北京市东城区2016－2017学年度第二学期高三综合练习(二)

2017.5

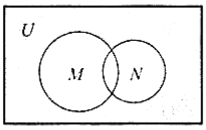
数学(文科)

本试卷共4页，共150分. 考试时长120分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷 (选择题　共40分)

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 已知全集 U 是实数集 $\mathbf{R}$. 右边的韦恩图表示集合 $M=\{x|x>2\}$ 与 $N=\{x|1<x<3\}$ 的关系，那么阴影部分所表示的集合可能为



A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$

C. $\{x|x>3\}$　　D. $\{x|x\leqslant 1\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,4)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 x 的值为

A. -2　　B. -4　　C. -8　　D. -16

3. 下列函数既是奇函数，又在区间$[-1,1]$上单调递减的是

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=|x+1|$　　C. $f(x)=-x$　　D. $f(x)=\cos x$

4. 在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x+y\leqslant 2, \\ x\leqslant y \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，那么“$x>y$”的充分必要条件是

A. $2^x>2^y$　　B. $\lg x>\lg y$　　C. $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$　　D. $x^2>y^2$

6. 已知直线 $x+y=m(m>0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 P,Q 两点，且 $\angle POQ=120^\circ$(其中 O 为原点)，那么 m 的值是

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

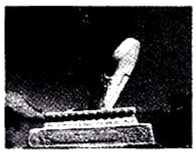
7. 日晷是中国古代利用日影测得时刻的一种计时工具，又称“日规”. 通常由铜制的指针和石制的圆盘组成，铜制的指针叫做“晷针”，垂直地穿过圆盘中心，石制的圆盘叫做“晷面”，它放在石台上，其原理就是利用太阳的投影方向来测定并划分时刻. 利用日晷计时的方法是人类在天文计时领域的重大发明，这项发明被人类沿用达几千年之久. 下图是一位游客在故宫中拍到的一个日晷照片，假设相机镜头正对的方向为正方向，则根据图片判断此日晷的侧(左)视图可能为


A


B


C


D



8. 已知甲、乙两个容器，甲容器容量为 x，装满纯酒精，乙容器容量为 z，其中装有体积为 y 的水（$x, y<z$，单位：L）。现将甲容器中的液体倒入乙容器中，直至甲容器中液体倒完或乙容器盛满，搅拌使乙容器中两种液体充分混合，再将乙容器中的液体倒入甲容器中直至倒满，搅拌使甲容器中液体充分混合，如此称为一次操作，假设操作过程中溶液体积变化忽略不计。设经过 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次操作之后，乙容器中含有纯酒精 a_n（单位：L），下列关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是

A. 当 $x=y=a$ 时，数列 $\{a_n\}$ 有最大值 $\frac{a}{2}$

B. 设 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{b_n\}$ 为递减数列

C. 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，始终有 $a_n\leqslant\frac{xy}{z}$

D. 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\leqslant\frac{xy}{x+y}$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知△ABC 三内角 A, B, C 对应的边长分别为 a, b, c，且 $B=\frac{2\pi}{3}$，又边长 $b=3c$，那么 $\sin C=$ ____.

10. 已知 $\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-ni$，其中 n 是实数，i 是虚数单位，那么 $n=$ ____.

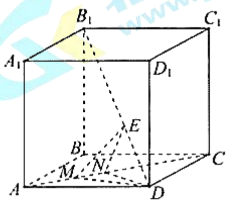
11. 下面茎叶图记录了甲、乙两班各六名同学一周的课外阅读时间（单位：小时），已知甲班数据的平均数为 13，乙班数据的中位数为 17，那么 x 的位置应填____，y 的位置应填____.

甲		乙
8　9	0	7　6
3　x　5	1	9　y　6
0	2	1

12. 已知双曲线 G 以原点 O 为中心，过点 $(\sqrt{5}, 4)$，且以抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为右顶点，那么双曲线 G 的方程为____.

13. 已知函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点在区间 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内，那么 $k=$ ____.

14. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为对角线 B_1D 上的一点，M, N 为对角线 AC 上的两个动点，且线段 MN 的长度为 1.



