高三数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid -7<3-2x<1\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=-1+2i$，则 $z-\bar{z}+\frac{z}{i}=$

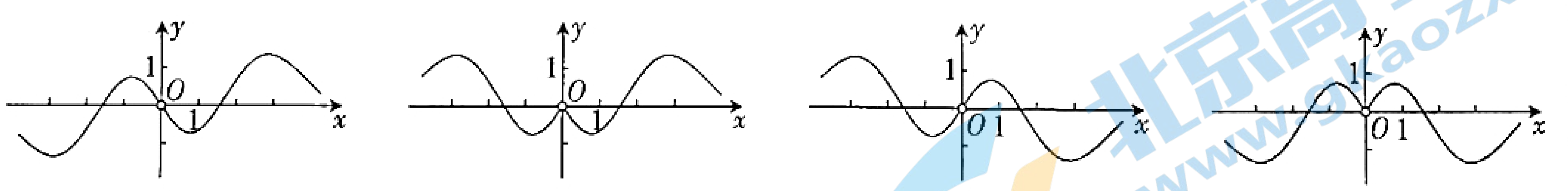
A. $2+5i$　　B. $2-3i$

C. $-2+5i$　　D. $-2-3i$

3. 已知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=4$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

4. 函数 $f(x)=\frac{3x^2\cos x}{e^x-e^{-x}}$ 的部分图象大致为



A　　B　　C　　D

5. 函数 $f(x)=2x-5\ln x+\frac{3}{2}x^2$ 的单调递减区间是

A. $(\frac{1}{2},+\infty)$　　B. $(0,\frac{3}{2})$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

6. 已知圆锥的底面半径为 2，母线长为 4，则该圆锥内半径最大的球的表面积与圆锥外接球的表面积之比为

A. $1:2$　　B. $1:4$　　C. $1:8$　　D. $1:27$

7. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=3^x-1$，则 $f(2000)+f(2001)+f(2002)+\cdots+f(2021)=$

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2，$C$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在 C 的右支上，PF_1 的中点 N 在圆 $O:x^2+y^2=c^2$ 上，其中 c 为半焦距，则 $\sin\angle F_1PF_2=$

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的最小正周期为 4π，将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数 $g(x)$的图象，且 $g(x)$是奇函数，则

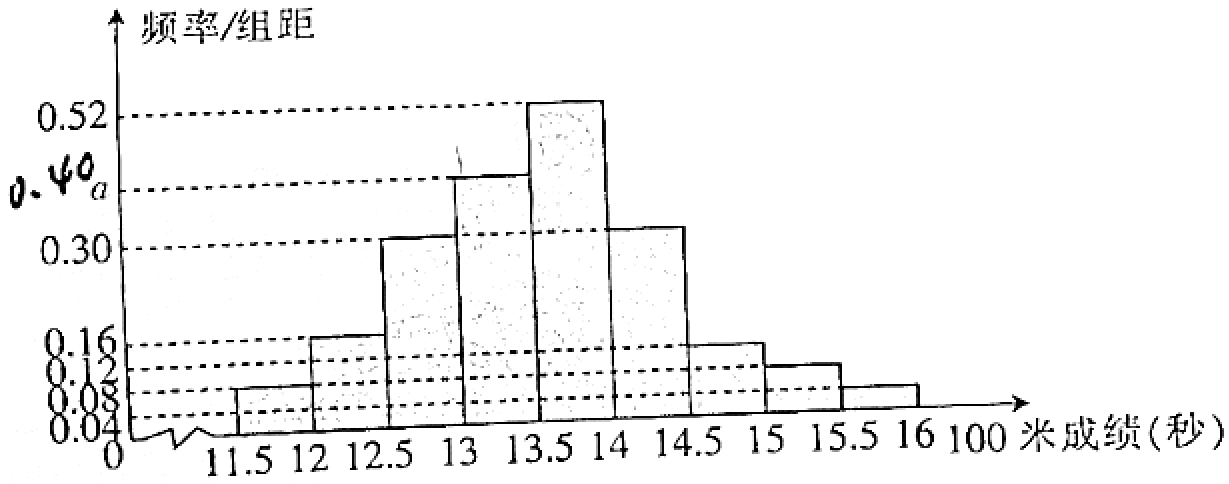
A. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

