

2023 北京朝阳高一（下）期末

数 学

2023. 7

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 计算 $(2i)^2 =$

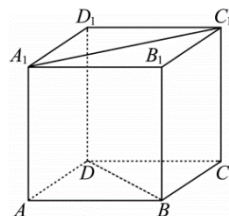
- A. -1 B. -2 C. -4 D. 4

2. 已知 $A(3, 2), B(-5, -1)$, 若 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, 则点 C 的坐标为

- A. $(-1, \frac{1}{2})$ B. $(-1, \frac{3}{2})$ C. $(1, \frac{1}{2})$ D. $(1, \frac{3}{2})$

3. 在如图所示的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1C_1 与 BD 所成角的大小为

- A. 120° B. 90° C. 60° D. 45°



4. 从装有两个红球和两个白球的口袋内任取两个球，则下列事件是对立事件的是

- A. “都是白球”与“至少有一个白球”
B. “恰有一个白球”与“都是红球”
C. “都是白球”与“都是红球”
D. “至少有一个白球”与“都是红球”

5. 已知两条不同直线 a, b 和平面 α , 若 $a \perp \alpha$, 则“ $b \perp \alpha$ ”是“ $a \parallel b$ ”的

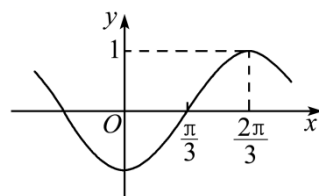
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 甲、乙两人射击，甲的命中率为 0.6，乙的命中率为 0.5，如果甲、乙两人各射击一次，恰有一人命中的概率为

- A. 0.3 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.6

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{\pi}{6}) =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 0 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

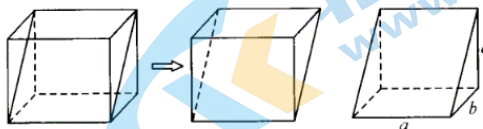


8. 已知一组不全相同的数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的平均数为 \bar{x} , 方差为 s^2 , 在这组数据中加入一个数 \bar{x} 后得到一组新数据，其平均数为 \bar{x}' , 方差为 s'^2 , 则

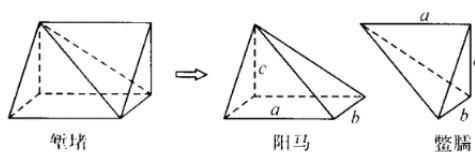
- A. $\bar{x}' > \bar{x}$ B. $s'^2 > s^2$ C. $\bar{x}' < \bar{x}$ D. $s'^2 < s^2$

9. 堑堵、阳马、鳖臑这些名词出自中国古代的数学名著《九章算术·商功》. 如图 1, 把一块长方体分成相同的两块, 得到两个直三棱柱(堑堵). 如图 2, 再沿堑堵的一顶点与相对的棱剖开, 得四棱锥和三棱锥各一个, 以矩形为底, 另有一棱与底面垂直的四棱锥, 称为阳马. 余下的三棱锥是由四个直角三角形组成的四面体, 称为鳖臑. 则图 2 中的阳马与图 1 中的长方体的体积比是

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$



9 题图 1



9 题图 2

10. 设 M 为平面四边形 $ABCD$ 所在平面内的一点, $\overline{MA} = a$, $\overline{MB} = b$, $\overline{MC} = c$, $\overline{MD} = d$.

若 $a + c = b + d$ 且 $a \cdot c = b \cdot d$, 则平面四边形 $ABCD$ 一定是 ()

- A. 正方形 B. 菱形 C. 矩形 D. 梯形

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 复数 $z = 1 + i$ 对应的点为 Z , 则 $|\overline{OZ}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 某地区有高中生 3000 人, 初中生 6000 人, 小学生 6000 人. 教育部门为了了解本地区中小学生的近视率, 采用分层抽样的方法, 按高中生、初中生、小学生进行分层, 如果在各层中按比例分配样本, 总样本量为 150, 那么在高中生中抽取了 人.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 8, b = 7, c = 3$, 则 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$; $\tan(A + C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

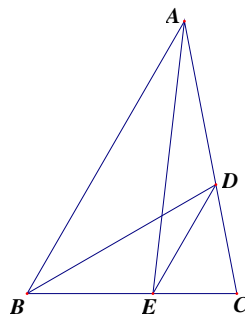
14. 把函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 图象上的所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数

$g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 的一个对称中心坐标为 .