（1）当 N 为对角线 AC 的中点且 $DE=\sqrt{2}$ 时，则三棱锥 $E-DMN$ 的体积是____；

（2）当三棱锥 $E-DMN$ 的体积为 $\frac{1}{3}$ 时，则 $DE=$ ____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15.(本小题 13 分)

在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=-2$,$a_{12}=20$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项 a_n;

(Ⅱ)若 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,求数列$\{3^{b_n}\}$的前 n 项和.

16.(本小题 13 分)

函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(A>0,\omega>0)$的最大值为 2,它的最小正周期为 2π.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$的解析式;

(Ⅱ)若 $g(x)=\cos x\cdot f(x)$,求 $g(x)$在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

17.(本小题 13 分)

某单位附近只有甲、乙两个临时停车场,它们各有 50 个车位,为了方便市民停车,某互联网停车公司对这两个停车场,在某些固定时刻的剩余停车位进行记录,如下表:

停车场＼时间	8 点	10 点	12 点	14 点	16 点	18 点
甲停车场	10	3	12	6	12	17
乙停车场	13	4	3	2	6	19

如果表中某一时刻剩余停车位数低于该停车场总车位数的 10%,那么当车主驱车抵达单位附近时,该公司将会向车主发出停车场饱和警报.

(Ⅰ)假设某车主在以上六个时刻抵达单位附近的可能性相同,求他收到甲停车场饱和警报的概率;

(Ⅱ)从这六个时刻中任选一个时刻,求甲停车场比乙停车场剩余车位数少的概率;

(Ⅲ)当乙停车场发出饱和警报时,求甲停车场也发出饱和警报的概率.

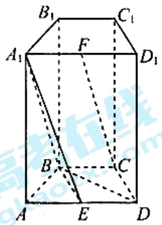
18.（本小题 14 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 ADD_1A_1 和侧面 CDD_1C_1 都是矩形，$BC/\!/AD$，$\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形，E,F 分别为 AD、A_1D_1 的中点.

（Ⅰ）求证：$DD_1\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求证：平面 $A_1BE\perp$ 平面 ADD_1A_1；

（Ⅲ）若 $CF/\!/$ 平面 A_1BE，求棱 BC 的长度.



19.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=(x-a)\cdot e^x$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，试求 $f(x)$ 的单调增区间；

（Ⅱ）试求 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，求证：对于 $\forall x\in[-5,+\infty)$，$f(x)+x+5\geqslant-\dfrac{6}{e^5}$ 恒成立.

20.（本小题 14 分）

已知椭圆 E：$mx^2+y^2=1(m>0)$.

（Ⅰ）若椭圆 E 的右焦点坐标为 $(\sqrt{3},0)$，求 m 的值；

（Ⅱ）由椭圆 E 上不同三点构成的三角形称为椭圆的内接三角形. 若以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆 E 的内接等腰直角三角形恰有三个，求 m 的取值范围.

北京市东城区 2016—2017 学年度第二学期高三综合练习(二)

2017.5

高三数学(文科)参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1.D 2.C 3.C 4.A 5.A 6.B 7.D 8.D

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

9.$\frac{\sqrt{3}}{6}$ 10.$\frac{1}{2}$ 11.3,8 12.$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 13.5 14.$\frac{\sqrt{3}}{9}$;$\sqrt{6}$

注:两个空的填空题第一个空填对得 3 分,第二个空填对得 2 分.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 80 分)

15.(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $a_n=-2+(n-1)d$,

所以 $a_{12}=-2+11d=20$.

于是 $d=2$,

所以 $a_n=2n-4$. ………………………………………… 6 分

(Ⅱ)因为 $a_n=2n-4$,

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(2n-6)}{2}=n(n-3)$.

于是 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=n-3$,

令 $c_n=3^{b_n}$,则 $c_n=3^{n-3}$.

显然数列$\{c_n\}$是等比数列,且 $c_1=3^{-2}$,公比 $q=3$,

所以数列$\{3^{b_n}\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{c_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{3^n-1}{18}$. ……………… 13 分

16.(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)由已知 $f(x)$最小正周期为 2π,

所以$\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$,解得 $\omega=1$.

