

## 高一数学

2023.07

考生须知

1. 本试卷共 4 页,共两部分,21 道小题。满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和准考证号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题用 2B 铅笔作答,其他题用黑色字迹签字笔作答。

## 第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 复数  $(1+i)^2 =$

- (A) 0 (B) 2  
(C)  $2i$  (D)  $-2i$

(2) 已知向量  $\mathbf{a} = (1, -2)$  与  $\mathbf{b} = (2, m)$ , 且  $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$ , 则  $m =$

- (A)  $-4$  (B)  $-1$   
(C)  $1$  (D)  $4$

(3) 某学校现有小学和初中学生共 2000 人,为了解学生的体质健康合格情况,决定采用分层抽样的方法从全校学生中抽取一个容量为 400 的样本,其中被抽到的初中学生人数为 180,那么这所学校的初中学生人数为

- (A) 800 (B) 900  
(C) 1000 (D) 1100

(4) 已知在复平面内复数  $z$  对应的点的坐标为  $(-3, 4)$ , 则  $|z| =$

- (A) 3 (B) 4  
(C) 5 (D)  $4\sqrt{2}$

(5) 已知平面  $\alpha, \beta$ , 直线  $l \subset \alpha$ , 则“ $l \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(6) 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为非零向量, 且满足  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

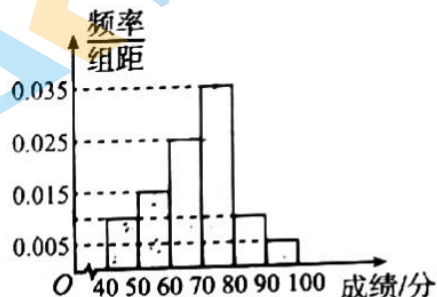
- (A) 0 (B)  $-1$   
(C)  $1$  (D)  $\sqrt{2}$

(7) 在  $\triangle ABC$  中,  $a=3, b-c=2, \cos B = -\frac{1}{2}$ , 则  $b =$

- (A)  $\sqrt{7}$  (B)  $2\sqrt{7}$   
(C) 5 (D) 7

(8) 某校举办知识竞赛, 将 100 人的成绩整理后画出的频率分布直方图如下, 则根据频率分布直方图, 下列结论正确的是

- (A) 中位数估计为 75  
(B) 众数估计为 70  
(C) 平均数估计为 68.5  
(D) 第 85 百分位数估计为 85



(9) 已知边长为 3 的正方形  $ABCD$ , 点  $E$  是边  $BC$  上动点, 则  $\vec{AE} \cdot \vec{DE}$  的最大值是

- (A)  $\frac{27}{4}$  (B) 9  
(C)  $4\sqrt{3}$  (D) 10

(10) 已知点  $P$  在棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  表面运动, 且  $PB = PD_1$ , 则线段  $AP$  的长的取值范围是

- (A)  $[0, 2\sqrt{3}]$  (B)  $[1, 3]$   
(C)  $[\sqrt{2}, 3]$  (D)  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 3]$

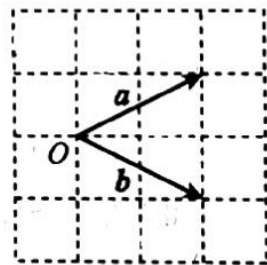
## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 复数  $z$  满足  $z+1$  为纯虚数, 则  $z$  的实部为\_\_\_\_\_。

(12) 对于一组数据 2, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 8, 则第 50 百分位数是\_\_\_\_\_。

(13) 已知向量  $a, b$  在正方形网格中的位置如图所示, 则  $a, b$  的夹角的余弦为\_\_\_\_\_。



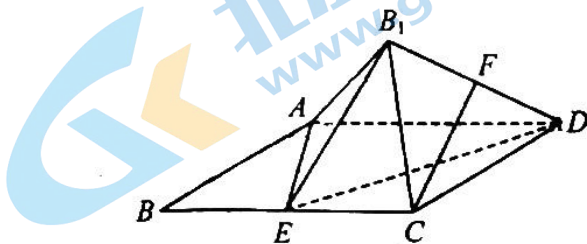
(14) 一个铁制的底面半径为 4, 侧面积为  $\frac{16}{3}\pi$  的实心圆柱的体积为\_\_\_\_\_, 将这个实心圆柱熔化后铸成一个实心球体, 则这个铁球的半径为\_\_\_\_\_。



