清华大学 2021 年语言类保送暨高水平艺术团数学试题解答

Penny

一. 选择题: 本大题共 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分, 在每小题的四个选项中, 只有一项符合题意.

1. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$, 设 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $\left|\frac{1-4z}{2z\bar{z}+1}\right|$ 等于 (　　)

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

   答案. A.

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-a<0\}$, $B=\{x\,|\,\frac{x-1}{x-4}<0\}$, 且 $A\cap B=(1,3)$, 则实数 a 等于 (　　)

   A. 3　　B. 4　　C. 9　　D. 16

   答案. C.

3. 已知正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{a_n}+a_n=2n$, $n\in\mathbb{N}^+$, 则 a_2 等于 (　　)

   A. 2 或 3　　B. 2　　C. 1 或 2　　D. 3

   答案. B.

   简析. 依题意, 有 $a_{a_1}+a_1=2$.

   则 $a_{a_1}=a_1=1$.

   假设 $a_2=p\geq 3$, 则 $a_{a_2}+a_2=a_p+p=4$.

   故 $p=3$, $a_p=a_3=1$.

   则 $a_{a_3}+a_3=a_1+a_3=2\neq 6$, 矛盾!

   当 $a_2=1$ 时, 则 $a_{a_2}+a_2=a_1+a_2=2\neq 4$, 矛盾!

   从而 $a_2=2$.

   故选项 B 正确.

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2, P 为椭圆上一点, $\angle F_1PF_2$ 的平分线与 x 轴交于点 $Q(\frac{1}{2},0)$, 作 $QH\perp PF_1$ 交 PF_1 于点 H, 则 $|PH|$ 等于 (　　)

   A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

   答案. A.

   简析. 设 $|PF_1|=m$, $|PF_2|=n$, 则

$$\begin{cases}\frac{m}{n}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}\\ m+n=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=5\\ n=3\end{cases}.$$

   故 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形, 且 $\angle PF_2F_1=90°$.

从而 $|PH| = |PF_2| = 3$.

故选项 A 正确.

5. 已知非负实数 a, b 满足 $a+b=\frac{3}{2}$, 则 $a^2b^2+\frac{9}{4}(a^2+b^2)$ 的最大值为 (　　)

A. $\frac{49}{16}$　　B. $\frac{243}{256}$　　C. $\frac{81}{16}$　　D. $\frac{729}{256}$

答案. C.

简析. 由 AM – GM 不等式, 得 $\frac{3}{2}=a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

又 a, b 是非负实数, 则 $0\leq ab\leq\frac{9}{16}$.

设 $t=ab\in[0,\ \frac{9}{16}]$, 则

$$a^2b^2+\frac{9}{4}\cdot(a^2+b^2)=t^2+\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{9}{4}-2t\right)=\left(t-\frac{9}{4}\right)^2\leq\frac{81}{16}.$$

上式当 $a=0$, $b=\frac{3}{2}$ 时取等号.

故选项 C 正确.

6. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ 在区间 $(0,\ \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极大值点与一个极小值点, 则正实数 ω 的取值范围是 (　　)

A. $(\frac{7}{3},\ \frac{11}{3})$　　B. $(\frac{7}{3},\ \frac{11}{3}]$　　C. $(\frac{7}{3},\ \frac{13}{3})$　　D. $(\frac{7}{3},\ \frac{13}{3}]$

答案. D.

简析. 由 $x\in(0,\ \frac{\pi}{2})$, 得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{3})$.

依题意, 有 $\frac{3\pi}{2}\leq\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$.

解得 $\omega\in(\frac{7}{3},\ \frac{13}{3}]$.

故选项 D 正确.