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AB = 4, BC = a$, $\angle B$ 的平分线和 AC 交于 D 点, 点

E 在线段 BC 上, 且满足 $BE : EC = 3 : 2$, 设 $\overline{AE} = k_1 \overline{AB} + k_2 \overline{AC}$ ($k_1, k_2 \in \mathbf{R}$),

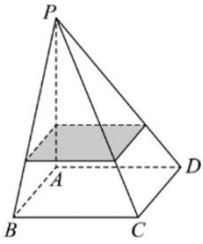
则 $k_1 + k_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $DE \parallel AB$.



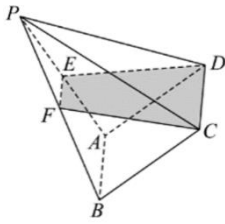
16. 如图 1, 四棱锥 $P-ABCD$ 是一个水平放置的装有一定量水的密闭容器 (容器材料厚度不计), 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 现将容器以棱 AB 为轴向左侧倾斜到图 2 的位置, 这时水面恰好经过 $CDEF$, 其中 E, F 分别为棱 PA, PB 的中点, 在倾斜过程中, 给出以下四个结论:

- ① 没有水的部分始终呈棱锥形

- ② 有水的部分始终呈棱柱形
 ③ 棱 AB 始终与水面所在平面平行
 ④ 水的体积与四棱锥 $P-ABCD$ 体积之比为 $5:8$
 其中所有正确结论的序号为_____.



第 16 题图 1



第 16 题图 2

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. (本小题 13 分)

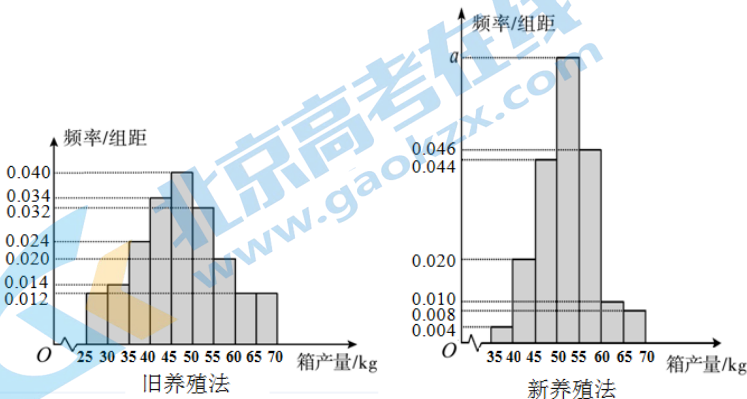
已知函数 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{3} \cos^2 x$.

- (I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
 (II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

18. (本小题 13 分)

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图所示。两种养殖方法的箱产量相互独立。

- (I) 求频率分布直方图中 a 的值;
 (II) 用频率估计概率，从运用新、旧网箱养殖方法的水产品中各随机抽取一个网箱，估计两个网箱的箱产量都不低于 55 kg 的概率;
 (III) 假定新、旧网箱养殖方法网箱数不变，为了提高总产量，根据样本中两种养殖法的平均箱产量，该养殖场下一年应采用哪种养殖法更合适？（直接写出结果）



19. (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$.

(I) 求证: $b = c$;

(II) 在① $ac = \sqrt{3}$; ② $c \sin A = 3$; ③ $c^2 = ab$ 这三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 求 b 和 $\triangle ABC$ 的面积.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

20. (本小题 15 分)

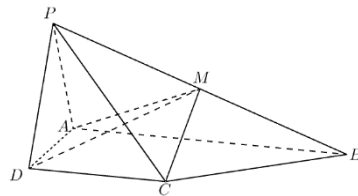
已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $CD = \frac{1}{2} AB$,

平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, M 是 PB 的中点.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;

(II) 求证: $CM \parallel$ 平面 PAD ;

(III) 设棱 PC 与平面 ADM 交于点 N , 求 $\frac{PN}{NC}$ 的值.



