参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1.【答案】B

【分析】根据方程得到斜率，然后可得其倾斜角.

【详解】因为直线 $l:\sqrt{3}x-y-4=0$ 的斜率为 $\sqrt{3}$，所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$

故选：B

2.【答案】D

【分析】根据空间向量的坐标运算求解.

【详解】$\because \vec{a}=(0,2,0)$，$\vec{b}=(1,0,-1)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(1,2,-1)$，

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=1\times1+2\times0+(-1)\times(-1)=2$.

故选：D.

3.【答案】C

【分析】将圆化为标准方程,找到圆心之间的距离和半径之间的关系即可判断圆与圆的位置关系.

【详解】解:由题知 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 可化为,

$(x-1)^2+(y+2)^2=4$,所以圆心为 $1,-2$,半径为 2,

$(x-4)^2+(y-2)^2=16$,圆心为 $(4,2)$,半径为 4,

所以圆心之间的距离为 $\sqrt{(4-1)^2+(2-(-2))^2}=5$,

因为圆心距大于半径差的绝对值,小于半径和,

所以两圆相交.

故选:C

4.【答案】A

【分析】把给定方程配方化成圆的标准方程形式即可计算作答.

【详解】方程 $x^2+y^2-4x-2y+m=0$ 化为：$(x-2)^2+(y-1)^2=5-m$，

因方程 $x^2+y^2-4x-2y+m=0$ 表示圆，于是得 $5-m>0$，解得 $m<5$，

所以 m 的取值范围是：$(-\infty,5)$.

故选：A

5.【答案】B

【分析】由两直线平行直接列方程求解即可.

【详解】由题意可知 $a\neq0$，

因为直线 $x+ay-1=0$ 和直线 $ax+4y+2=0$ 互相平行，

所以 $\frac{1}{a}=\frac{a}{4}\neq\frac{-1}{2}$，解得 $a=2$，

故选：B

6.【答案】C

【分析】将 $\overrightarrow{MN}$ 表示为以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 为基底的向量，由此求得 x,y,z 的值.

【详解】依题意 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\left(\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，所以 $x=-\frac{1}{2},y=\frac{2}{3},z=\frac{1}{3}$.

故选：C.

【点睛】本小题主要考查空间中，用基底表示向量，考查空间向量的线性运算，属于基础题.

7.【答案】A

【分析】设点 $-1,2$ 关于直线 $x+y+4=0$ 对称的点为 $\left(x_0,y_0\right)$，由对称关系可知，两点连线与直线 $x+y+4=0$ 垂直，所以 $\frac{y_0-2}{x_0+1}=1$，又由两点连线段的中点在直线 $x+y+4=0$ 上，得 $\frac{x_0-1}{2}+\frac{y_0+2}{2}+4=0$，解出点坐标.

【详解】设点 $-1,2$ 关于直线 $x+y+4=0$ 对称的点为 $\left(x_0,y_0\right)$，直线 $x+y+4=0$ 的斜率为-1，由对称关系，两点连线与直线 $x+y+4=0$ 垂直，所以 $\frac{y_0-2}{x_0+1}=1$，又因为两点连线段的中点 $\left(\frac{x_0-1}{2},\frac{y_0+2}{2}\right)$ 在直线 $x+y+4=0$ 上，代入得 $\frac{x_0-1}{2}+\frac{y_0+2}{2}+4=0$，解方程，解得 $x_0=-6$，$y_0=-3$，所以对称点为 $(-6,-3)$.

故选：A.

8.【答案】C

【分析】两条直线相互平行，$|PQ|$ 的最小值是平行线之间的距离.

【详解】由 $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\neq\frac{-6}{3}$，可得两条直线相互平行，$|PQ|$ 的最小值是平行线之间的距离，

直线 $3x+4y-6=0$ 可变形为 $6x+8y-12=0$

则 $|PQ|$ 的最小值为 $d=\frac{|3-(-12)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

故选：C

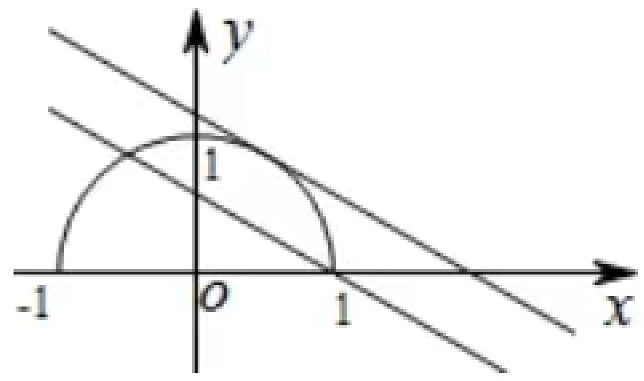
9.【答案】D

【分析】作出曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象，通过直线的平移，求解满足条件时实数 m 的取值范围.

