-a,1)$，

又异面直线 PA 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，

故 $\left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{EF}\rangle\right| = \left|\frac{-2-2}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{1+a^2+1}}\right| = \frac{1}{3}$，

解得 $a = 4$，故 $\overrightarrow{FB} = (3,-a,-1) = (3,-4,-1)$、$\overrightarrow{BE} = (-2,0,0)$，

设平面 FBE 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$，

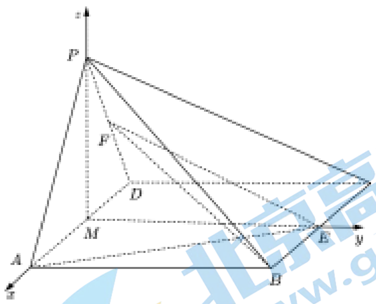
则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FB} = 0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE} = 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3x-4y-z=0\\ -2x=0\end{cases}$，令 $y=1$，可得 $x=0$、$z=-4$，

故平面 FBE 的法向量可为 $\vec{m} = (0,1,-4)$，

又 $PM \perp$ 平面 $ABCD$，故平面 $ABCD$ 的法向量可为 $\vec{n} = (0,0,1)$，

故 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{1}}\right| = \frac{4\sqrt{17}}{17}$，

即二面角 $F-BE-A$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.



若选条件②：$PD = \frac{2}{3}EF$，

连接点 P 与 AD 中点 M，连接 EM，连接 FM，

由 $PA=PD$，故 $PM\perp AD$，故 $PM=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=2$，

则 $FM=\frac{1}{2}PD=\sqrt{2}$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$PM\subset$ 平面 PAD，故 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $EM\subset$ 平面 $ABCD$，故 $PM\perp EM$，

由 E、M 分别为 BC，AD 的中点，故 $AD\perp EM$，

故 AD、PM、EM 两两垂直，

同理可得 $EM\perp$ 平面 PAD，由 $FM\subset$ 平面 PAD，故 $EM\perp FM$，

由 $PD=2\sqrt{2}$，$PD=\frac{2}{3}EF$，则 $EF=\frac{3}{2}PD=3\sqrt{2}$，

$EM=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=4$，

可以 M 为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

则有 $M(0,0,0)$、$P(0,0,2)$、$A(2,0,0)$、$E(0,4,0)$、$B(2,4,0)$、$F(-1,0,1)$，

$\overrightarrow{FB}=(3,-4,-1)$、$\overrightarrow{BE}=(-2,0,0)$，

设平面 FBE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

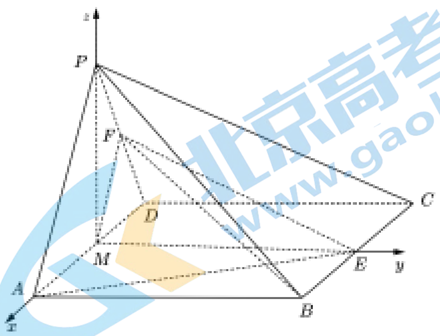
则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3x-4y-z=0\\ -2x=0\end{cases}$，令 $y=1$，可得 $x=0$、$z=-4$，

故平面 FBE 的法向量可为 $\vec{m}=(0,1,-4)$，

又 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，故平面 $ABCD$ 的法向量可为 $\vec{n}=(0,0,1)$，

故 $\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\left|\frac{-4}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{1}}\right|=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，

即二面角 $F-BE-A$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.



20.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1,\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sqrt{6}x-6y+\sqrt{6}=0$ 或 $\sqrt{6}x+6y+\sqrt{6}=0$

【分析】(1)由椭圆的右顶点 $A(2,0)$ 可得 $a=2$，若要 $\triangle AOP$ 面积最大，则需 $|PK|$ 最长，此时点 P 在 y 轴上，$\triangle AOP$ 面积可得 $b=1$，从而求得椭圆 C 的方程，再由 $a^2=b^2+c^2$ 可求得 c，从而可得离心率；

(2) 设直线 PH 的方程为：$y=k(x+1),(k\neq 0)$，与椭圆联立方程组可解得一元二次方程，从而可得出韦达定理的表达式，再通过直线 PA，QA 的方程得出点 E，F 坐标，进而表达出 $|EF|=2$，从而可解得 k，求得直线 PH 的方程.