21. (本小题 15 分)

设 $m, n \in \mathbf{N}^*$, 已知由自然数组成的集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (a_1 < a_2 < \dots < a_n)$, 集合 S_1, S_2, \dots, S_m 是 S 的互不相同的非空子集, 定义 $n \times m$ 数表:

$$\chi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } x_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \in S_j, \\ 0, & a_i \notin S_j, \end{cases}$$

设 $d(a_i) = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} (i = 1, 2, \dots, n)$, 令 $d(S)$ 是 $d(a_1), d(a_2), \dots, d(a_n)$ 中的最大值.

(I) 若 $m = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, 且 $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 S_1, S_2, S_3 及 $d(S)$;

(II) 若 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, 集合 S_1, S_2, \dots, S_m 中的元素个数均相同, 若 $d(S) = 3$, 求 n 的最小值;

(III) 若 $m = 7$, $S = \{1, 2, \dots, 7\}$, 集合 S_1, S_2, \dots, S_7 中的元素个数均为 3, 且 $S_i \cap S_j \neq \emptyset (1 \leq i < j \leq 7)$, 求证: $d(S)$ 的最小值为 3.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

- (1) C (2) A (3) B (4) D (5) C
(6) C (7) B (8) D (9) B (10) C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

- (11) $\sqrt{2}$ (12) 30 (13) $\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3}$.
(14) (0,0) (答案不唯一) (15) $1, \frac{8}{3}$ (16) ①③④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

(17) (本小题共 13 分)

解：(I) $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}(1 + \cos 2x)$

$$= \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3}$$

$$= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}, \quad T = \pi. \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

(II) 因为当 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$,

所以当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ 时, 即当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,

$f(x)$ 取到最小值, 最小值为 $f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \sqrt{3}$;

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时,

$f(x)$ 取到最大值, 最大值为 $f(\frac{\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 13 \text{分}$

(18) (本小题共 13 分)

解：(I) 由 $5 \times (0.004 + 0.008 + 0.010 + 0.020 + 0.044 + 0.046 + a) = 1$,

所以 $a = 0.068$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(II) 设事件 A 、 B 分别表示：从运用新、旧网箱养殖方法的水产品中随机抽取一个网箱，其箱产量不低于 55kg，用频率估计概率，则 $P(A) = (0.020 + 0.012 \times 2) \times 5 = 0.22$ ， $P(B) = (0.046 + 0.010 + 0.008) \times 5 = 0.32$ 。

因为 A 、 B 相互独立，所以 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.22 \times 0.32 = 0.0704$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

(III) 新养殖法 $\dots\dots\dots 13 \text{分}$

(19) (本小题共 14 分)

解：(I) 由 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ ，根据正弦定理可得 $a = \sqrt{3}b$ 。

又因为 $\angle C = \frac{\pi}{6}$ ，由余弦定理得： $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

将 $a = \sqrt{3}b$ 代入该式，得到 $c^2 = b^2$ ，即 $c = b$ 。 8分

(II) 选① 由 $ac = \sqrt{3}$ ，且 $b = c$ ，

所以 $\sqrt{3}b^2 = \sqrt{3}$ ， $b = 1$ ，则 $c = 1$ 。

由 $\angle C = \frac{\pi}{6}$ 得 $\angle B = \frac{\pi}{6}$ ，则 $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ 。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

选②

根据 $c = b$ ，所以 $\angle C = \angle B = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ 。

因为 $c \sin A = 3$ ，所以 $c = 2\sqrt{3}$ ，即 $b = 2\sqrt{3}$ 。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3} \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

(20) (本小题共 15 分)

