

北京交大附中 2023—2024 学年第一学期期中练习

高二数学

命题人：贺善菊

审题人：杨冰心

2023.10

说明：本试卷共 6 页，共 150 分，考试时长 120 分钟。

一、选择题（每道小题的四个选项中只有一个答案正确。每道小题 4 分，本大题一共 40 分。）

1. 若书架上放的工具书、故事书、图画书分别是 5 本、3 本、2 本，则随机抽出一本是故事书的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 在空间直角坐标系中，点 $P(1, 2, -3)$ 关于坐标平面 xOy 的对称点为（ ）

- A. $(-1, -2, 3)$ B. $(-1, -2, -3)$
C. $(-1, 2, -3)$ D. $(1, 2, 3)$

3. 若 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) =$ （ ）

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

4. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = 1$ ， $AA_1 = 2$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值等于（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 设 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，且 $m \subset \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则“ $m \perp n$ ”是“ $n \perp \beta$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 A_1D_1 的中点，则点 C_1 到直线 CE 的距离为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 某停车场的停车收费标准如下表所示：

停车收费标准		小型车	大型车
白天 (7:00~19:00)	首小时内	2.5元/15分钟	5元/15分钟
	首小时后	3.75元/15分钟	7.5元/15分钟
夜间[19:00(不含)~次日7:00]		1元/2小时	2元/2小时
注:白天停车收费以15分钟为1个计时单位,夜间停车收费以2小时为1个计时单位,满1个计时单位后方可收取停车费,不足1个计时单位的不收取费用			

李明驾驶家用小轿车于17:30进入该停车场,并于当天21:10驶出该停车场,则李明应缴纳的停车费为

()

- A. 13.5元 B. 27.5元 C. 20元 D. 18.5元

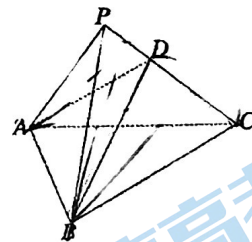
8. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题:在下雨时,用一个圆台形的天池盆接雨水,天池盆盆口直径为二尺八寸,盆底直径为一尺二寸,盆深一尺八寸,若盆中积水深九寸,则平地降雨量是(注:

①平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积;②一尺等于十寸)()

- A. 6寸 B. 4寸 C. 3寸 D. 2寸

9. 如图,棱长均相等的三棱锥 $P-ABC$ 中,点 D 是棱 PC 上的动点(不含端点),设 $CD=x$,锐二面角 $A-BD-C$ 的大小为 θ .当 x 增大时,()

- A. θ 减小 B. θ 增大
C. θ 先减小后增大 D. θ 先增大后减小



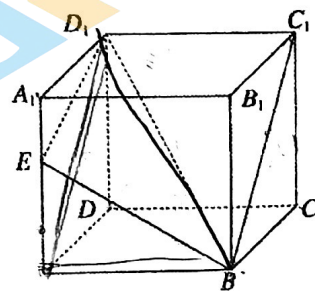
10. 如图,在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 AA_1 上的一个动点,给出下列四个结论:

- ①三棱锥 B_1-BED_1 的体积为定值;
②存在点 E 使得 $B_1D \perp$ 平面 BED_1 ;
③ $D_1E + BE$ 的最小值为 $\sqrt{2} + 1$;
④对每一个点 E ,在棱 DC 上总存在一点 P ,使得 $AP \parallel$ 平面 BED_1 ;
⑤ M 是线段 BC_1 上的一个动点,过点 A_1 的截面 α 垂直于 DM ,则截面 α 的

面积的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

其中正确结论的个数是()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5



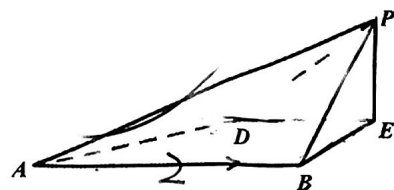
二、填空题（每一道小题 5 分，本题一共 25 分）

11. 已知向量 $a = (-2, 2, -2)$, $b = (-1, 6, -8)$, $c = (\lambda, 0, -6)$, 若 $a \perp c$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$; 若 a, b, c 共面, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, 则 $(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE}) \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$;

13. 设动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上(含内部), 且 $\overrightarrow{D_1P} = \lambda \overrightarrow{D_1B}$, 当 $\angle APC$ 为锐角时, 写出实数 λ 的一个可能的取值 $\underline{\hspace{2cm}}$;

14. 如图, 在四棱锥 $P-ABED$ 中, $DE \parallel AB$, $BE \perp DE$, $AB = 2DE = 2PE = 2$, $BE = \sqrt{3}$, $PE \perp$ 平面 $ABED$, 则异面直线 PB 与 AD 之间的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$;



15. 定义空间中点到几何图形的距离为: 这一点到这个几何图形上各点距离中的最短距离.

(1) 在空间中到定点 O 距离为 1 的点围成的几何体的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

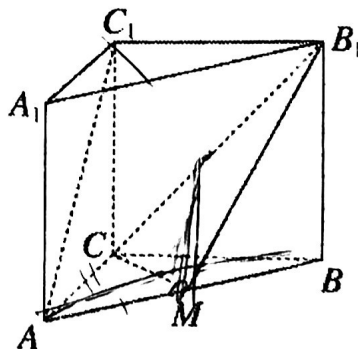
(2) 在空间中, 定义边长为 2 的正方形 $ABCD$ 区域(包括边界以及内部的点)为 Ω , 则到 Ω 距离等于 1 的点所围成的几何体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

16. (12 分) 如图, 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC$, M 为 AB 的中点.