7. 在四面体 $D\!-\!ABC$ 中, $AB=BC=CA=CD=2\sqrt{3}$, E 为 BC 的中点, $AE\perp DE$, 且 $DE=3$, 则四面体 $D-ABC$ 外接球的半径为 (　　)

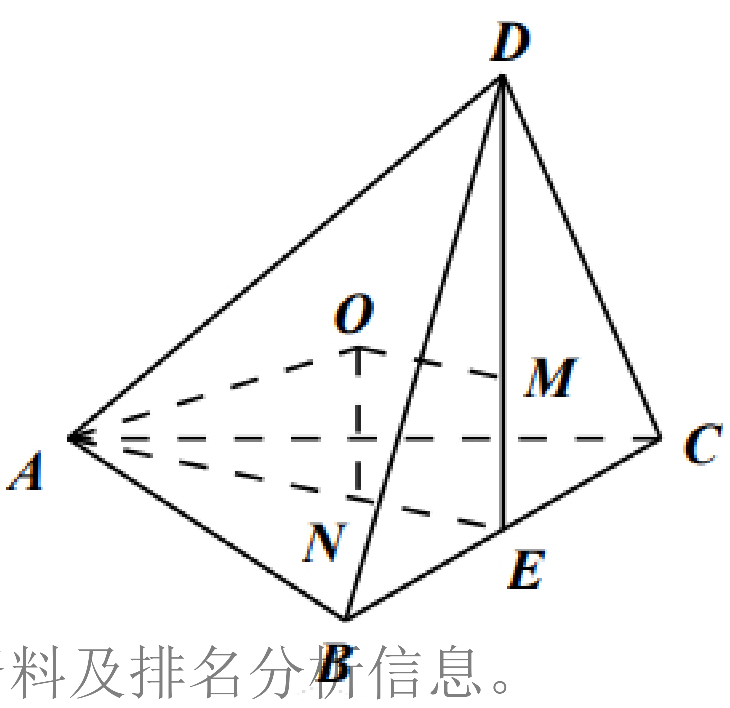
A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{5}$

答案. D.

简析. 依题意, 有 $EC^2+DE^2=CD^2$, 则 $DE\perp BC$.

又 $AE\perp DE$, $AE\cap BC=E$, 则 $DE\perp$ 平面 ABC.

如图, 设四面体 $D-ABC$ 的外接球球心为点 O.



球心 O 在平面 BCD 与平面 ABC 上的射影分别为 M, N 两点.

注意到 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ 均为正三角形, 则 $ON=ME=1$, $AN=2$.

即四面体 $D-ABC$ 的外接球半径 $AO=\sqrt{ON^2+AN^2}=\sqrt{5}$.

故选项 D 正确.

二. 填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

8. $(x+\frac{1}{x}-1)^5\cdot(x^2+1)$ 展开式中的常数项为________

答案. -81.

简析. 仅需考虑 $P=(x+\frac{1}{x}-1)^5$ 展开式中 x^{-2} 项的系数与常数项.

一方面, P 的常数项为 $(-1)^5+\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_4^1\cdot(-1)^3+\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^2\cdot(-1)=-51$.

另一方面, P 的 x^{-2} 项的系数为 $\mathrm{C}_5^2\cdot(-1)^3+\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_4^3\cdot(-1)=-30$.

从而原式展开式中常数项为 $(-51)+(-30)=-81$.

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且 $f(2)=4$, 当 $x>0$ 时, 有 $xf'(x)+2f(x)>0$, 则 $f(x)>\frac{16}{x^2}$ 的解集为________

答案. $(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

简析. 设 $g(x)=x^2f(x)$.

当 $x>0$ 时, 有 $g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)>0$.

即函数 $g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增.

当 $x>0$ 时, 有

$$f(x)>\frac{16}{x^2}\Leftrightarrow g(x)>g(2)\Leftrightarrow x>2.$$

又注意到 $f(x)$ 是偶函数.