解：(I) 因为 $\angle DAB = 90^\circ$ ，所以 $AB \perp AD$ 。

又 $AB \parallel CD$ ，所以 $CD \perp AD$ 。

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD 。 5分

(II) 取 PA 中点 G ，连接 DG, MG ，

因为 M, G 分别是 PB, PA 的中点，

所以 $MG \parallel AB, MG = \frac{1}{2}AB$ 。

又 $AB \parallel CD$ ，

所以 $CD \parallel MG$ 。

因为 $CD = \frac{1}{2}AB$ ，

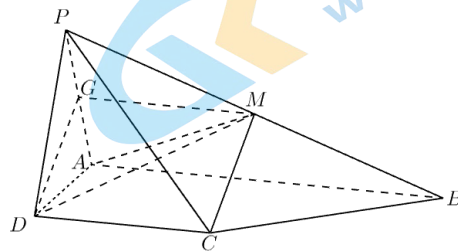
所以 $CD = MG$ 。

所以四边形 $CDGM$ 是平行四边形，

所以 $CM \parallel DG$ 。

且 $DG \subset$ 平面 PAD ， $CM \not\subset$ 平面 PAD ，

所以 $CM \parallel$ 平面 PAD 。 11分



(III) 延长 BC 与 AD 交于点 E , 连接 PE .

因为 $E \in BC, BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $E \in$ 平面 PBC ,

因为 $E \in AD, AD \subset$ 平面 ADM ,

所以 $E \in$ 平面 ADM ,

所以平面 $PBC \cap$ 平面 $ADM = ME$.

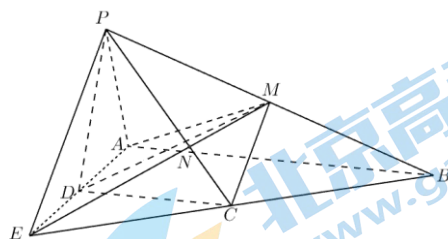
ME 交 PC 于点 N ,

故 N 为 PC 与平面 ADM 的交点.

在 $\triangle PBE$ 中, PC 为 BE 边的中线,

EM 为 PB 边的中线,

所以 $\frac{PN}{NC} = 2$15 分



(21) (本小题共 15 分)

解: (I) $S_1 = \{1, 3\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{1, 2\}$, $d(S) = 2$4 分

(II) 设 $a_i \in S$ 使得 $d(a_i) = d(S) = 3$,

则 $d(a_i) = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} \leq m$,

所以 $m \geq 3$.

所以 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 至少有 3 个元素个数相同的非空子集.

当 $n = 1$ 时, $S = \{1\}$, 其非空子集只有自身, 不符题意.

当 $n = 2$ 时, $S = \{1, 2\}$, 其非空子集只有 $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$, 不符题意.

当 $n = 3$ 时, $S = \{1, 2, 3\}$, 元素个数为 1 的非空子集有 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$,

元素个数为 2 的非空子集有 $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$.

当 $\{S_1, S_2, S_3\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 时, $d(1) = d(2) = d(3) = 1$, 不符题意.

当 $\{S_1, S_2, S_3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ 时, $d(1) = d(2) = d(3) = 2$, 不符题意.

当 $n = 4$ 时, $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 令 $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{1, 3\}, S_3 = \{1, 4\}$,

$$\text{则 } \chi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d(S) = d(1) = 3.$$

所以 n 的最小值为 4.9 分

(III) 由题可知, $S_j = \{i \mid x_{ij} = 1, 1 \leq i \leq 7\}$, 记 $|S_j|$ 为集合 $S_j (j = 1, 2, \dots, 7)$ 中的元素个数,

则 $|S_j| = x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{7j} = 3$ 为数表 χ 第 j 列之和.

因为 $d(i) = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{i7} (i = 1, 2, \dots, 7)$ 为数表 χ 第 i 行之和,

所以 $d(1) + d(2) + \dots + d(7) = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_7| = 3 \times 7 = 21$.

因为 $d(i) \leq d(S) (i=1,2,\dots,7)$ ，所以 $21 = d(1) + d(2) + \dots + d(7) \leq 7d(S)$ 。

所以 $d(S) \geq 3$ 。

当 $S_1 = \{1,2,3\}, S_2 = \{1,4,5\}, S_3 = \{1,6,7\}, S_4 = \{2,4,6\}$,

$S_5 = \{3,4,7\}, S_6 = \{3,5,6\}, S_7 = \{2,5,7\}$ 时，

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d(S) = 3$ 。所以 $d(S)$ 的最小值为 3。.....15 分



北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二**>**期末试题**>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