因为 $f(x)$的最大值为 2,

所以 $A=2$.

所以 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$. ……………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})=2\sin x\cos\frac{\pi}{6}+2\cos x\sin\frac{\pi}{6}$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x$,

所以 $g(x)=\cos x\cdot f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

因为$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

于是，当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，$g(x)$取得最大值$\frac{3}{2}$；

当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即$x=-\frac{\pi}{6}$时，$g(x)$取得最小值0. ……………… 13分

17.（本小题13分）

解：（Ⅰ）事件"该车主收到甲停车场饱和警报"只有10点这一种情况，该车主抵达单位共有六种情况，

所以该车主收到甲停车场饱和警报的概率为$P=\frac{1}{6}$. ……………………… 4分

（Ⅱ）事件"甲停车场比乙停车场剩余车位数少"有8点、10点、18点三种情况，一共有六个时刻，

所以甲停车场比乙停车场剩余车位数少的概率为$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. …………… 9分

（Ⅲ）事件"乙停车场发出饱和警报"有10点、12点、14点三种情况，

事件"甲停车场也发出饱和警报"只有10点一种情况，

所以当乙停车场发出饱和警报时，甲停车场也发出饱和警报的概率为$P=\frac{1}{3}$. …

……………………………………………………………………………… 13分

18.（本小题14分）

证明：（Ⅰ）因为侧面ADD_1A_1和侧面CDD_1C_1都是矩形，

所以$DD_1\perp AD$，且$DD_1\perp CD$.

因为$AD\cap CD=D$，

所以$DD_1\perp$平面$ABCD$. ……………………………………………………… 4分

（Ⅱ）因为$\triangle ABD$是正三角形，且E为AD中点，

所以$BE\perp AD$.

因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，

而$BE\subset$平面$ABCD$，

所以$BE\perp DD_1$.

因为$AD\cap DD_1=D$，

所以$BE\perp$平面ADD_1A_1.

因为$BE\subset$平面A_1BE，

所以平面$A_1BE\perp$平面ADD_1A_1. ……………………………………… 10分

解：（Ⅲ）因为$BC\parallel AD$，

而F为A_1D_1的中点，

所以$BC\parallel A_1F$.

所以B,C,F,A_1四点共面.

因为$CF\parallel$平面A_1BE，

而平面$BCFA_1\cap$平面$A_1BE=A_1B$，

所以$CF\parallel A_1B$.

所以四边形 $BCFA_1$ 是平行四边形.

所以 $BC=FA_1=\frac{1}{2}AD=1$. …………………………………………………… 14 分

19.(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)由 $f(x)=(x-a)\cdot e^x$,得 $f'(x)=(x-a+1)\cdot e^x$.

当 $a=1$ 时,$f'(x)=x\cdot e^x$,令 $f'(x)>0$,得 $x>0$,

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$. …………………………………………… 4 分

(Ⅱ)令 $f'(x)=0$,得 $x=a-1$.

所以当 $a-1\leqslant 1$ 时,$x\in[1,2]$ 时 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立,$f(x)$ 单调递增;

当 $a-1\geqslant 2$ 时,$x\in[1,2]$ 时 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,$f(x)$ 单调递减;

当 $1<a-1<2$ 时,$x\in[1,a-1)$ 时 $f'(x)\leqslant 0$,$f(x)$ 单调递减;

$x\in(a-1,2)$ 时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

综上,无论 a 为何值,当 $x\in[1,2]$ 时,$f(x)$ 最大值都为 $f(1)$ 或 $f(2)$.

$f(1)=(1-a)e$,$f(2)=(2-a)e^2$,

$f(1)-f(2)=(1-a)e-(2-a)e^2=(e^2-e)a-(2e^2-e)$.

所以当 $a\geqslant\frac{2e^2-e}{e^2-e}=\frac{2e-1}{e-1}$ 时,$f(1)-f(2)\geqslant 0$,$f(x)_{max}=f(1)=(1-a)e$.

