

2019 北京清华附中高一（上）期中

数 学

（清华附中高 19 级）2019. 11

一、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 > 1\}$, $a \in A$, 则 a 的值可以为

- A. -2 B. 1 C. 0 D. 1

2. 已知命题 $P: \exists x \in Q, x^2 - 3 = 0$ 则 $\neg P$ 为

- A. $\exists x \in Q, x^2 - 3 \neq 0$ B. $\exists x \notin Q, x^2 - 3 = 0$
C. $\forall x \in Q, x^2 - 3 \neq 0$ D. $\forall x \notin Q, x^2 - 3 = 0$

3. 函数 $y = x^2 (-2 \leq x \leq 3)$ 的值域为

- A. $[4, 9]$ B. $[0, 9]$ C. $[0, 4]$ D. $[0, +\infty)$

4. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = [m, +\infty)$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 m 的取值范围为

- A. $[2, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 1]$

5. 已知 $a < b < 0$, 则下列不等式正确的是

- A. $2a > a + b$ B. $a + b > b$
C. $a^2 > ab$ D. $b^2 > ab$

6. “ $x > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{x} < 1$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

7. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T = \{x | x = \frac{b}{a}, a, b \in A, a > b\}$, 则集合 T 中元素的个数为

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 对于任意的 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 都有 $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \geq 1$, 称函数 $f(x)$ 满足性质 ψ , 有下列四个函数:

① $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$; ② $g(x) = \sqrt{x}$; ③ $h(x) = x^2 (x \leq -1)$; ④ $k(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 其中满足性质 ψ 的所有函数的序号为

- A. ①②③ B. ①③ C. ③④ D. ①②

二、填空题（每题 5 分，共 30 分）

9. 已知 a, b, c, d 互为不相等的实数, 若 $|a - c| = |b - c| = |d - b| = 1$, 则 $|a - d| =$ _____.

10. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x + 1$, 则 $f(0) + f(1) =$ _____.

11. 若函数 $f(x)$ 为一次函数, 且 $f(x + 1) = f(x) - 2$, $f(x)$ 的零点为 1, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 _____.

12. 某产品的总成本 C 与年产量 Q 之间的关系为 $C = aQ^2 + 3000$, 其中 a 为常数, 且当年产量为 200 时, 总成本为 15000, 记该产品的平均成本为 $f(Q)$ (平均成本 $\frac{\text{总成本}}{\text{年产量}}$), 则当 $Q =$ _____, $f(Q)$ 取得最小值, 这个最小值为 _____.

13. 设 a, b 为互不相等的实数, 若二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 满足 $f(a) = f(b)$, 则 $f(2) =$ _____.

14. 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-2, 1, 2]$, 其图像如下图所示, 且 $f(-2, 1) = -0.96$.

(1) 若函数 $y = f(x) - k$ 恰有两个不同的零点, 则 $k =$ _____;

(2) 已知函数 $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0, \\ x^3 + 2x - 16, & x > 0. \end{cases}$ $y = g[f(x)]$ 有 _____ 个不同的零点.

三、解答题 (共 80 分)

15. 解下列关于 x 的不等式:

(1) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$;

(2) $x^2 + 4x + 5 > 0$

(3) $x^3 \leq ax$

16. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}, B = \{x | 2x \geq a\}$

(I) 当 $a=0$ 时, 求 $A \cap B$;

(II) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围;

(III) 记集合 $C = A \cap B$, 若 C 中恰有两个元素为整数, 求实数 a 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 1 (a \neq 0)$

(I) 比较 $f(1 - \sqrt{2})$ 与 $f(1 + \sqrt{2})$ 的大小, 并说明理由;

(II) 若函数 $f(x)$ 的图像恒在 x 轴的上方, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若函数 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 4, 求 a 的值.

18. 已知集合 $M = (-1, 1)$. 对于 $x, y \in M$, 记 $\phi(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$.

(I) 求 $\phi(0, \frac{1}{2})$ 的值;

(II) 如果 $0 < x < 1$, 求 $\phi(x, 1-x)$ 的最小值;

(III) 求证: $\forall x, y \in M, \phi(x, y) \in M$

19. 已知函数 $f(x)$ 满足: 函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, 3]$ 上单调递增.

(I) 比较 $3f(2)$ 与 $2f(3)$ 的大小, 并说明理由;

(II) 写出能说明“函数 $y=f(x)$ 在 $(0, 3]$ 单调递增”这一结论是错误的函数;

(III) 若该函数的解析式为 $f(x) = ax^3 + (1-a)x^2$, 求 a 的取值范围.

20. 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 为平面直角坐标系上的两点, 其中 x_A, y_A, x_B, y_B 均为整数, 若 $|x_B - x_A| + |y_B - y_A| = 3$, 则称点 B 为点 A 的“相关点”, 点 P_1 是坐标原点 O 的“相关点”, 点 P_2 是点 P_1 的“相关点”, 点 P_3 是点 P_2 的“相关点”, \dots , 以此类推, 点 P_{2019} , 是点 P_{2018} 的“相关点”.

注: 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 间的距离 $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(I) 直接写出点 O 与点 P_1 间的距离所有可能值;

(II) 求点 O 与点 P_3 间的距离最大值;

(III) 求点 O 与点 P_{2019} 间的距离最小值.



长按识别关注