(I) 求证: $CM \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;

(II) 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 CMB_1 .



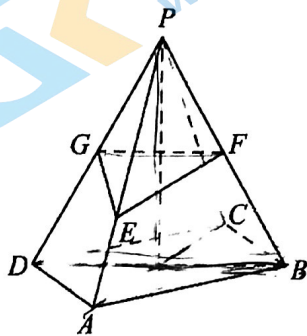
17. (14分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $AC \cap BD = O$, 且 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $PO = 2$, F, G 分别是 PB, PD 的中点, E 是 PA 上一点, 且 $AP = 3AE$.

(1) 求证: $GF \perp PC$;

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 PA 与平面 EFG 所成角的正弦值.

条件①: $BD = 2\sqrt{3}$; 条件②: $\angle DAB = \frac{2\pi}{3}$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答记分.



18. (14分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 4$.

(I) 若 $f(1) = 0$, 解不等式 $f(x) \leq 0$;

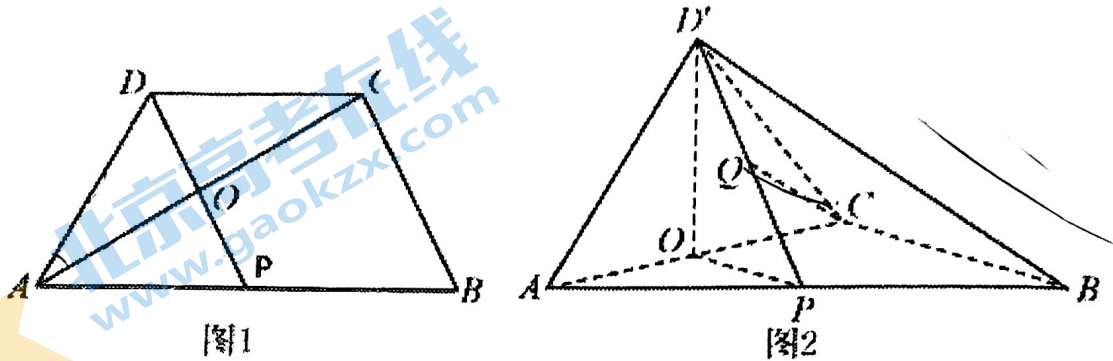
(II) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值, 并分别写出取得最大值与最小值时的 x 的值,

(III) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. (15分) 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2AD = 2CD = 4$, P 为 AB 的中点, 线段 AC 与 DP 交于 O 点 (如图 1). 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起到 $\triangle ACD'$ 位置, 使得平面 $D'AC \perp$ 平面 BAC (如图 2).

(1) 求二面角 $A-BD'-C$ 的余弦值;

(2) 线段 PD' 上是否存在点 Q , 使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$? 若存在, 求出 $\frac{PQ}{PD'}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

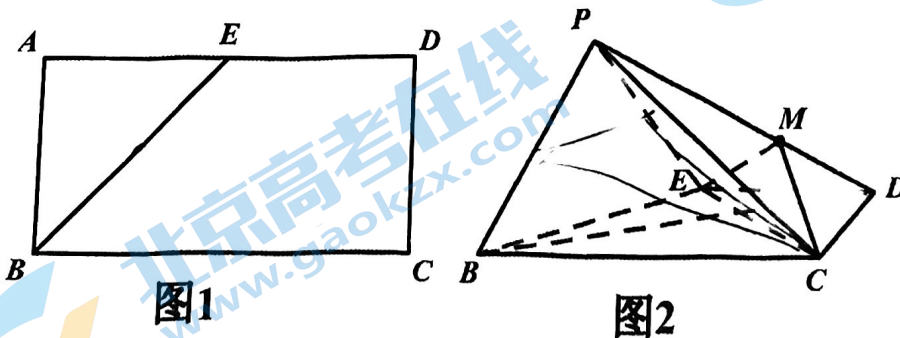


20. (15分) 如图 1, 矩形 $ABCD$, $AB=1$, $BC=2$, 点 E 为 AD 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 折起至平面 $PBE \perp$ 平面 $BCDE$ (如图 2), 点 M 在线段 PD 上, $PB \parallel$ 平面 CEM .

(1) 求证: $MP=2DM$;

(2) 求点 B 到面 PEC 的距离;

(3) 若在棱 PB , PE 分别取中点 F , G , 试判断点 M 与平面 CFG 的关系, 并说明理由.



21. (15分) 给定正整数 $n \geq 2$, 设集合 $M = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$. 对于集合 M 中的任意元素 $\beta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\gamma = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记 $\beta \cdot \gamma = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. 设 $A \subseteq M$,

且集合 $A = \{\alpha_i \mid \alpha_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}), i = 1, 2, \dots, n\}$, 对于 A 中任意元素 α_i, α_j , 若 $\alpha_i \cdot \alpha_j = \begin{cases} p, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$

则称 A 具有性质 $T(n, p)$.

(I) 判断集合 $A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ 是否具有性质 $T(3, 2)$, 说明理由;

(II) 判断是否存在具有性质 $T(4, p)$ 的集合 A , 并加以证明.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