当 $a<\frac{2e^2-e}{e^2-e}=\frac{2e-1}{e-1}$ 时,$f(1)-f(2)<0$,$f(x)_{max}=f(2)=(2-a)e^2$. ……

……………………………………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)令 $h(x)=f(x)+x$,

所以 $h'(x)=xe^x+1$.

所以 $h''(x)=(x+1)e^x$.

令 $h''(x)=(x+1)e^x=0$,

解得 $x=-1$,

所以当 $x\in[-5,-1)$ 时,$h''(x)<0$,$h'(x)$ 单调递减;

当 $x\in[-1,+\infty)$ 时,$h''(x)>0$,$h'(x)$ 单调递增.

所以当 $x=-1$ 时,$h'(x)_{min}=h'(-1)=1-\frac{1}{e}>0$.

所以函数 $h(x)$ 在 $[-5,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)\geqslant h(-5)=-\frac{6}{e^5}-5$.

所以 $\forall x\in[-5,+\infty)$,$f(x)+x+5\geqslant-\frac{6}{e^5}$ 恒成立. ……………………… 13 分

20.(本小题 14 分)

解:(Ⅰ)椭圆 E 的方程可以写成 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+y^2=1$,因为焦点 $(\sqrt{3},0)$ 在 x 轴上,

所以 $a^2=\frac{1}{m}$,$b^2=1$,

$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{m}-1=\sqrt{3}^2=3$,求得 $m=\frac{1}{4}$. ………………………………… 4 分

（Ⅱ）设椭圆 E 内接等腰直角三角形的两直角边分别为 BA，BC，设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$

显然 BA 与 BC 不与坐标轴平行，且 $k_{BA}\cdot k_{BC}=-1<0$，

所以可设直线 BA 的方程为 $y=kx+1(k>0)$，则直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+1$，

由 $\begin{cases} mx^2+y^2=1, \\ y=kx+1 \end{cases}$ 消去 y 得到 $(m+k^2)x^2+2kx=0$，

所以 $x_1=\frac{-2k}{m+k^2}$.

求得 $|BA|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-0|=\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{|-2k|}{m+k^2}=\frac{2k}{m+k^2}\sqrt{k^2+1}$，

同理可求 $|BC|=\sqrt{(-\frac{1}{k})^2+1}\cdot|x_2-0|=\sqrt{(-\frac{1}{k})^2+1}\cdot\frac{|-2(-\frac{1}{k})|}{m+(-\frac{1}{k})^2}=\frac{2}{mk^2+1}\sqrt{k^2+1}$，

因为△ABC 为以 $B(0,1)$ 为直角顶点的等腰直角三角形，

所以 $|BA|=|BC|$.

所以 $\frac{2k}{m+k^2}\sqrt{k^2+1}=\frac{2}{mk^2+1}\sqrt{k^2+1}$.

整理得 $mk^3-k^2+k-m=0$，所以 $(mk^3-m)-(k^2-k)=0$，$m(k^3-1)-(k^2-k)=0$.

由此 $m(k-1)(k^2+k+1)-k(k-1)=0$，$(k-1)[mk^2+(m-1)k+m]=0$，

所以 $k=1$ 或 $mk^2+(m-1)k+m=0$.

设 $f(k)=mk^2+(m-1)k+m$，

因为以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆内接等腰直角三角形恰有三个，

所以关于 k 的方程 $mk^2+(m-1)k+m=0$ 有两个不同的正实根 x_1，x_2，且都不为 1.

所以 $\begin{cases} f(1)\neq0\Rightarrow m+(m-1)+m\neq0\Rightarrow m\neq\frac{1}{3}, \\ x_1+x_2>0\Rightarrow-\frac{m-1}{m}>0\Rightarrow0<m<1, \\ x_1\cdot x_2>0\Rightarrow1>0,\text{恒成立}, \\ \Delta>0\Rightarrow\Delta=(m-1)^2-4m^2>0\Rightarrow-1<m<\frac{1}{3}. \end{cases}$

解得实数 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{3})$. ………………………………………………… 14 分

扫描二维码，关注北京高考官方微信！

查看更多北京高考相关资讯！