则原不等式的解集为 $(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $A(1,0)$, $B(3,4)$, 向量 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 其中 $x+y=4$, 动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$, 则 $|\overrightarrow{PC}|$ 的最小值为________

答案. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

简析. 依题意, 得 $\overrightarrow{OC}=x\cdot(1,\ 0)+y\cdot(3,\ 4)=(2y+4,\ 4y)$.

则点 C 在直线 $l:\ 2x-y-8=0$ 上运动.

设线段 AB 的中点为 Q, 则点 P 在以 $Q(2,\ 2)$ 为圆心, $\sqrt{5}$ 为半径的圆周上运动.

又点 Q 到直线 l 的距离 $d=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

则 $|\overrightarrow{PC}|_{\min}=d-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

三. 解答题: 本大题共 4 小题, 前三个小题每题 12 分, 最后一个小题 14 分, 共 50 分.

11. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不等于 0 的等差数列, 且 a_4 是 $a_2,\ a_8$ 的等比中项, 记数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, $S_7=14$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}a_n\cdot 2^n}$, $n\geq 2$, 且 $b_1=-1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

简析. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d\,(d\neq 0)$.

则 $a_2=a_1+d,\ a_4=a_1+3d,\ a_8=a_1+7d$.

又 a_4 是 $a_2,\ a_8$ 的等比中项, 且 $S_7=14$, 则

$$\begin{cases}(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+7d)\\ S_7=7a_1+21d=14\end{cases}\Rightarrow a_1=d=\frac{1}{2}.$$

从而 $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{n}{2}$.

(2) 当 $n\geq 2$ 时, 有

$$b_n=\frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot 2^n}=\frac{n+1}{(n-1)n\cdot 2^{n-1}}=\frac{2n-(n-1)}{(n-1)n\cdot 2^{n-1}}=\frac{1}{(n-1)\cdot 2^{n-2}}-\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}.$$

则当 $n\geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}T_n&=-1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)\cdot 2^{k-2}}-\frac{1}{k\cdot 2^{k-1}}\right]\\&=-1+\left(1-\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\right)\\&=-\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}.\end{aligned}$$

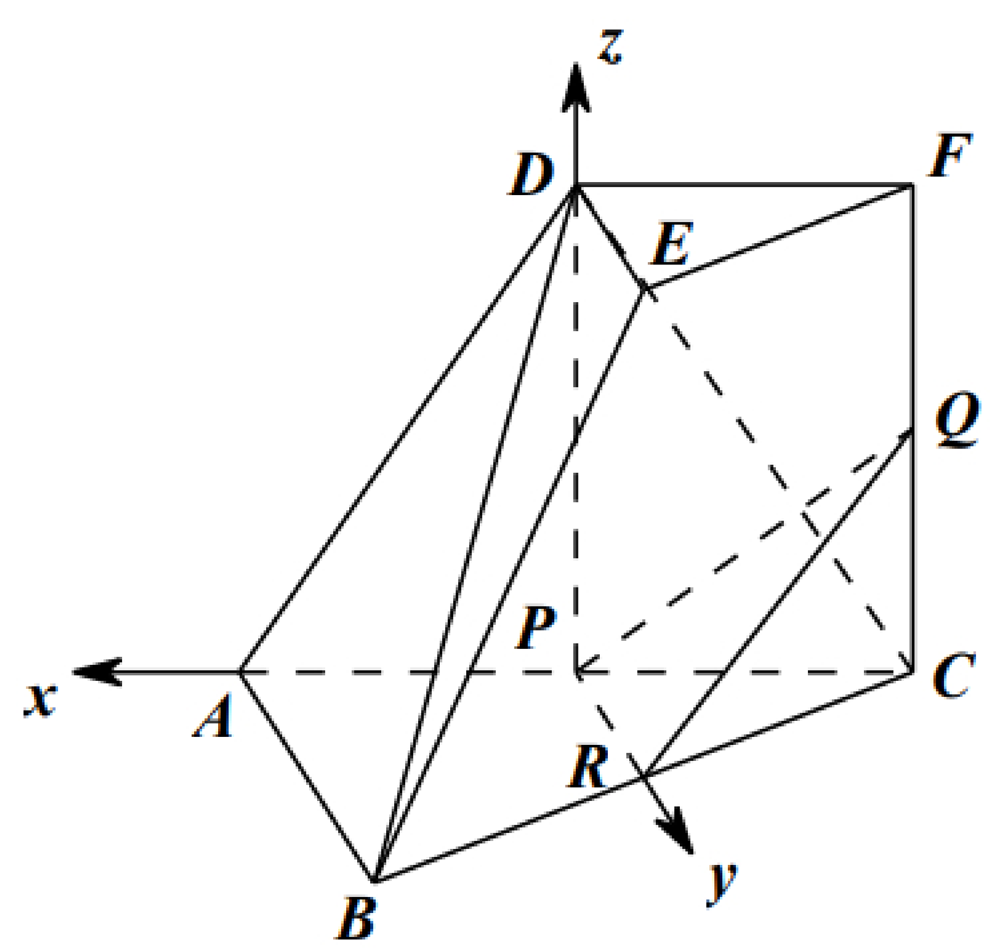
又注意到 $T_1=-1$, 上式也成立.