B. $g(x)$在区间$[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$上的最大值为$-3$

C. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

D. $g(x)$在区间$[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$上的最大值为$-\frac{3}{2}$

10. 某中学为了解高三男生的体能情况，通过随机抽样，获得了 200 名男生的 100 米体能测试成绩(单位：秒)，将数据按照[11.5,12)，[12,12.5)，…，[15.5,16]分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图.



由直方图推断，下列选项正确的是

A. 直方图中 a 的值为 0.38

B. 由直方图估计本校高三男生 100 米体能测试成绩的众数为 13.75 秒

C. 由直方图估计本校高三男生 100 米体能测试成绩不大于 13 秒的人数为 54

D. 由直方图估计本校高三男生 100 米体能测试成绩的中位数为 13.7 秒

11. 已知点 $A(0,2)$，$B(1,1)$，且点 P 在圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 上，C 为圆心，则

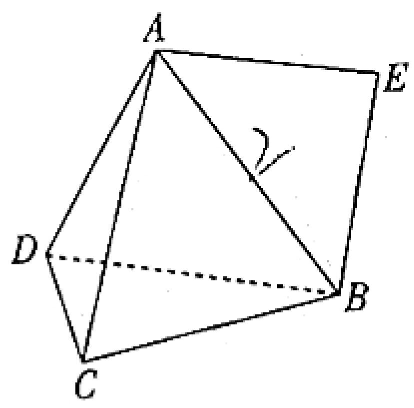
A. 当$\angle PAB$ 最大时，$\triangle APB$ 的面积为 2

B. $|PA|+|PB|$的最小值为$\sqrt{2}$

C. $|PA|-|PC|$的最大值为 $2\sqrt{2}$

D. $||PA|-|PB||$的最大值为$\sqrt{2}$

12. 如图，等腰直角三角形 ABE 的斜边 AB 为正四面体 $A-BCD$ 的侧棱，$AB=2$，直角边 AE 绕斜边 AB 旋转一周，在旋转的过程中，下列说法正确的是



A. 三棱锥 $E-BCD$ 体积的最大值为$\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

B. 三棱锥 $E-BCD$ 体积的最小值为$\frac{\sqrt{3}-1}{3}$

C. 存在某个位置，使得 $AE\perp BD$

D. 设二面角 $D-AB-E$ 的平面角为 θ，且 $0<\theta<\pi$，则 $\theta<\angle DAE$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\sin 2x=3\sin x$，则 $\cos 2x=$____▲____.

14. 某学校有 100 人参加暑期社会实践，实践结束时的综合能力测试成绩 X 近似服从正态分布 $N(110,\sigma^2)$，若 $P(100\leqslant X\leqslant 110)=0.35$，则综合能力测试成绩在 120 分以上的人数大约为____▲____.

15. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，点 $A(x_0,\frac{p}{2})$ 在 C 上，点 B 的坐标为 $(0,-\frac{p}{2})$，若 $|AB|=5\sqrt{2}$，则 C 的焦点坐标为____▲____.

16. 若在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列. 现对数列 3，4 进行构造，第一次得到数列 3，7，4；第二次得到数列 3，10，7，11，4；依次构造，第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次得到数列 $3,x_1,x_2,\cdots,x_k,4$. 记 $a_n=3+x_1+x_2+\cdots+x_k+4$，则 $a_3=$____▲____，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=$____▲____.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_4+a_{16}=40$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n-1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

已知△ABC 中内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $\cos A\cos B-1=\sin A\sin B-2\sin^2 C$.

