

东城区 2023—2024 学年度第一学期期末统一检测

高一数学

2024.1

本试卷共 4 页,满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 30 分)

一、选择题:共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \mathbb{N}$, $B = \{x | -2 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(2) 下列函数中,与 $y = x - 1$ 是同一函数的是

- (A) $y = \sqrt[3]{x^3} - 1$ (B) $y = \sqrt{(x-1)^2}$
(C) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ (D) $y = \sqrt{x^2} - 1$

(3) 下列函数在定义域内既是奇函数又是增函数的是

- (A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = 2^x$
(C) $f(x) = -\frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \tan x$

(4) 下列命题中正确的是

- (A) 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) 若 $a < b$, 则 $ac^2 < bc^2$
(C) 若 $a^2 > b^2$, 则 $a > b$ (D) 若 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$, 则 $a > b$

(5) 若 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\cos(\pi - \alpha)$ 的值为

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

(6) 下列函数中,满足对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$ 的是

- (A) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $f(x) = \ln x$
(C) $f(x) = 2x^2$ (D) $f(x) = -x^3$

(7) 已知 $a = 3^{-0.1}$, $b = -\log_{\frac{1}{3}} 5$, $c = \log_{\sqrt{3}} 2$, 则

- (A) $a < b < c$ (B) $b < c < a$ (C) $c < b < a$ (D) $a < c < b$

关注北京高考在线官方微信: **京考一点通** (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

(8)“角 α 与 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称”是“ $\sin(\alpha+\beta)=1$ ”的

- (A)充分而不必要条件 (B)必要而不充分条件
(C)充分必要条件 (D)既不充分也不必要条件

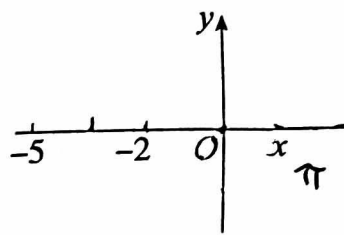
(9)某品牌可降解塑料袋经自然降解后残留量 y 与时间 t (单位:年)之间的关系为 $y=y_0 \cdot e^{kt}$, 其中 y_0 为初始量, k 为降解系数. 已知该品牌塑料袋 2 年后残留量为初始量的 75%. 若该品牌塑料袋需要经过 n 年, 使其残留量为初始量的 10%, 则 n 的值约为(参考数据: $\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477$)

- (A)20 (B)16 (C)12 (D)7

(10)已知 $f(x)$ 是定义在 $[-5, 5]$ 上的偶函数, 当 $-5 \leq x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示,

则不等式 $\frac{f(x)}{\sin x} > 0$ 的解集为

- (A) $(-\pi, -2) \cup (0, 2) \cup (\pi, 5]$ (B) $(-\pi, -2) \cup (2, \pi)$
(C) $[-5, -\pi) \cup (-2, 0) \cup (2, \pi)$ (D) $[-5, -2) \cup (\pi, 5]$



第二部分(非选择题 共 70 分)

二、填空题:共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分。

(11)函数 $y = \ln x + \frac{1}{x+1}$ 的定义域为_____.

(12)已知 $a > 0$, 则 $a + \frac{a+4}{a}$ 的最小值为_____.

(13)已知 $2^x = 3^y = m, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则 $m =$ _____.

(14)在平面直角坐标系中,角 α 的终边不在坐标轴上,则使得 $\tan \alpha < \sin \alpha < \cos \alpha$ 成立的一个 α 值为_____.

(15)已知函数 $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(13 - 3^x)$, 则 $f(2)$ _____ 2 (用“ $>$ ”“ $<$ ”“ $=$ ”填空); $f(x)$ 的零点为_____.

(16)已知符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,若函数 $f(x) = \frac{[x]}{x} (x \neq 0)$, 给出下列四个结论:

①当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = 0$; ② $f(x)$ 为偶函数; ③ $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递减;

④若方程 $f(x) = a$ 有且仅有 3 个根, 则 a 的取值范围是 $(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$.

其中所有正确结论的序号是_____。
关注北京高考在线官方微信:京考一点通(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题:共5小题,共46分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(17)(本小题8分)

设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x + 1 < m\}$.

(I) 求 $\complement_U A$;

(II) 当 $m = 1$ 时, 求 $A \cup B$;

(III) 若 $\forall x \in A$, 都有 $x \in B$, 直接写出一个满足条件的 m 值.

(18)(本小题9分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(4x), & 0 < x < 2, \\ x^2 - 2x - a, & x \geq 2. \end{cases}$

(I) 当 $a = 1$ 时,

① 求 $f(f(1))$ 的值;

② 求 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的交点坐标;

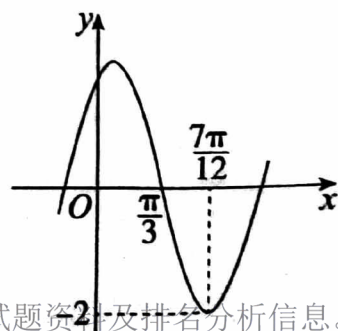
(II) 若 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

(19)(本小题9分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式及单调递减区间;

(II) 当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值及此时 x 的值.