从而 $T_n=-\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}^+$.

12. 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, $AB\perp AC,\ AB=2DE=2,\ AC=2\sqrt{2},\ CF=2$, 且 $CF\perp$ 平面 ABC, 设 $P,\ Q,\ R$ 分别为棱 $AC,\ FC,\ BC$ 的中点.

(1) 证明: 平面 $BCD\perp$ 平面 PQR.

(2) 求二面角 $E-BD-C$ 的正弦值.



证明. (1) 如图, 连接 DP, 则四边形 $DPCF$ 是矩形.

又 $\tan\angle CDP=\tan\angle CPQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\angle CDP=\angle CPQ$.

从而 $CD\perp PQ$.

由 $CF\perp$ 平面 ABC, 且 $PR\subset$ 平面 ABC, 得 $CF\perp PR$.

由 $AB\perp AC$, 且 PR 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 得 $PR\perp AC$.

又 $AC\cap CF=C$, 则 $PR\perp$ 平面 $ADCF$.

注意到 $PQ\subset$ 平面 $ADCF$, 则 $PR\perp PQ$.

又 $PQ\cap PR=P$, 则 $CD\perp$ 平面 PQR.

从而平面 $BCD\perp$ 平面 PQR.

(2) 以 P 为原点, $\overrightarrow{PA}$ 为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $P-xyz$.

则 $B(\sqrt{2},\ 2,\ 0)$, $C(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $D(0,\ 0,\ 2)$, $E(0,\ 1,\ 2)$.

故 $\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},\ -2,\ 2)$, $\overrightarrow{DE}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},\ -2,\ 0)$.

设 $\boldsymbol{m}=(a,\ b,\ c)$ 是平面 BDE 的法向量, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{2}\,a-2b+2c=0 \\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}=b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2}\,c \\ b=0 \end{cases}.$$

取 $a=\sqrt{2},\ b=0,\ c=1$, 即 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},\ 0,\ 1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(p,\ q,\ r)$ 是平面 BDC 的法向量, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{2}\,p-2q+2r=0 \\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{2}\,p-2q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\sqrt{2}\,r \\ q=-\sqrt{2}\,p \end{cases}.$$

取 $p=1,\ q=-\sqrt{2},\ r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\boldsymbol{n}=(1,\ -\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

设二面角 $E-BD-C$ 的平面角为 θ, 则

$$\cos^2\theta=\cos^2<\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}>=\frac{(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^2}{|\boldsymbol{m}|^2\cdot|\boldsymbol{n}|^2}=\frac{\frac{1}{2}}{3\cdot\frac{7}{2}}=\frac{1}{21}.$$

故 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{105}}{21}$.