(1)求角 C；

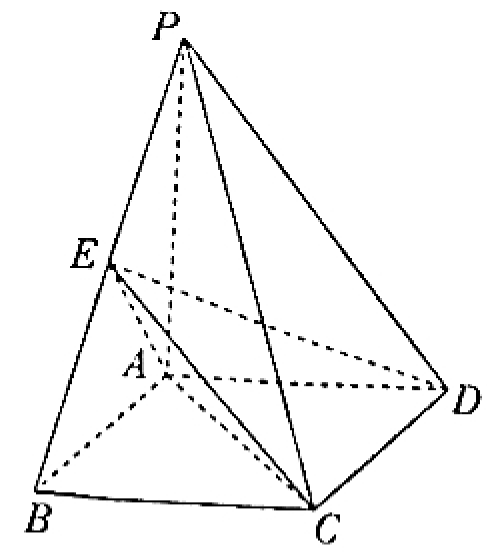
(2)若 $c=4$，$a^2+b^2=32$，求△ABC 的面积.

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB=2$，点 E 是棱 PB 的中点.

(1)证明：平面 $ACE\perp$ 平面 PBC.

(2)若 $BC=3$，求二面角 $A-CE-D$ 的余弦值.



20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{1}{2}$，且 C 经过点 $P(-2,0)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

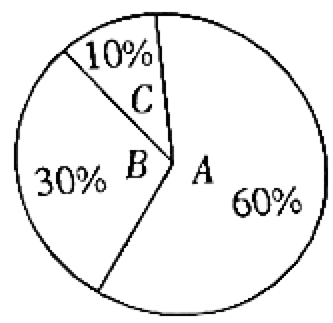
(2)过点 P 的直线 l 交 C 于另一点 A，若 $|PA|=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，求直线 l 的斜率.

21.（12 分）

某单位有员工 50000 人，一保险公司针对该单位推出一款意外险产品，每年每位职工只需要交少量保费，发生意外后可一次性获得若干赔偿金. 保险公司把该单位的所有岗位分为 A，B，C 三类工种，从事三类工种的人数分布比例如饼图所示，且这三类工种每年的赔付概率如下表所示：

工种类别	A	B	C
赔付概率	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{2}{10^5}$	$\frac{1}{10^4}$

职工类别分布饼图



对于 A，B，C 三类工种，职工每人每年保费分别为 a 元、a 元、b 元，出险后的赔偿金额分别为 100 万元、100 万元、50 万元，保险公司在开展此项业务过程中的固定支出为每年 20 万元.

(1)若保险公司要求每年收益的期望不低于保费的 15%，证明：$153a+17b\geq 4200$.

(2)现有如下两个方案供单位选择：

方案一：单位不与保险公司合作，职工不交保险，出意外后单位自行拿出与保险公司提供的等额赔偿金赔付给出意外的职工，单位开展这项工作的固定支出为每年 35 万元；

方案二：单位与保险公司合作，$a=25$，$b=60$，单位负责职工保费的 80%，职工个人负责 20%，出险后赔偿金由保险公司赔付，单位无额外专项开支.

根据该单位总支出的差异给出选择合适方案的建议.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x+b\cos x+\frac{1}{2}x^2+1$（其中 a，b 为实数）的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

(1)求实数 a，b 的值；

(2)求函数 $g(x)=f'(x)-3x$ 的最小值；

(3)若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $xf(x)\geq\frac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

高三数学参考答案

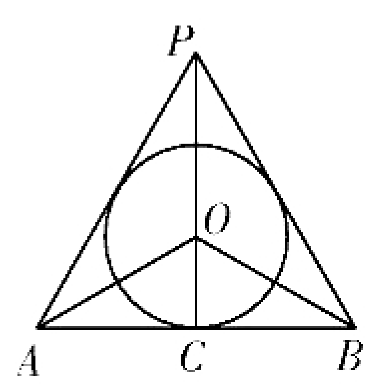
1. D　因为 $A=\{x|1<x<5\}$，所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$.

2. A　$z=z+\frac{z}{i}=4i+\frac{i^2+2i}{i}=2+5i$.

3. C　因为$\vec{OA}\perp\vec{AB}$，所以$\vec{OA}\cdot(\vec{OB}-\vec{OA})=\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OA}^2=0$，从而$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OA}^2=16$.