【详解】$y=\sqrt{1-x^2}$ 即 $x^2+y^2=1(y\ge 0)$，

表示的曲线为圆心在原点，半径是 1 的圆在 x 轴以及 x 轴上方的部分.

作出曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象，



直线 $x+\sqrt{3}y-m=0$ 即 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}m$，直线在 y 轴上的截距为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}m$，

当直线 $x+\sqrt{3}y-m=0$ 过点 $(1,0)$，与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点，此时 $m=1$，

当直线 $x+\sqrt{3}y-m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相切时，$m>0$，由 $\dfrac{|-m|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$，解得 $m=2$，

所以直线 $x+\sqrt{3}y-m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点，实数 m 的取值范围是 $[1,2)$.

故选：D

10.【答案】D

【分析】由题意，点 C 在坐标轴上，且到函数 $y=\sqrt{3}|x|$ 图像距离为 2，找出符合条件的点，求多边形的面积.

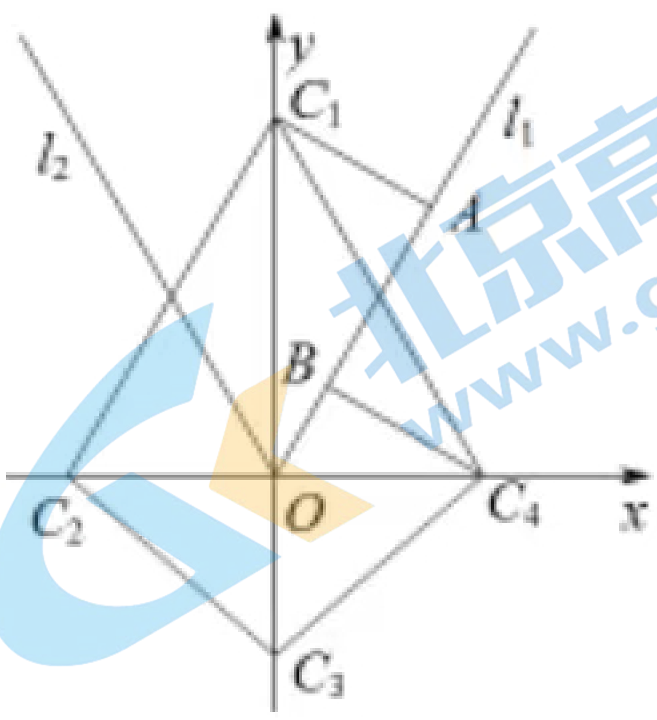
【详解】函数 $y=\sqrt{3}|x|$ 的图像是原点出发的两条射线 l_1 与 l_2，两条射线关于 y 轴对称，l_1 与 x 轴正方向夹角为 60°，

圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=1$，圆心 $C(a,b)$，半径为 1，

$|PQ|$ 最小值为 1，此时 $|PC|$ 为 2，

$ab=0$，圆 C 的圆心 C 点始终在坐标轴上，所有满足条件的点 C 即坐标轴上到 l_1 或 l_2 或原点距离等于 2 的点，

x 轴上有 C_2,C_4 满足条件，y 轴上有有 C_1,C_3 满足条件，如图所示，



过 C_1 和 C_4 分别作 l_1 的垂线，垂足为 A 与 B，则 $|C_1A|=|C_4B|=2$，

$|OC_1|=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=4$，$|OC_2|=|OC_4|=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$|OC_3|=2$，

四边形 $C_1C_2C_3C_4$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|C_1C_3|\cdot|C_2C_4|=\dfrac{1}{2}\times(4+2)\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$.

故选：D

二、填空题（本大题共 5 小题，每题 5 分，共 25 分）

11.【答案】6

【分析】根据 $\vec{a}\perp\vec{b}$，可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，解方程即可得出答案.

【详解】解：因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

即 $-6-y+12=0$，解得 $y=6$.

故答案为：6.

12.【答案】± 3

【分析】由两圆外切，两圆心距等于两圆半径之和即可求出结果.

【详解】圆 $x^2+y^2=4$，圆心坐标为 $(0,0)$，半径为 2

圆 $(x+4)^2+(y-3)^2=r^2$，圆心坐标 $(-4,3)$，半径为 $|r|$，

由两圆外切，两圆心距等于两圆半径之和，即 $2+|r|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$，

所以 $r=\pm 3$.

故答案为：± 3.

13.【答案】 ①. $(1,2)$ ②. $x+y-3=0$ 或 $y=2x$

【分析】将直线方程转化为 $a(x-1)+y-2=0$，即可得出定点坐标，然后根据截距的概念分类讨论求直线方程即可.

【详解】直线 $ax+y-a-2=0$，即 $a(x-1)+y-2=0$，

所以直线过定点 $(1,2)$，即点 P 的坐标.