从而二面角 $E-BD-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{105}}{21}$.

13. 已知抛物线 $C:\ y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 准线与 x 轴交于 D 点, 过点 F 的直线与抛物线 C 交于 $A,\ B$ 两点, 且 $|FA|\cdot|FB|=|FA|+|FB|$.

(1) 求抛物线 C 的方程.

(2) 设 $P,\ Q$ 是抛物线 C 上的不同两点, 且 $PF\perp x$ 轴, 直线 PQ 与 x 轴交于 G 点, 再在 x 轴上截取线段 $|GE|=|GD|$, 且点 G 介于点 E 与点 D 之间, 连接 PE, 过点 Q 作直线 PE 的平行线 l, 证明: l 为抛物线 C 的切线.

简析. (1) 设直线 AB 的方程为 $l':\ x=my+\frac{p}{2}$.

联立直线 l' 与抛物线 C 的方程, 得

$$\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow y^2-2pmy-p^2=0.$$

设 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, 则 $y_1y_2=-p^2$.

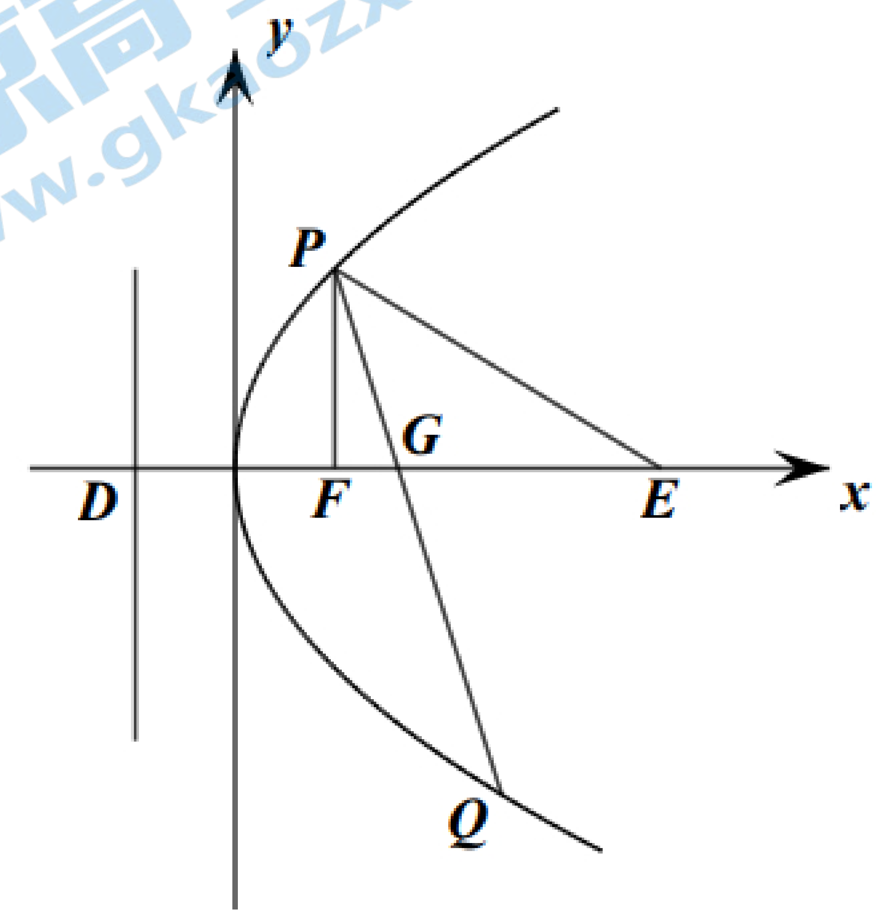
故 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$.

