

人大附中 2021 届高三(上)数学统练二 2019. 10. 29

一、选择题(共 8 小题, 每小题 5 分共 40 分, 每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 双曲线的一条渐近线是 $y=2x$, 焦点在 x 轴上并且满足实轴比虚轴短 2 个单位, 则这条双曲线的标准方程为

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中有连续三项依次可以表示为 $a-1, 2a+3, 4a+1$, 则这个等差数列的公差为

A. 2 B. 5 C. 6 D. 10

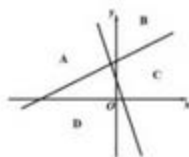
3. 在平面直角坐标系中, 椭圆焦点 F_1, F_2 在 y 轴上, 满足 $|F_1F_2| = 4$. 若点 P 是椭圆上一点, $\triangle F_1F_2P$ 的周长为 12, 则椭圆标准方程为

A. $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{25} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

4. 如图, 直线 $x-2y+4=0, 3x+y-1=0$ 相交将平面 xOy 分成了 A, B, C, D 四个区域(均不含边界), 则约束条件

$$\begin{cases} x-2y+4 > 0 \\ 3x+y-1 < 0 \end{cases}$$
 对应的可行域是

A. A 区域 B. B 区域 C. C 区域 D. D 区域



5. 抛物线 C 的顶点在原点, 焦点在坐标轴上. 点 $A(3, 5)$ 到抛物线准线的距离为 6, 则抛物线 C 的焦点到准线的距离为

A. 1 或 3 B. 2 或 6 C. 4 或 12 D. 8 或 24

6. 下列条件中, 可以作为 $a > b$ 的充分条件的有几个

① $a^2 > b^2$ ② $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ③ $\pi^a > \pi^b$ ④ $\log_a 2 > \log_b 2$

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

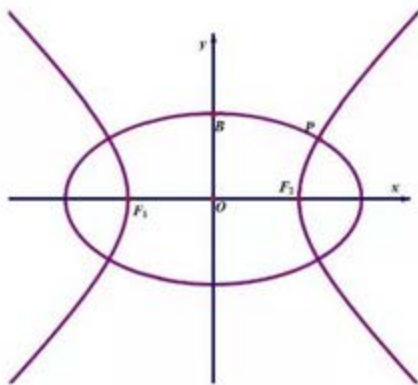
7. 已知非常数等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$, 如果对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$a_n = \log_x b_n + y,$$
 则 $x+y$ 的值为

A. $1+\sqrt{3}$ B. 4 C. $2+\sqrt{3}$ D. 5

8. 如图, 椭圆 C_1 的焦点与双曲线 C_2 的焦点重合, C_1 的短轴与 C_2 的虚轴也重合. 若 C_1 、 C_2 在第一象限内的交点为 P , 且 P 到 x 轴的距离是椭圆焦距的 $\frac{1}{4}$. 则双曲线 C_2 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3



二、填空题(共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $b = 2\sqrt{3}-1$, 则 a, b 的大小关系为: a _____ b

10. 若椭圆的两个短轴端点和两个焦点可以构成一个正方形的四个顶点, 则这个椭圆的离心率为 _____

11. 我国明代数学著作《算法统宗》中有这样一道问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?” 意思是说, 一座七层宝塔一共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中, 下一层的灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的最上层灯的盏数为 _____

12. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{9\cos^2 \alpha}$ 的最小值为 _____, 此时角 α 的值为 _____

13. $n \in \mathbb{N}^*$, 对于数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 定义函数 $f_n(x) = x^2 - 2a_n x + b_n$. 当 $n \geq 2$ 时, 满足函数 $f_n(x)$ 与 x 轴有两个交点, 且 a_{n-1}, a_{n+1} 分别是两个交点的横坐标. 若 $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, 并用 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{100} =$ _____

14. 已知点 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点, 点 P 是双曲线上一点, 满足 $\triangle PF_1F_2$ 是钝角三角形, 则点 P 横坐标的取值范围为 _____

三、解答题(共 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分)

15. (1) 对于正整数 n , 试比较 $\frac{1}{(n+1)^2}$ 与 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 的大小.

(2) 使用数学归纳法证明: 对于 $n > 1, n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 总有 $a_{n+1} = 2a_n - 2^{n+2}$.

(1) 求证: $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是一个等差数列;

(2) 记数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 如果 $\{a_n\}$ 是个递减数列, 求 a 的取值范围.

17. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 l 与 C 交于 A, B 两个点 (A 在 y 轴上方), l 与 x 轴交于点 D .

(1) 若 l 的斜率为 $\frac{4}{3}$, 且 $\overline{AD} = 2\overline{DB}$, 求 $|AB|$.

(2) 若 D 的坐标为 $(6, 0)$, 且 $\overline{AF} \perp \overline{BF}$, 求 l 的方程

四、附加题（选做，满分13分，计入附加分）

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，点 D 为椭圆 C 的左顶点，对于实数 $\lambda > 0$ ，和 x 轴上的点 $M(m,$

$0)$ ， $-2 < m < 2$ ，若存在过 M 的直线 l 与椭圆交于点 A, B ，使得 $S_{\triangle AOB} = \lambda S_{\triangle AOD}$ ，则称点 M 为椭圆 C 的一个“ λ 分点”。

(1) 过点 $(1, 0)$ 作直线 $l \perp x$ 轴，验证点 $(1, 0)$ 是椭圆 C 的一个“1分点”；

(2) 证明点 $(1, 0)$ 不是椭圆 C 的“2分点”；

(3) 如果点 M 是椭圆 C 的一个“2分点”，请直接写成 m 的取值范围。