(15) 如图, 已知菱形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ;  $\angle BAD=120^\circ$ ,  $E$  为边  $BC$  的中点, 将  $\triangle ABE$  沿  $AE$  翻折成  $\triangle AB_1E$  (点  $B_1$  位于平面  $ABCD$  上方), 连接  $B_1C$  和  $B_1D$ ,  $F$  为  $B_1D$  的中点, 则在翻折过程中, 给出下列四个结论:

- ① 平面  $AB_1E \perp$  平面  $B_1EC$ ;
- ②  $AB_1$  与  $CF$  的夹角为定值  $\frac{\pi}{3}$ ;
- ③ 三棱锥  $B_1-AED$  体积最大值为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;
- ④ 点  $F$  的轨迹的长度为  $\frac{\pi}{2}$ .

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.



三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

已知向量  $a, b$  满足  $|a|=10, b=(3, 4)$ .

- (I) 求  $|b|$ ;
- (II) 若  $a \parallel b$ , 求  $a$  的坐标;
- (III) 若  $a \perp b$ , 求  $|a-b|$ .

(17) (本小题 14 分)

已知  $\tan \alpha = 2$ .

- (I) 求  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$  的值;
- (II) 求  $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$  的值.

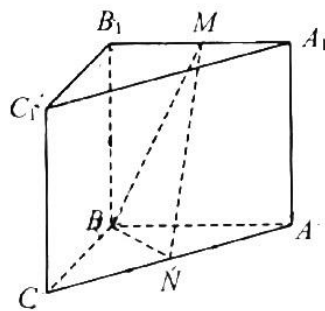
(18) (本小题 14 分)

如图, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 侧面  $BCC_1B_1$  为正方形, 平面  $BCC_1B_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,  $M, N$  分别为  $A_1B_1, AC$  的中点.

- (I) 求证:  $MN \parallel$  平面  $BCC_1B_1$ ;
- (II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求证:  $AB \perp BB_1$ .

条件①:  $AB \perp MN$ ; 条件②:  $AB = BC, BM = MN$ .

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.



(19)(本小题 14 分)

某工厂生产某款产品,该产品市场评级规定:评分在 10 分及以上的为一等品,低于 10 分的为二等品.下面是检验员从一批产品中随机抽样的 10 件产品的评分:

|     |      |     |     |      |     |      |     |      |      |
|-----|------|-----|-----|------|-----|------|-----|------|------|
| 9.6 | 10.1 | 9.7 | 9.8 | 10.0 | 9.7 | 10.0 | 9.8 | 10.1 | 10.2 |
|-----|------|-----|-----|------|-----|------|-----|------|------|

经计算得  $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 98.048$ , 其中  $x_i$  为抽取的第  $i$  件产品的评分,  $i=1, 2, 3, \dots, 10$ .

(I) 求这组样本平均数和方差;

(II) 若厂家改进生产线,使得生产出的每件产品评分均提高 0.2. 根据以上随机抽取的 10 件产品改进后的评分,估计改进后该厂生产的产品评分的平均数和方差;

(III) 在第(II)问前提下,再从改进后生产的产品中随机抽取 10 件产品,估计这 10 件产品的平均等级是否为一等品? 说明理由.

(20)(本小题 14 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ,  $D$  是  $AC$  边上的点,  $CD=1, AD=BD=3$ .

(I) 求  $B$  的大小;

(II) 求  $\tan A$  的值;

(III) 求  $\triangle BCD$  的面积.