【小问 1 详解】

椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$\because A(2,0)$，$\therefore a=2$，

P 为椭圆 C 上的动点，且点 P 不在 x 轴上，O 是坐标原点，过点 P 作 $PK\perp x$ 轴，垂足为 K，故 $\triangle AOP$ 面积为 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|PK|=\frac{1}{2}\times 2\times|PK|$，

若要 $\triangle AOP$ 面积最大，则需 $|PK|$ 最长，此时点 P 在 y 轴上，即 $|PK|=|OP|$ 时，使得 $\triangle AOP$ 面积最大，

$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|PK|=\frac{1}{2}\times 2\times|OP|=1$，$\therefore|OP|=1$，$\therefore b=1,c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【小问 2 详解】

P 为椭圆 C 上的动点，过点 $H(-1,0)$ 的直线 PH 与椭圆 C 交于另一点 Q，

可记 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

当直线 PH 的斜率不存在时，即 $PH\perp x$ 轴时，$|PQ|<2b=2$，此时直线 AP,AQ 分别与 y 轴相交于点 E，F. 此时 $|EF|<|PQ|<2$，不符合题意.

当直线 PH 的斜率存在时，设直线 PH 的方程为：$y=k(x+1),(k\neq 0)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去 y 可得 $\frac{x^2}{4}+k^2(x+1)^2=1$,化简得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$，由韦达定理可得 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8k^2}{1+4k^2}\\ x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$，

所以$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{64k^2}{(1+4k^2)^2}-\frac{16k^2-16}{1+4k^2}}=\frac{4\sqrt{3k^2+1}}{1+4k^2}$，

由$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$A(2,0)$，则直线PA的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，直线QA的方程为：

$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，因为直线AP,AQ分别与y轴相交于点E，F，令$x=0$分别代入直线PA,直线QA可

得：点$E\left(0,\frac{-2y_1}{x_1-2}\right)$，$F\left(0,\frac{-2y_2}{x_2-2}\right)$，

$\therefore |EF|=\left|\frac{-2y_1}{x_1-2}-\frac{-2y_2}{x_2-2}\right|=2\left|\frac{y_1}{x_1-2}-\frac{y_2}{x_2-2}\right|$

又$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$在直线PH方程$y=k(x+1),(k\neq 0)$上，所以有$y_1=k(x_1+1),y_2=k(x_2+1)$，

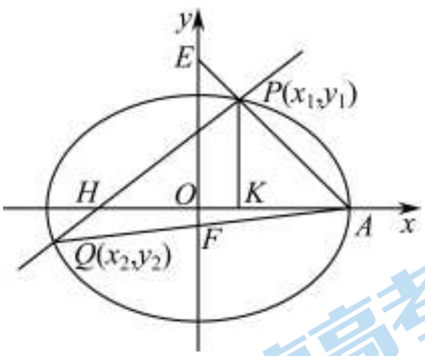
分别代入$|EF|$并化简可得$|EF|=2\left|\frac{y_1}{x_1-2}-\frac{y_2}{x_2-2}\right|=2\left|\frac{3k(x_2-x_1)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right|$

$=2\left|\frac{3k\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right|=2\left|\frac{3k\cdot\frac{4\sqrt{3k^2+1}}{1+4k^2}}{\frac{36k^2}{1+4k^2}}\right|=2\left|\frac{\sqrt{3k^2+1}}{3k}\right|$，

$\because |EF|=2$，$\therefore 2\left|\frac{\sqrt{3k^2+1}}{3k}\right|=2$，则$\left|\frac{\sqrt{3k^2+1}}{3k}\right|=1$，解得$k^2=\frac{1}{6}$，$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$，

故直线PH的方程为：$y=\frac{\sqrt{6}}{6}(x+1)$或$y=-\frac{\sqrt{6}}{6}(x+1)$，

即$\sqrt{6}x-6y+\sqrt{6}=0$或$\sqrt{6}x+6y+\sqrt{6}=0$.