4. C　函数 $f(x)=\frac{3x^2\cos x}{e^x-e^{-x}}$的定义域$\{x|x\neq0\}$关于原点对称，且 $f(-x)=\frac{3(-x)^2\cos(-x)}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$，则 $f(x)$为奇函数，其图象关于原点对称，排除 B 和 D；又 $f(\frac{\pi}{2})=0$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$3x^2\cos x>0$，且 $e^x>e^{-x}$，所以$f(x)>0$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内恒成立，排除 A；所以只有 C 正确.

5. D　因为 $f'(x)=2-\frac{5}{x}+3x(x>0)$，令 $2-\frac{5}{x}+3x<0(x>0)$，解得 $0<x<1$，所以 $f(x)$的单调递减区间为 $(0,1)$.



6. B　圆锥内半径最大的球即圆锥的内切球，设其半径为 r. 设圆锥的一个轴截面为$\triangle PAB$，如图所示，则$\triangle PAB$ 内切圆的半径为圆锥内切球的半径. 在$\triangle PAB$ 中，$PA=PB=4$，C 为 AB 的中点，$AB=4$，所以$\triangle PAB$ 为等边三角形. 由 $S_{\triangle PAB}=3S_{\triangle OAB}$，得$\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times4r\times3$，解得 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 又$\triangle PAB$ 外接圆的直径 $2R=\frac{4}{\sin60^\circ}$，所以外接球的半径 $R=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\frac{S_内}{S_外}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{1}{4}$.

7. C　因为$-f(x)=f(-x)=f(x+2)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，则函数 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数，且 $f(0)=0$，$f(1)=2$，所以 $f(2)=0$，$f(3)=f(-1)=-2$，所以 $f(2000)+f(2001)+f(2002)+\cdots+f(2021)=5[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]+f(0)+f(1)=2$.

8. A　由题意知，ON 为$\triangle F_1PF_2$ 的中位线，所以$|PF_2|=2|ON|=2c$，$|PF_1|=2c+2a$，$|F_1F_2|=2c$，且 $NF_2\perp PF_1$，所以 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{a+c}{2c}$. 又$\frac{c}{a}=2$，所以 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{4}$，$\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. AD　因为函数 $f(x)$的最小正周期为 4π，所以 $\omega=\frac{1}{2}$. 又 $g(x)=3\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}+\varphi)$是奇函数，所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，化简得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=3\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$，$g(x)=-3\sin\frac{x}{2}$. 当 $x\in[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$时，$\frac{x}{2}\in[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}]$，所以$-3\leqslant g(x)\leqslant-\frac{3}{2}$，故 A，D 正确，B，C 错误.

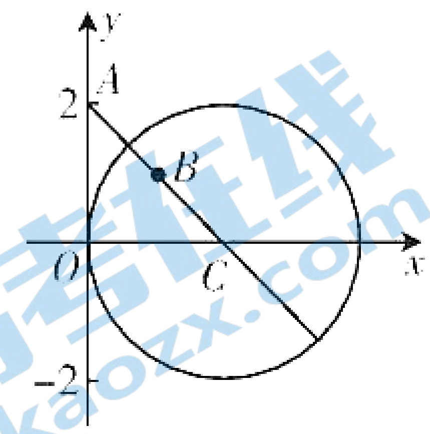
10. BC　由概率统计相关知识，可知各组频率之和为 1，所以$(0.08+0.16+0.30+a+0.52+0.30+0.12+0.08+0.04)\times0.5=1$，解得 $a=0.40$，故 A 错误；

测试成绩的众数是直方图中频率最高组的中点，即$\frac{13.5+14}{2}=13.75$，故 B 正确；

由图可知，成绩不大于 13 秒的人数为$(0.08+0.16+0.30)\times0.5\times200=54$，故 C 正确；

设中位数是 x，则$(0.08+0.16+0.30+0.40)\times0.5+0.52\times(x-13.5)=0.5$，解得 $x\approx13.56$，故 D 错误.