过点 P 且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程，

当截距为 0 时，直线的方程即：$y=2x$；

当截距不为 0 时，设截距为 m，直线方程为：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m}=1$，

点 $P(1,2)$ 在直线上，所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{m}=1$，解得 $m=3$，

此时直线方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$，即$x+y-3=0$，

故直线方程为：$x+y-3=0$或$y=2x$.

故答案为：$(1,2)$；$x+y-3=0$或$y=2x$.

14.【答案】$\frac{2}{3}$

【分析】连接 MD，取 MD 中点 E，连接 EN，CE，所以$NE//AM$，所以直线AM和CN夹角即为$\angle CNE$，分别求得各个长度，结合余弦定理，即可求得答案.

【详解】连接 MD，取 MD 中点 E，连接 EN，CE，

因为 $ABCD$ 为正四面体，且棱长为 1，M,N分别为BC,AD的中点，

所以$DM=AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 E，N 分别为 MD，AD 中点，

所以$NE//AM$，且$NE=\frac{1}{2}AM=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

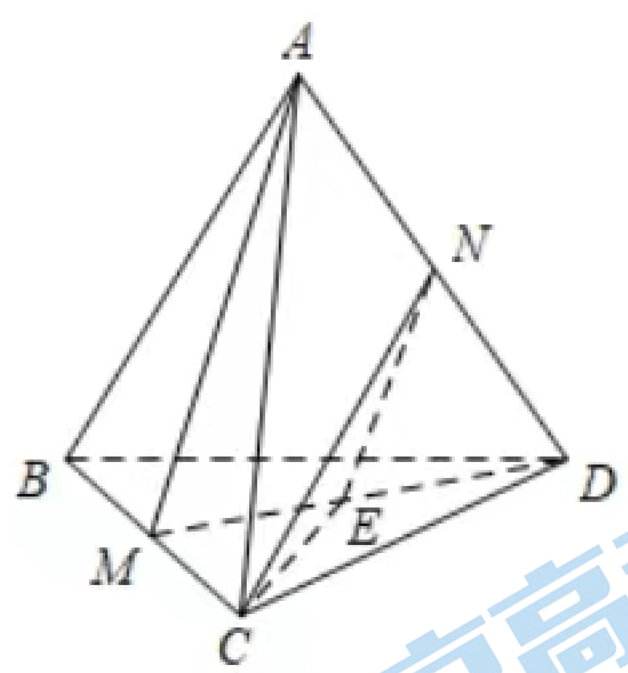
所以直线AM和CN夹角即为$\angle CNE$，

在$Rt\triangle MEC$中，$EC=\sqrt{ME^2+MC^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

所以在$\triangle CNE$中，$\cos\angle CNE=\frac{NE^2+CN^2-CE^2}{2\times NE\times CN}=\frac{2}{3}$，

所以直线AM和CN夹角的余弦值为$\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$



15.【答案】②③

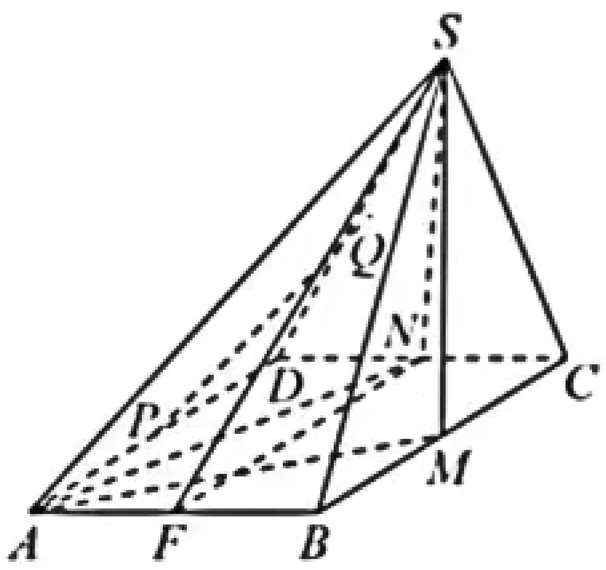
【分析】对于①，直接找出直线SA与平面$ABCD$所成角求解；

对于②，直接找到二面角$S-AB-N$的平面角求解；

对于③，利用$PQ//$平面AMS，P,Q两点到平面AMS的距离相等；

对于④，求出 Q 的轨迹，再求线段 NQ 长度的取值范围.