21.【答案】（1）1，2，1或3，1；

（2）7；　（3）511566.

【分析】(1)由题意可直接列举出数列Q；

(2)由题意可得$n\geq 4$，分$n=4$、$n=5$和$n\geq 6$分别求$S(Q)$的最小值即可得答案；

(3)由题意可得数列Q为$2,2,\cdots,2,1,1\cdots,1$的形式，设其中有x项为 2，有y项为 1，则有$2x+y=2023$，

所以$T(Q)=-2x^2+2023x$，再利用二次函数的性质求$T(Q)$的最大值即可.

【小问 1 详解】

解：当$T(Q)=1$时，存在一组(i,j)，满足$a_i>a_j,1\le i<j\le n$，

又因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的各项均为正整数，且$S(Q)=a_1+a_2+\cdots+a_n=4$，

所以$a_n<4$，即$a_n\le 3$，且$i\ge 1,j\ge 2$，

当$i=1,j=2$时，满足条件的数列Q只能是：3,1；

当$i=1,j=3$时，满足条件的数列Q不存在；

当$i=1,j>3$时，满足条件的数列Q不存在；

当$i=2,j=3$时，满足条件的数列Q只有 1，2，1；

当$i=2,j>3$时，满足条件的数列Q不存在；

所以数列Q： 1，2，1 或 3,1；

【小问 2 详解】

解：由题意可知$C_n^2\ge 6$，所以$n\ge 4$，

①当$n=4$时，应有数列中各项均不相同，此时有$S(Q)\ge 1+2+3+4=10$；

②当$n=5$时，由于数列中各项必有不同的数，进而有$S(Q)\ge 6$.

若$S(Q)=6$，满足上述要求的数列中有四项为 1，一项为 2，此时$T(Q)\le 4$，不符合，

所以$S(Q)\ge 7$；

③当$n\ge 6$时，同②可得$S(Q)>7$；

综上所述，有$S(Q)\ge 7$，同时当Q为 2，2，1，1，1 时，$S(Q)=7$，

所以$S(Q)$的最小值为 7；

【小问 3 详解】

解：①存在大于 1 的项，否则此时有$T(Q)=0$；

②$a_n=1$,否则将a_n拆分成a_n个 1 后$T(Q)$变大；

③当$t=1,2,\cdots,n-1$时，有$a_t\ge a_{t+1}$，否则交换a_t,a_{t+1}顺序后$T(Q)$变为$T(Q)+1$，进一步有

$a_t-a_{t+1}\in\{0,1\}$，

否则有$a_t\ge a_{t+1}+2$，此时将a_t改为a_t-1，并在数列末尾添加一项 1，此时$T(Q)$变大；

④各项只能为 2 或 1，否则由①②③可得数列Q中有存在相邻的两项$a_t=3,a_{t+1}=2$，设此时Q中有x项为 2，则将a_t改为 2，并在数列末尾添加一项 1 后，$T(Q)$的值至少变为$T(Q)+x+1-x=T(Q)+1$；

⑤由上可得数列Q为$2,2,\cdots,2,1,1\cdots,1$的形式，设其中有x项为 2，有y项为 1，则有$2x+y=2023$，

从而有$T\left(Q\right)=xy=(2023-2x)x=-2x^2+2023x$，

由二次函数的性质可得，当且仅当$\begin{cases}x=506\\y=1011\end{cases}$时，$T\left(Q\right)$最大，为511566.

【点睛】关键点睛：本题考查了有穷数列的前n项和及满足集合$\left\{(i,j)\mid a_i>a_j,1\le i<j\le n\right\}$中元素的个数，属于难点，在解答每一小问时，要紧扣$Q$还是一个正整数数列，进行逻辑推理，从而得出结论.