2023 北京三十五中高二（上）期中

数　　学

2023.11

行政班______教学班_____姓名______学号

试卷说明：试卷分值 150，考试时间 120 分钟.

I 卷

一．选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分。每小题只有一个正确选项，**请选择正确答案填在机读卡相应的题号处**）

1．过点 $(1,0)$ 且与直线 $x-2y-2=0$ 垂直的直线方程是（　）

A. $x-2y-1=0$　　B. $x-2y+1=0$

C. $x+2y-1=0$　　D. $2x+y-2=0$

2．若 $\boldsymbol{a}=(x,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,y,6)$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则（　）

A. $x=1, y=-2$　　B. $x=1, y=2$

C. $x=\frac{1}{2}, y=-2$　　D. $x=-1, y=-2$

3．圆 $x^2+y^2+2y=1$ 的半径为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

4．椭圆 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$ 的焦点坐标为（　）

A. $(5,0)$，$(-5,0)$　　B. $(3,0)$，$(-3,0)$

C. $(0,5)$，$(0,-5)$　　D. $(0,3)$，$(0,-3)$

5．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则棱 BB_1 到面 AA_1C_1C 的距离为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$　　B. a　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　D. $\sqrt{2}a$

6. 直线 $\sqrt{3}x+y-2=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得到的弦长为（　）

A．1

B．$2\sqrt{3}$

C．$2\sqrt{2}$

D．2

7. 已知平面α,β，直线l,b，如果$\alpha\perp\beta$，且$\alpha\cap\beta=l$，$M\in\alpha$，$M\in b$，则$l\perp b$是$b\perp\beta$的（ ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 圆$x^2+y^2=1$与直线$x\sin\theta+y-1=0$的位置关系为（ ）

A．相交　B. 相切　C. 相离　D. 相切或相交

9. 已知圆O_1的方程为$x^2+y^2=4$，圆O_2的方程为$(x-a)^2+y^2=1$. 如果这两个圆有且只有一个公共点，那么a的所有取值构成的集合是（ ）

A．$\{1,-1\}$　B．$\{3,-3\}$　C．$\{1,-1,3,-3\}$　D．$\{5,-5,3,-3\}$

10. 在空间直角坐标系$O-xyz$中，已知$\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x,y,z)$，其中$x^2+y^2+z^2=1$，则$|\boldsymbol{b}|$的最大值为（ ）

A. 3　B. $1+\sqrt{5}$　C. $\sqrt{10}$　D. 4

II 卷

二．填空题（共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，请将正确答案填在答题卡相应的题号处.）

11. 已知两条直线$ax-y-2=0$和$(a+2)x-y+1=0$互相垂直，则a等于__________.

12. 已知正三角形ABC的边长为 4，则以点B,C为焦点，经过点A的椭圆标准方程为________________.

13. 点$P_1(5,4)$关于直线$l:x+y-1=0$的对称点为P_2，则点P_2的坐标为__________.

14. 已知$M=\left\{(x,y)\mid x-\sqrt{3}=\sqrt{2y-y^2}\right\}$，$N=\left\{(x,y)\mid y=\sqrt{3}x+b,b\in\mathbf{R}\right\}$，若$M\cap N\neq\varnothing$，则$b$的取值范围是__________.

15. 已知曲线$C:x^2+y^2=2a|x|+2y$，下列说法正确的有__________.

① 曲线C关于y轴对称；

② 存在a，使得曲线C与坐标轴的交点个数为 3；

③ 曲线C围成的区域面积$S(a)$是关于a的增函数；

④ 当$a\neq0$时，直线$l:y=4ax$与曲线C有且仅有 2 个交点.

三．解答题（共 6 个小题，共 85 分，请将详细解答过程写在答题卡相应的位置.）

16. 已知两定点$M(1,3)$、$N(3,1)$，动点P满足条件______________，求动点P的轨迹方程. 请从下列条件中任选一个补充到横线上，并在此条件下完成题目.

条件①：直线PM与直线PN垂直；

条件②：点P到M、N两点距离平方之和为 20；

条件③：直线PM与直线PN斜率之积为 4.

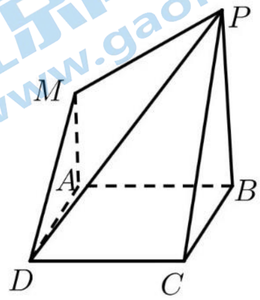
（注：如果选择的条件不符合要求，计 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别作答，按第一个解答计分）

17. 在平面直角坐标系中，已知 $A(-3,7), B(2,2), C(5,1)$，线段 AC 的中点为 M.