关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

(20)(本小题 12 分)

已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 根据定义证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 并指出 $f(x)$ 在定义域内的单调性;

(III) 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(k-2x^2) + f(x^2-4x-3) > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(21)(本小题 8 分)

某地要建设一座购物中心, 为了减少能源损耗, 计划对其外墙建造可使用 30 年的隔热层, 已知每厘米厚的隔热层的建造成本为 9 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 P

(单位: 万元) 与隔热层厚度 x (单位: cm) 满足关系: $P = \frac{m}{4x+5}$ ($0 \leq x \leq 10$). 若不建隔热

层, 每年能源消耗费用为 6 万元. 设 S 为隔热层建造费用与 30 年的能源消耗费用之和.

(I) 求出 S 关于 x 的函数解析式;

(II) 若使隔热层建造费用与 30 年的能源消耗费用之和 S 控制在 90 万元以内, 隔热层的厚度不能超过多少厘米? (隔热层的厚度为整数)

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

高一数学参考答案及评分标准



一、选择题(共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

- (1)B (2)A (3)A (4)D (5)C
 (6)A (7)D (8)C (9)B (10)C

二、填空题(共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

- (11) $(0, +\infty)$ (12)5
 (13)6 (14) $-\frac{\pi}{4}$ (答案不唯一)
 (15) $< \log_3 12$ (16)①③④

三、解答题(共 5 小题,共 46 分)

(17)(共 8 分)

- 解:(I) $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$, $\complement_U A = \{x \mid x < -2, \text{ 或 } x > 1\}$ 3 分
 (II) 当 $m=1$ 时, $B = \{x \mid x < 0\}$, 则 $A \cup B = \{x \mid x \leq 1\}$ 6 分
 (III) $m=3$ (答案不唯一). 8 分

(18)(共 9 分)

解:(I) 当 $a=1$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(4x), & 0 < x < 2, \\ x^2 - 2x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

① 因为 $f(1) = \log_2 4 = 2$,

所以 $f(f(1)) = f(2) = 2^2 - 4 - 1 = -1$ 2 分

② 由 $\begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(4x) = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases}$ 可得 $x=1$ 或 $x=3$.

故所求的交点坐标为 $(1, 2)$ 或 $(3, 2)$ 4 分

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

(II) 当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) = \log_2(4x) = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$.

因为 $x \in (0, 2)$, 所以 $\log_2 x \in (-\infty, 1)$.

所以当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) \in (-\infty, 3)$.

因为 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} ,

所以 $[3, +\infty) \subseteq \{f(x) \mid f(x) = x^2 - 2x - a, x \geq 2\}$.

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) \geq f(2)$, 即 $f(x) \geq -a$.

所以 $-a \leq 3$, 解得 $a \geq -3$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[-3, +\infty)$ 9 分

(19)(共 9 分)

解:(I) 由图象可知, $A=2$, $\frac{1}{4}T = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, 即 $T = \pi$,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

由图象过点 $(\frac{7\pi}{12}, -2)$ 可知, $2\sin(2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi) = -2$,

所以 $2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 6 分

(II) 因为 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$,

所以 $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi$. 故 $0 \leq \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 1$.

所以 $0 \leq f(x) \leq 2$.

所以当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 0. 9 分
关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

(20)(共 12 分)

解:(I)函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$,

所以当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{-3(-x)}{-x+2} = \frac{3x}{x-2}$.

所以 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x-2}, x < 0, \\ \frac{-3x}{x+2}, x \geq 0. \end{cases}$ 4 分

(II) $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-3x_1}{x_1+2} - \frac{-3x_2}{x_2+2} = \frac{6(x_2-x_1)}{(x_1+2)(x_2+2)}$.

由 $0 \leq x_1 < x_2$,

得 $x_2 - x_1 > 0, x_1 + 2 > 0, x_2 + 2 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上为减函数.

$f(x)$ 在定义域内为减函数. 8 分

(III) 因为 $f(x)$ 为定义域内的奇函数且为减函数,

所以不等式 $f(k-2x^2) + f(x^2-4x-3) > 0$ 恒成立

$\Leftrightarrow f(k-2x^2) > -f(x^2-4x-3)$ 恒成立

$\Leftrightarrow f(k-2x^2) > f(-x^2+4x+3)$ 恒成立.

由于 $f(x)$ 为定义域内的减函数,

所以 $k < x^2 + 4x + 3$ 恒成立.

$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \geq -1$,

所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty, -1)$ 12 分

(21)(共 8 分)

解:(I) 已知隔热层厚度为 x , 则隔热层建造费用为 $9x$.

依题意, 每年的能源消耗费用为 $P = \frac{m}{4x+5} (0 \leq x \leq 10)$,

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

当 $x=0$ 时, $P=6$, 则 $\frac{m}{5}=6$, 得 $m=30$.

所以隔热层建造费用与 30 年的能源消耗费用之和为:

$$S=30P+9x=30 \times \frac{30}{4x+5}+9x=\frac{900}{4x+5}+9x(0 \leq x \leq 10). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由(I)知 $S=\frac{900}{4x+5}+9x < 90$,

$$100+(x-10)(4x+5) < 0, \text{ 即 } 4x^2-35x+50 < 0.$$

$$\text{解得 } \frac{35-\sqrt{425}}{8} < x < \frac{35+\sqrt{425}}{8}.$$

$$\text{由于 } 20 < \sqrt{425} < 21, \text{ 所以 } \frac{7}{4} < \frac{35-\sqrt{425}}{8} < \frac{15}{8}, \frac{55}{8} < \frac{35+\sqrt{425}}{8} < 7.$$

所以若使隔热层建造费用与 30 年的能源消耗费用之和控制在 90 万元以内, 隔热层的厚度不能超过 6 厘米. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



 微信搜一搜

 京考一点通