注意到 $|FA| = x_1 + \frac{p}{2}$, $|FB| = x_2 + \frac{p}{2}$, 则

$$\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{1}{x_1 + \frac{p}{2}} + \frac{1}{x_2 + \frac{p}{2}} = \frac{x_1 + x_2 + p}{\frac{p}{2} \cdot (x_1 + x_2) + \frac{p^2}{2}} = \frac{2}{p} = 1 \Rightarrow p = 2.$$

即抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 如图, 不妨设点 P 在第一象限, 点 $Q(x_3, y_3)$ 在第四象限.



当 $y < 0$ 时, 有 $y^2 = 4x \Rightarrow y = -2\sqrt{x}$.

则 $y' = -x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{y}$.

即抛物线 C 在点 Q 处的切线斜率为 $k = \frac{2}{y_3}$.

注意到 $PF \perp x$ 轴, 则 $P(1, 2)$.

设 $G(x_4, 0)$, 由 P, G, Q 三点共线, 得 $\frac{2}{1-x_4} = \frac{y_3-2}{x_3-1} = \frac{4}{y_3+2}$.

则 $x_4 = -\frac{y_3}{2}$.

设 $E(x_5, 0)$, 由 $|GD| = |GE|$, 得 $x_5 = (1 - y_3, 0)$.

故直线 PE 的斜率 $k' = \frac{2}{1-(1-y_3)} = \frac{2}{y_3} = k$.

从而 l 为抛物线 C 的切线.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - a}{x} + b$ 在点 $(1, e-1)$ 处的切线与直线 $l: x + y = 0$ 垂直.

(1) 设函数 $g(x) = xf(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 证明: $e^x - 2x\ln x - x > 1$ ($\ln 2 \approx 0.693$, $e \approx 2.718$).

简析. (1) $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) + a}{x^2}$.

依题意, 有 $f(1) = e - 1$, $f'(1) = 1$.

解得 $a = 1$, $b = 0$.

则 $g(x) = e^x - 1 - x^2$, $x \neq 0$.

设 $h(x) = g'(x) = e^x - 2x$, 则 $h'(x) = e^x - 2$.

当 $x > \ln 2$ 时, 有 $h'(x) > 0$, $g'(x)$ 单调递增.

当 $x < 0$, $0 < x < \ln 2$ 时, 有 $h'(x) < 0$, $g'(x)$ 单调递减.

故函数 $g'(x)$ 在 $x = \ln 2$ 处取到唯一极小值.

则 $g'(x) \geq g'(\ln 2) = 2(1 - \ln 2) > 0$.

故 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) ① 首先证明: $\frac{e^x - 1}{x} \geq x + e - 2$ $(x > 0)$.

设 $F(x) = \frac{e^x - 1}{x} - x - e + 2$ $(x > 0)$, 则

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} - 1 = \frac{(x-1) \cdot (e^x - x - 1)}{x^2}.$$

注意到 $e^x > 1 + x$ $(x > 0)$, 这是熟知的.

当 $0<x<1$ 时, 有 $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减.

当 $x>1$ 时, 有 $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增.

故函数 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取到唯一极小值.

则 $F(x)\geq F(1)=0$.

② 然后证明: $x+\mathrm{e}-2>2\ln x+1$.

设 $G(x)=x-2\ln x+\mathrm{e}-3$.

则 $G'(x)=\frac{x-2}{x}$.

当 $x>2$ 时, 有 $G'(x)>0$, $G(x)$ 单调递增.

当 $0<x<2$ 时, 有 $G'(x)<0$, $G(x)$ 单调递减.

故函数 $G(x)$ 在 $x=2$ 处取到唯一极小值.

则 $G(x)\geq G(2)=\mathrm{e}-1-2\ln 2\approx 2.718-1-2\times 0.693=0.332>0$.

结合 ① 与 ② 这两个不等式, 得

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\geq x+\mathrm{e}-2>2\ln x+1\Rightarrow\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}>2\ln x+1\Rightarrow \mathrm{e}^x-2x\ln x-x>1.$$

从而原不等式成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。