11. BCD　如图，点 B 在圆 C 内，当 AP 与圆 C 相切时 $\angle PAB$ 最大，此时 $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$，A 错误；当 P 为线段 AB 与圆 C 的交点时，$|PA|+|PB|$ 取得最小值为 $\sqrt{2}$，B 正确；因为 $|PC|=2$，所以当 $|PA|$ 最大时，$|PA|-|PC|$ 也最大，当 A,C,P 三点共线，且 C 在 A,P 之间时，其最大值为 $|AC|=2\sqrt{2}$，C 正确；当 P 为射线 BC 与圆 C 的交点时，$||PA|-|PB||$ 取得最大值 $|AB|=\sqrt{2}$，D 正确.



12. AC　对于选项 A，B，在图 1 中，F 是 CD 的中点，O 是 AB 的中点，点 E 在以 O 为圆心，1 为半径的圆上运动，易知当 F,O,E 三点共线，且 O 在 E,F 之间时，三棱锥 $E-BCD$ 的体积最大，当 E 运动到 E_1 的位置时，$E-BCD$ 的体积最小. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOF$ 中，$BO=1$，$BF=\sqrt{3}$，$OF=\sqrt{2}$，$\sin\angle BFO=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$FE=\sqrt{2}+1$，$FE_1=\sqrt{2}-1$. 设 E,E_1 到平面 BCD 的距离分别为 h_1,h_2，则 $h_1=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$，$h_2=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$，$S_{\triangle BCD}=\sqrt{3}$，所以三棱锥 $E-BCD$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$，最小值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$，A 正确，B 错误. 对于选项 C，如图 2，因为直线 BD 与旋转轴 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，母线 AE_2 与旋转轴 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，所以直线 AE_2 与 BD 所成角的范围为 $[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}]$，即 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$，因为 $\frac{7\pi}{12}>\frac{\pi}{2}$，所以存在夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 的情况，又因为线线角的取值范围不包含钝角，所以直线 AE_2 与 BD 所成角的范围为 $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$，即可得出 $AE\perp BD$，C 正确. 对于选项 D，如图 2，当 E 运动到 E_2 处时，二面角 $D-AB-E$ 的平面角为 $\angle DOE_2$，在 $\triangle DAE_2$ 与 $\triangle DOE_2$ 中，$AD^2=AO^2+OD^2$，$AE_2^2=AO^2+OE_2^2$，所以 $AD>OD$，$AE_2>OE_2$. 将 $\triangle DAE_2$ 沿 DE_2 翻转到与 $\triangle DOE_2$ 在同一个平面，且 A,O 在 DE_2 的两侧，连接 AO. 因为 $AD>OD$，所以 $\angle DOA>\angle DAO$. 同理可证 $\angle E_2OA>\angle E_2AO$，所以 $\angle DOE_2>\angle DAE_2$，即 $\theta>\angle DAE_2$，D 错误.