（I）求过点 M 与直线 BC 平行的直线方程；

（II）求△ ABC 的面积.

18. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$MA \parallel PB$，$MA \perp BC$，$AB \perp PB$，$MA=1$，$AB=PB=2$.



（I）求证：$PB \perp$ 平面 $ABCD$；

（II）求直线 PC 与平面 PDM 所成角的正弦值.

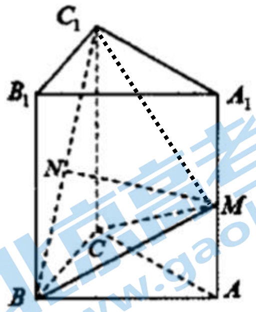
19. 已知圆 C 经过坐标原点 O 和点 $(2,2)$，且圆心在 x 轴上.

（I）求圆 C 的方程；

（II）直线 l_1 经过点 $A(4,1)$，且 l_1 与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l_1 的方程；

（III）直线 l_2 经过点 $A(4,1)$，且 l_2 与圆 C 相切，求直线 l_2 的方程.

20. 如图：在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，$\angle ACB=90°$，M 是 AA_1 的中点，N 是 BC_1 的中点.



（I）求证：$MN\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（II）求：二面角 $B\text{-}C_1M\text{-}A_1$ 的余弦值；

（III）在线段 BC_1 上是否存在点 P，使得点 P 到平面 MBC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

若存在求此时 $\dfrac{BP}{BC_1}$ 的值，若不存在请说明理由.

21. 对任意正整数 n，记集合 $A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{N}, a_1+a_2+\cdots+a_n=n\}$，

$B_n=\{(b_1,b_2,\cdots,b_n)\,|\,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{N}, b_1+b_2+\cdots+b_n=2n\}$.

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in B_n$，若对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有 $a_i\le b_i$，则记 $\alpha<\beta$.

（I）写出集合 A_2 和 B_2；

（II）证明：对任意 $\alpha\in A_n$，存在 $\beta\in B_n$，使得 $\alpha<\beta$；

（III）设集合 $S_n=\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha\in A_n,\beta\in B_n,\alpha<\beta\}$. 求证：$S_n$ 中的元素个数是完全平方数.

参考答案

I 卷

一．选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分。每小题只有一个正确选项）

1-5．DAABC　　6-10. BBDCD

II 卷

二．填空题（共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，请将正确答案填在答题卡相应的题号处.）

11. -1　　12. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$或$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$　　13. (-3, -4)

14. [-4, -1]　　15. ①③④

三．解答题（共 6 个小题，共 85 分，请将详细解答过程写在答题卡相应的位置.）

16．(10 分)

解 1 选择条件①

设点 P 的坐标为（x，y）

∵直线 PM 与直线 PN 垂直

法一：当 $x\neq 1, x\neq 3$ 时，$k_{PM}=\frac{y-3}{x-1}, k_{PN}=\frac{y-1}{x-3}$，则 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-1$

即 $\frac{y-3}{x-1}\cdot\frac{y-1}{x-3}=-1$

化简得 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$

当 $x=1$ 时，此时易知 $y=1$，点 P 的坐标为（1，1），满足上述方程

当 $x=3$ 时，此时易知 $y=3$，点 P 的坐标为（3，3），满足上述方程

经检验：点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$（M，N 除外）

法二：$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=0$，$\overrightarrow{MP}=(x-1,y-3)$，$\overrightarrow{NP}=(x-3,y-1)$

则 $(x-1)(x-3)+(y-3)(y-1)=0$

化简得 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$

解 2 选择条件②

设点 P 的坐标为（x，y）

∵P 到两定点 $M(1,3), N(3,1)$ 的距离平方和为 20

∴$PM^2+PN^2=20$ 即 $(x-1)^2+(y-3)^2+(x-3)^2+(y-1)^2=20$

化简得 $x^2+y^2-4x-4y=0$

经检验所求轨迹方程为 $x^2+y^2-4x-4y=0$

解 3 选择条件③

设点 P 的坐标为（x，y）$(x \neq 1, x \neq 3)$

$\because$ 直线 PM 与直线 PN 斜率之积为 4

$\therefore k_{PM} = \dfrac{y-3}{x-1}, k_{PN} = \dfrac{y-1}{x-3}$，则 $k_{PM} \cdot k_{PN} = 4$