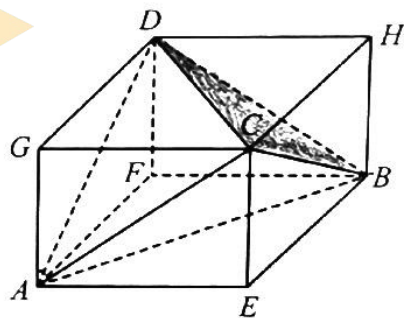
(21)(本小题 15 分)

如图,从长、宽、高分别为  $a, b, c$  的长方体  $AEBF-GCHD$  中截去部分几何体后,所得几何体为三棱锥  $A-BCD$ .

(I) 求三棱锥  $A-BCD$  的体积;

(II) 证明:三棱锥  $A-BCD$  的每个面都是锐角三角形;

(III) 直接写出一组  $a, b, c$  的值,使得二面角  $D-AB-C$  是直二面角.



大兴区 2022~2023 学年度第二学期期末检测

高一数学参考答案

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | C | A | B | C | B | A | D | C | B | D  |

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

(11)  $-1$  (12)  $5$  (13)  $\frac{3}{5}$  (14)  $\frac{32}{3}\pi; 2$

(15) ①②④ (全选对 5 分, 漏选 1 个 3 分, 漏选 2 个 2 分, 不选或选错 0 分)

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

(16) (共 14 分)

解: (I) 因为  $\mathbf{b} = (3, 4)$ ,

$$\text{所以 } |\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设  $\mathbf{a} = (x, y)$ .

因为  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 所以  $4x - 3y = 0$ .

又因为  $|\mathbf{a}| = 10$ , 所以  $\sqrt{x^2 + y^2} = 10$ .

$$\text{所以 } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = -6 \\ y = -8 \end{cases}.$$

所以,  $\mathbf{a} = (6, 8)$ , 或  $\mathbf{a} = (-6, -8)$ .  $\dots\dots 5 \text{ 分}$

(III) 因为  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 所以  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\mathbf{a} - \mathbf{b}| &= \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2} \\ &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2} = 5\sqrt{5}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

(17) (共 14 分)

解: (I) 因为  $\tan \alpha = 2$ ,

$$\text{所以 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2+1}{1-2 \times 1} = -3. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha} &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} \\ &= \frac{\cos \alpha (2 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{2\cos\alpha} \\
 &= \tan\alpha - \frac{1}{2} \\
 &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \dots\dots 7\text{分}
 \end{aligned}$$

(18) (共 14 分)

解: (I) 取  $B_1C_1$  的中点  $P$ , 连接  $PM, PC$ .

因为  $M, P$  分别为  $A_1B_1, B_1C_1$  的中点, 所以  $PM \parallel A_1C_1$ , 且  $PM = \frac{1}{2}A_1C_1$ .

因为四边形  $ACC_1A_1$  为平行四边形, 且  $N$  为  $AC$  的中点,

所以  $CN \parallel A_1C_1$ , 且  $CN = \frac{1}{2}A_1C_1$ .

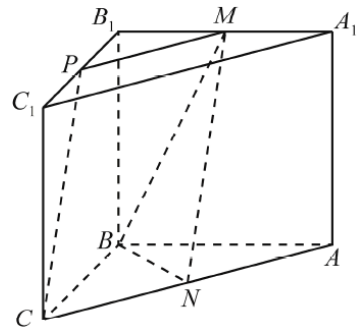
所以  $PM \parallel CN$ , 且  $PM = CN$ .

所以四边形  $PMNC$  为平行四边形.

所以  $MN \parallel PC$ .

又  $MN \not\subset$  平面  $BCC_1B_1$ ,  $PC \subset$  平面  $BCC_1B_1$ ,

所以  $MN \parallel$  平面  $BCC_1B_1$ .  $\dots\dots 6\text{分}$



(II) 因为侧面  $BCC_1B_1$  为正方形, 所以  $BC \perp BB_1$ .

又因为平面  $BCC_1B_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ , 且平面  $BCC_1B_1 \cap$  平面  $ABB_1A_1 = BB_1$ ,

所以  $BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ .