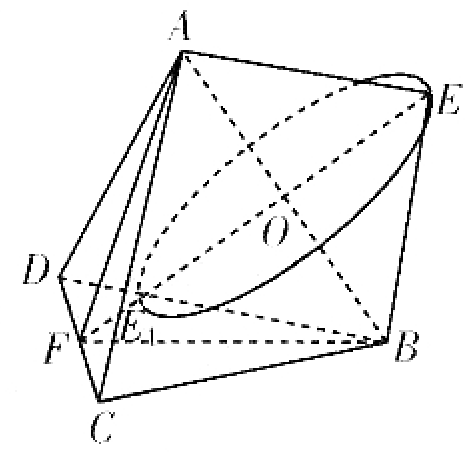


图 1

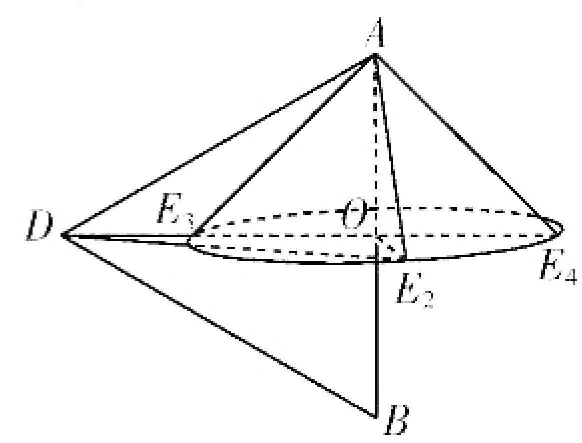


图 2

13. $\frac{1}{8}$　因为 $2\sin 2x=3\sin x$，所以 $4\sin x\cos x=3\sin x$，解得 $\cos x=\frac{3}{4}$，从而 $\cos 2x=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$.

14. 15　由题意知 $P(100\leqslant X\leqslant110)=P(110\leqslant X\leqslant120)=0.35$，所以 $P(X\geqslant120)=P(X\leqslant100)=\frac{1-0.35\times2}{2}=0.15$，从而可知测试成绩在 120 分以上的人数大约为 $100\times0.15=15$.

15. $(0,\frac{5}{2})$　把 $A(x_0,\frac{p}{2})$ 的坐标代入 $x^2=2py(p>0)$，得 $x_0=\pm p$，因为 $|AB|=5\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{p^2+p^2}=5\sqrt{2}$，解得 $p=5$，所以抛物线 C 的焦点坐标为 $(0,\frac{5}{2})$.

16. 98；$\frac{7(3^{n+1}+2n-3)}{4}$　因为 $a_1=3+7+4=14$，$a_2=3+10+7+11+4=35=a_1+7\times3$，$a_3=a_2+7\times3^2=98$，…，$a_n=a_{n-1}+7\times3^{n-1}$，所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$，即 $a_n=14+7(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})=\frac{7(3^n+1)}{2}$，从而 $S_n=\frac{7}{2}[(3+3^2+\cdots+3^n)+n]=\frac{7(3^{n+1}+2n-3)}{4}$.

17. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_4+a_{16}=2a_{10}=40$，所以 $a_{10}=20$，

又 $a_1=2$，由 $2+9d=20$，得 $d=2$. …………………………………………………… 2 分

所以 $a_n=2+2(n-1)=2n$. …………………………………………………… 3 分

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n-1$.①

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2^{n-1}-1$.②

①－②，得 $b_n=2^{n-1}$. ………………………………………………………… 5 分

当 $n=1$ 时，$b_1=2-1=1$，满足 $b_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=2^{n-1}$. ……………………………… 6 分

(2)因为 $c_n=a_nb_n=2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$，………………………………………………… 7 分

所以 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$，③

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，④ ……………………………… 8 分

③－④，得 $-T_n=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}$，……………… 9 分

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $\cos A\cos B-1=\sin A\sin B-2\sin^2 C$，

所以 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=1-2\sin^2 C$，即 $\cos(A+B)=\cos 2C$，……………………… 2 分

整理可得 $2\cos^2 C+\cos C-1=0$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$ 或 $\cos C=-1$（舍去），……………… 5 分

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=32-ab=16$，

所以 $ab=16$，………………………………………………………………………………… 9 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. ……………………… 12 分

19. (1)证明：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BC\perp PA$. ……………… 1 分

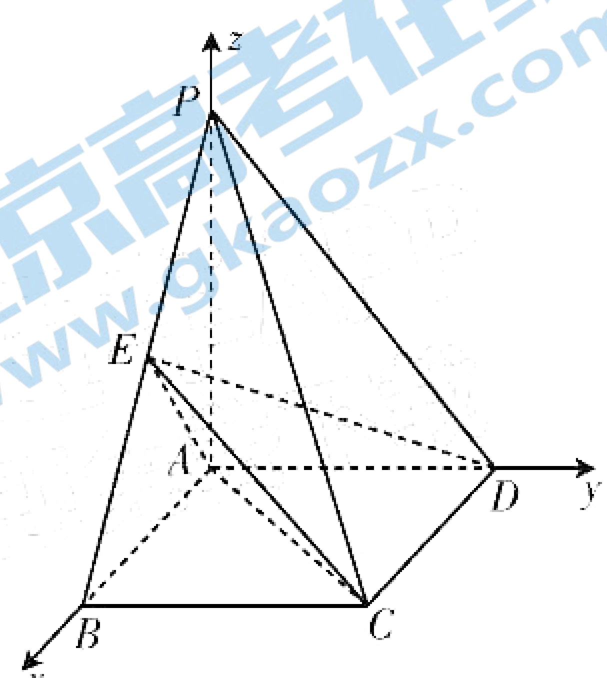
又因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC\perp AB$，因为 $PA\cap AB=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，从而 $BC\perp AE$. …………………………………………………………………………………… 3 分