即 $\dfrac{y-3}{x-1} \cdot \dfrac{y-1}{x-3} = 4$

化简得 $4x^2 - y^2 - 16x + 4y + 9 = 0$

经检验所求轨迹方程为 $4x^2 - y^2 - 16x + 4y + 9 = 0 \ (x \neq 1, x \neq 3)$

17．(13 分)

（I）$\because A(-3,7), C(5,1)$，

$\therefore AC$ 的中点坐标 $M(1,4)$，又直线 BC 的斜率 $k = \dfrac{1-2}{5-2} = -\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$ 过 M 点和直线 BC 平行的直线方程为 $y-4 = -\dfrac{1}{3}(x-1)$，即 $x+3y-13=0$

（II）由（I）可知 BC 的斜率 $k = -\dfrac{1}{3}$，

直线 BC 的方程为 $y-2 = -\dfrac{1}{3}(x-2)$，即 $x+3y-8=0$，

$\therefore$ 点 A 到直线 BC 的距离 $d = \dfrac{|-3+3\times 7-8|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \sqrt{10}$，

又 B、C 两点间距离 $|BC| = \sqrt{(5-2)^2+(1-2)^2} = \sqrt{10}$，

$\therefore \Delta ABC$ 的面积 $S = \dfrac{1}{2}\times|BC|\times d = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10} = 5$

18. (14 分)

证明：（I）$\because MA \perp BC$，$MA // PB$，$\therefore PB \perp BC$，

$\because AB \perp PB$，$AB \cap BC = B$，AB、$BC \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PB \perp$ 平面 $ABCD$.

（II）$\because PB \perp$ 平面 $ABCD$，

$AB \subset$ 平面 $ABCD$，$AD \subset$ 平面 $ABCD$，

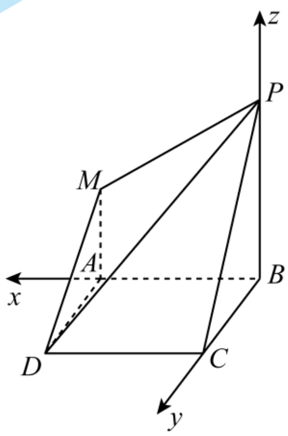
$\therefore PB \perp AB$，$PB \perp AD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB \perp BC$.

$\therefore BA$、BC、BP 两两垂直

如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$，



则 $P(0,0,2)$，$M(2,0,1)$，$C(0,2,0)$，$D(2,2,0)$，

$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{PM}=(2,0,-1)$

设平面 PDM 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y-2z=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $x=1$，$y=-1$.于是 $\boldsymbol{u}=(1,1,2)$.

平面 PDM 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(1,1,2)$

设直线 PC 与平面 PDM 所成的角为 θ，

$\therefore \sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{u}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{u}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\boldsymbol{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

$\therefore$直线 PC 与平面 PDM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

19. (14 分)

（I）设圆 C 的圆心坐标为 $(a,0)$，

依题意，有 $|a|=\sqrt{(a-2)^2+2^2}$，

即 $a^2=a^2-4a+8$，解得 $a=2$，

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.

（II）依题意，圆 C 的圆心到直线 l_1 的距离为 1，

设直线 l_1 方程为 $y-1=k(x-4)$，

即 $kx-y-4k+1=0$，则 $\dfrac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k_1=\dfrac{4}{3}$，$k_2=0$，

$\therefore$直线 l_1 的方程为 $y-1=0$ 或 $4x-3y-13=0$.

（III）圆心 C（2，0）半径 r=2

$\because$直线 l_2 过点 $A(4,1)$ 与圆 C 相切

① 当直线斜率不存在时，即直线 x=4，则圆心 C 到直线 l_2 的距离 d=2=r

此时直线 l_2 与圆 C 相切，符合题意

② 当直线斜率存在时，设直线 l_2：$y-1=k(x-4)$ 即 $kx-y-4k+1=0$

则圆心 C 到直线 l_2 的距离 $d=\dfrac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=r=2$

解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，

$\therefore$直线 l_2 的方程为 $3x+4y-16=0$.