所以  $BC \perp AB$ .

选条件①:  $AB \perp MN$ .

由 (I) 得  $MN \parallel PC$ , 所以  $AB \perp PC$ .

又  $BC \cap PC = C$ , 所以  $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .

所以  $AB \perp BB_1$ .

选条件②:  $AB = BC, BM = MN$ .

因为  $MN = PC = \sqrt{CC_1^2 + C_1P^2}$ , 所以  $BM = MN = \sqrt{CC_1^2 + C_1P^2}$ .

又  $AB = BC = BB_1 = CC_1$ , 所以  $B_1M = C_1P$ ,



所以  $BM^2 = BB_1^2 + B_1M^2$ .

所以  $B_1M \perp BB_1$ , 即  $AB \perp BB_1$ . ……8分

(19) (共 14 分)

解: (I) 样本平均值  $\bar{x} = \frac{9.6+10.1+9.7+9.8+10.0+9.7+10.0+9.8+10.1+10.2}{10} = 9.9$

样本方差  $s^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 = 98.048 - 9.9^2 = 0.038$ . ……5分

(II) 估计改进后该厂生产的产品评分的平均数  $\bar{X} = \bar{x} + 0.2 = 10.1$ ,

方差  $S^2 = s^2 = 0.038$ . ……6分

(III) 可以认为是一等品. 因为改进后该厂生产的产品评分由样本数据估计平均数为  $10.1 > 10$ , 所以可以认为这 10 件产品平均等级为一等品.

不一定是一等品. 因为样本数据具有随机性, 所以新样本平均值不一定达到 10 分及以上, 所以新样本平均等级不一定是一等品. ……3分

(20) (共 14 分)

解: (I) 在  $\triangle ABC$  中, 因为  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ,

所以由余弦定理得  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$ .

又  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $B = \frac{\pi}{3}$ . ……4分

(II) 如图, 令  $\alpha = \angle A$ , 因为  $AD = BD = 3$ , 所以  $\angle ABD = \angle A = \alpha$ .

所以  $\angle DBC = \frac{\pi}{3} - \alpha$ ,  $\angle C = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ ,  $\angle BDC = 2\alpha$ .

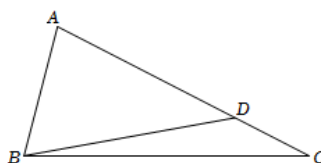
在  $\triangle BCD$  中, 由正弦定理得  $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle DBC}$ ,

即  $\frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)}$ ,

即  $3\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$ ,

化简得  $3(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$ ,

解得  $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即  $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ……5分



$$(III) \text{ 由 } \sin \angle BDC = \sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot \sin \angle BDC = \frac{6\sqrt{3}}{7}. \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(21) (共 15 分)

解: (I) 因为在长方体  $AEBF - GCHD$  中,

三棱锥  $A - GCD$  与三棱锥  $C - AEB$  与三棱锥  $D - HBC$  与三棱锥  $D - ABF$  的

体积都为  $\frac{1}{6}abc$ .

$$\text{所以三棱锥 } A - BCD \text{ 的体积为 } abc - 4 \times \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}abc. \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由已知易求得三棱锥  $A - BCD$  的每个面的三角形的三条边均为

$$\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{b^2 + c^2}, \sqrt{c^2 + a^2}.$$

不妨设  $a \geq b \geq c$ , 各面的最大角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) - (a^2 + b^2)}{2\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{c^2 + a^2}} = \frac{2c^2}{2\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{c^2 + a^2}} > 0$$

又  $\theta \in (0, \pi)$ , 所以各面的最大角为  $\theta$  为锐角.

所以, 三棱锥  $A - BCD$  的每个面都是锐角三角形.  $\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(III) a = b = \sqrt{2}, c = 1. (\text{满足 } a = b = \sqrt{2}c \text{ 或 } a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2 = 0) \dots\dots 4 \text{ 分}$$



## 北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二**>**期末试题**>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