因为 $PA=AB=2$，点 E 是棱 PB 的中点，所以 $AE\perp PB$.

因为 $PB\cap BC=B$，所以 $AE\perp$ 平面 PBC. ………………………………………………… 4 分

又因为 $AE\subset$ 平面 ACE，所以平面 $ACE\perp$ 平面 PBC. …………………………………… 5 分

(2)解：以 A 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图所示，依题意可得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,3,0)$，$D(0,3,0)$，$E(1,0,1)$. $\overrightarrow{EC}=(1,3,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3,0)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$. ……………………………………………………………………… 7 分



设平面 ACE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+3y_1-z_1=0,\\ 2x_1+3y_1=0,\end{cases}$

不妨令 $x_1=3$，可得 $\boldsymbol{n}=(3,-2,-3)$. ………………………………………… 9 分

设平面 CED 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_2+3y_2-z_2=0,\\ 2x_2=0,\end{cases}$

不妨令 $y_2=1$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,1,3)$. ……………………………………………………… 11 分

易知二面角 $A-CE-D$ 为锐角，$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{\sqrt{55}}{10}$，

所以二面角 $A-CE-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{55}}{10}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $e=\frac{1}{2}$，所以 $a=2c$. ……………………………………………………… 2 分

又椭圆 C 过点 $P(-2,0)$，所以 $a=2$，从而 $c=1$. …………………………………………… 3 分

所以 $b=\sqrt{3}$，椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 5 分

(2)显然直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y=k(x+2)$，$A(x_1,y_1)$，……………………… 6 分

联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x+2),\end{cases}$消去 y 得$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$. ………………………… 7 分

所以 $x_1+(-2)=-\dfrac{16k^2}{3+4k^2}$，$-2x_1=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$，可得 $x_1=\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}$. ………………………… 8 分

因为$|PA|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}+2\right|=\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$， ………………………… 10 分

所以$\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$，整理得 $32k^4-k^2-31=0$. ………………………… 11 分

所以 $k^2=1$，解得 $k=\pm1$，即直线 l 的斜率为±1. ………………………… 12 分

21.（1）证明：设工种 A,B,C 对应职工的每份保单保险公司的收益分别为随机变量 X,Y,Z（单位：元），则 X,Y,Z 的分布列分别为

X	a	$a-100\times10^4$
P	$1-\dfrac{1}{10^5}$	$\dfrac{1}{10^5}$

Y	a	$a-100\times10^4$
P	$1-\dfrac{2}{10^5}$	$\dfrac{2}{10^5}$

Z	b	$b-50\times10^4$
P	$1-\dfrac{1}{10^4}$	$\dfrac{1}{10^4}$

$E(X)=a\times(1-\dfrac{1}{10^5})+(a-100\times10^4)\times\dfrac{1}{10^5}=a-10$， ………………………… 1 分

$E(Y)=a\times(1-\dfrac{2}{10^5})+(a-100\times10^4)\times\dfrac{2}{10^5}=a-20$， ………………………… 2 分

$E(Z)=b\times(1-\dfrac{1}{10^4})+(b-50\times10^4)\times\dfrac{1}{10^4}=b-50$. ………………………… 3 分

所以$(a-10)\times50000\times0.6+(a-20)\times50000\times0.3+(b-50)\times50000\times0.1-20\times10^4$

$\geqslant(a\times50000\times0.6+a\times50000\times0.3+b\times50000\times0.1)\times0.15$， ………………………… 5 分