综上，直线 l_2 的方程为 $x-4=0$ 或 $3x+4y-16=0$

20. (20 分)

证明：（Ⅰ）取 B_1C_1 中点 D，连接 DN、DA_1

∵D、N 分别为 C_1B_1、C_1B ∴$DN/\!/B_1B$ 且 $DN=1/2B_1B$

∵$B_1B\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}A_1A$ 且 M 为 A_1A 中点 ∴$DN\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}A_1M$

∴四边形 $DNMA_1$ 为平行四边形

∴$MN/\!/A_1D$

∵$A_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ $MN\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$

∴$MN/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$

（Ⅱ）∵直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ ∴$CC_1\perp$ 平面 ABC 又 CB、$CA\subset$ 平面 ABC

∴$CC_1\perp CB$、 $CC_1\perp CA$

∵ $\angle ACB=90^\circ$ 即 $CB\perp CA$

∴CC_1、CB、CA 两两垂直，如图建立空间直角坐标系

则 $C(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $A(0,2,0)$ $A_1(0,2,2\sqrt{2})$ $C_1(0,0,2\sqrt{2})$

∴$M(0,2,\sqrt{2})$ $N(1,0,2\sqrt{2})$

则 $\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2\sqrt{2})$ $\overrightarrow{BM}=(-2,2,\sqrt{2})$

易知平面 A_1C_1M 的法向量为 $\vec{n}_1=(1,0,0)$

设平面 BC_1M 的法向量为 $\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$

则 $\begin{cases}\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\\ \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_2+2\sqrt{2}z_2=0\\ -2x_2+2y_2+\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$

令 $z_2=\sqrt{2}$ 则 $\vec{n}_2=(2,1,\sqrt{2})$

设二面角 $B\text{-}C_1M\text{-}A_1$ 的平面角为 θ

则 $|\cos\theta|=|\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

由图知 θ 为钝角 ∴ $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

（III）设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC_1}$， $\lambda\in[0,1]$

∵ $\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2\sqrt{2})$

∴ $P(2-2\lambda,0,2\sqrt{2}\lambda)$

∴ $\overrightarrow{CP}=(2-2\lambda,0,2\sqrt{2}\lambda)$ $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$ $\overrightarrow{CM}=(0,2,\sqrt{2})$

设平面 MBC 的法向量为 $\vec{n}_3=(x_3,y_3,z_3)$

则 $\begin{cases}\vec{n}_3\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}_3\cdot\overrightarrow{CM}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_3=0\\ 2y_3+\sqrt{2}z_3=0\end{cases}$

令 $z_3=-2$ 则 $\vec{n}_3=(0,\sqrt{2},-2)$

$\therefore P$ 点到平面 MBC 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_3|}=\dfrac{|4\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解得 $\lambda=\pm\dfrac{1}{4}$ 又 $\lambda\in[0,1]$ $\therefore$ $\lambda=\dfrac{1}{4}$

21. (14 分)

（Ⅰ） $A_2=\{(2,0),(0,2),(1,1)\}$， $B_2=\{(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4)\}$

（Ⅱ）任取 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$， 令 $\beta=(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_n+1)$， 则 $\alpha<\beta$， 同时 $a_i+1\in N,i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且

$\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+1)=n+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=2n$， 则 $\beta\in B_n$， 所以对任意 $\alpha\in A_n$， 存在 $\beta\in B_n$， 使得 $\alpha<\beta$；

（Ⅲ）设方程： $x_1+x_2+\cdots+x_n=n\cdots$①， $y_1+y_2+\cdots+y_n=2n\cdots$②

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是方程①的解， $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是方程②的解；

若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， $\alpha<\beta$，

即 $((a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n))$ 是一个满足条件的解对，

令 $z_i=b_i-a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$， 则 $z_1+z_2+\cdots+z_n=2n-n=n$， 则 $(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是方程①的解，

即当 $((a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n))$ 是满足条件的解对时， $((a_1,a_2,\cdots,a_n),(z_1,z_2,\cdots,z_n))$ 是方程①的一对解对；

反之 $((a_1,a_2,\cdots,a_n),(z_1,z_2,\cdots,z_n))$ 是方程①的解时，

令 $b_i=a_i+z_i$， 则 $((a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n))$ 是满足条件的解对.

即满足条件的解对 $((a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n))$ 与方程①的两解组成对

$((a_1,a_2,\cdots,a_n),(z_1,z_2,\cdots,z_n))$ 是一一对应的关系.

所以满足条件解对个数 $m\times m=m^2$， 即 S_n 中的元素个数是完全平方数.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！