整理得 $153a+17b\geqslant4200$. ………………………… 6 分

（2）解：方案一：单位不与保险公司合作，则单位每年赔偿金支出的期望与固定开支共为 $30000\times100\times10^4\times\dfrac{1}{10^5}+15000\times100\times10^4\times\dfrac{2}{10^5}+5000\times50\times10^4\times\dfrac{1}{10^4}+35\times10^4=1.2\times10^6$（元）. ………………………… 8 分

方案二：单位与保险公司合作，则单位支出金额为

$(30000\times25+15000\times25+5000\times60)\times0.8=1.14\times10^6$（元）. ………………………… 10 分

因为 $1.2\times10^6>1.14\times10^6$，所以建议单位选择方案二. ………………………… 12 分

22. 解：（1）因为 $f(x)=ae^x+b\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+1$，所以 $f'(x)=ae^x-b\sin x+x$. ………………………… 1 分

由题意得$\begin{cases}f(0)=a+b+1=1,\\ f'(0)=a=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$ ………………………… 2 分

（2）由（1）知 $f(x)=e^x-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+1$，$g(x)=e^x+\sin x-2x$，所以 $g'(x)=e^x+\cos x-2$，令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^x-\sin x$.

①当 $x<0$ 时，由 $e^x-2<-1$，$-1\leqslant\cos x\leqslant1$，知 $g'(x)=e^x+\cos x-2<0$，所以 $g(x)$ 在$(-\infty,0)$上单调

递减，无最小值. ………………………………………………………………………… 3 分

②当 $x\geqslant 0$ 时，由 $e^x\geqslant 1$，$-1\leqslant -\sin x\leqslant 1$，知 $h'(x)=e^x-\sin x>0$，所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g'(x)\geqslant g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$.

综上，$g(x)$ 的最小值为 1. ………………………………………………………………………… 5 分

(3)对 x 分情况讨论如下：

①当 $x=0$ 时，对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，不等式 $xf(x)\geqslant\frac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 恒成立. ………………………… 6 分

②当 $x>0$ 时，不等式 $xf(x)\geqslant\frac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 等价于 $e^x-\cos x+\frac{1}{2}x^2+1\geqslant\frac{3}{2}x^2+2\lambda x+1$，即 $e^x-x^2-2\lambda x-\cos x\geqslant 0$.

令 $G(x)=e^x-x^2-2\lambda x-\cos x$，则 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-2\lambda=g(x)-2\lambda$.

当 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由(2)知 $G'(x)=g(x)-2\lambda\geqslant g(0)-2\lambda=1-2\lambda\geqslant 0$.

所以 $G(x)$ 单调递增，从而 $G(x)>G(0)=0$，满足题意. ……………………………………………… 7 分

当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时，由(2)知 $G'(x)=g(x)-2\lambda=e^x-2x+\sin x-2\lambda$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

易证 $e^x\geqslant ex$，故 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-2\lambda>(e-2)x-1-2\lambda$，从而 $G'(\frac{1+2\lambda}{e-2})>(e-2)\times\frac{1+2\lambda}{e-2}-1-2\lambda=0$.

……………………………………………………………………………………………… 9 分

又 $G'(0)=1-2\lambda<0$，所以存在唯一实数 $x_0\in(0,\frac{1+2\lambda}{e-2})$，使得 $G'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 单调递减，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G(x)<G(0)=0$，不满足题意. …………………………… 10 分

③当 $x<0$ 时，不等式 $xf(x)\geqslant\frac{3}{2}x^3+2\lambda x^2+x$ 等价于 $e^x-x^2-2\lambda x-\cos x\leqslant 0$.

同上，令 $G(x)=e^x-x^2-2\lambda x-\cos x$，则 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-2\lambda=g(x)-2\lambda$.

当 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由(2)可知 $G'(x)>0$，所以 $G(x)$ 单调递增，故 $G(x)<G(0)=0$，满足题意. ………… 11 分

综上，可得 λ 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{2}]$. ……………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。