【详解】



对于①，连接 SN,NA，因为 $\triangle SCD$ 是等边三角形，所以 $SN\perp CD$，

又平面 $SCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$， $SN\subset$ 面 SCD，

所以 $SN\perp$ 面 $ABCD$，所以 SA 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle SAN$，

在直角 $\triangle SNA$ 中， $SN=\sqrt{3},AN=\sqrt{5}$，所以 $\tan\angle SAN=\dfrac{SN}{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，故直线 SA 与平面 $ABCD$ 所成角为 $45°$ 不正确，故①错误；

对于②，取 AB 中点为 F，连接 NF,SF，

因为底面是边长为 2 的正方形，所以 $SA=SB,AB\perp SF$，

又 $AB\perp NF$，所以二面角 $S-AB-N$ 的平面角为 $\angle SFN$，

又因为 $SN\perp$ 面 $ABCD$，所以 $SN\perp NF$，

在直角 $\triangle SNF$ 中， $SN=\sqrt{3},NF=2,SF=\sqrt{7}$，

所以 $\cos\angle SFN=\dfrac{NF}{SF}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，故②正确；

对于③，因为 $PQ//$ 平面 AMS，所以 P,Q 两点到平面 AMS 的距离相等，

而 P 点到平面 AMS 的距离为定值，故点 Q 到平面 AMS 的距离为定值，故③正确；

对于④，取 SD 中点为 E，连接 EP,EC,PC，则 $PE//SA$，

因为 $PE\not\subset$ 面 AMS， $SA\subset$ 面 AMS，故 $PE//$ 面 AMS，

同理可证 $PC//$ 面 AMS，

又因为 $PC\cap PE=P$， $PE\subset$ 面 EPC， $PC\subset$ 面 EPC，

所以面 $EPC//$ 面 AMS，

又 $PQ//$ 平面 AMS，$PQ\subset$ 面 EPC，面 $EPC\cap$ 面 $SCD=EC$，

所以 Q 的轨迹为线段 CE，

在等边 $\triangle SCD$ 中，NQ 的最大值为 $NC=1$，最小值为 N 到直线 CE 的距离为 $\frac{1}{2}$，

故线段 NQ 长度的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},1\right]$，故④错误.

故答案为：②③.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1）$2x-y-3=0$

（2）$x-2y+4=0$

（3）8

【分析】（1）先由中点坐标公式求得 $D(1,-1)$，再利用点斜式即可求得 BD 所在的直线方程；

（2）利用直线垂直斜率相等求得 $k_{AH}=\dfrac{1}{2}$，再利用点斜式即可求得 AC 边上的高所在的直线方程；

（3）先用点斜式求得直线 BC 的方程，再利用点线距离公式与两点距离公式分别求得 $\triangle ABC$ 的高与底，由此可求得 $\triangle ABC$ 的面积.

【小问 1 详解】

因为 $A(-2,1),B(2,1),C(4,-3)$，所以 AC 的中点 $D(1,-1)$，

故 $k_{BD}=\dfrac{1-(-1)}{2-1}=2$，

所以 AC 边上的中线 BD 所在的直线方程为 $y-1=2(x-2)$，即 $2x-y-3=0$.

【小问 2 详解】

设 $AH\perp BC$，交 BC 与点 H，则 $k_{AH}k_{BC}=-1$，

因为 $k_{BC}=\dfrac{1-(-3)}{2-4}=-2$，所以 $k_{AH}=\dfrac{1}{2}$，

所以 AC 边上的高所在的直线方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x+2)$，即 $x-2y+4=0$.

【小问 3 详解】

由（2）知 $k_{BC}=-2$，

所以直线 BC 的方程为 $y-1=-2(x-2)$，即 $2x+y-5=0$，

所以点 A 到直线 BC 的距离 $d=\dfrac{|-4+1-5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，

又 $|BC|=\sqrt{(4-2)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|BC|d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=8$.

17.【答案】(1) $(x-2)^2+y^2=2$

(2) 直线与圆相切　(3) $x=1$ 或 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}$

【分析】(1) 由两点间的距离公式求出半径，即可得解;

(2) 求出圆心到直线的距离，即可判断;

(3) 分直线的斜率存在与不存在两种情况讨论，利用垂径定理与勾股定理表示出弦长，即可求出参数的值，从而得解.

【小问 1 详解】

解：由题意，圆的半径为 $\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$,

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=2$.

【小问 2 详解】

解：设圆心到直线的距离为 d，则 $d=\frac{|2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}=r$，故直线与圆相切;

【小问 3 详解】

解：若斜率不存在，则直线方程为 $x=1$，弦心距 $d=1$，半径为 $\sqrt{2}$,

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2$，符合题意;

若斜率存在，设直线方程为 $y-3=k(x-1)$，即 $kx-y-k+3=0$.

所以弦心距 $d=\frac{|k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $|AB|=2\sqrt{2-\frac{(k+3)^2}{1+k^2}}=2$,

解得 $k=-\frac{4}{3}$，直线方程为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}$,

综上所述，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}$.

18.【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析　(3) $\frac{1}{3}$

【分析】(1) 根据线面平行的判定定理，只须判定 $OD//PA$ 即可.

(2) 根据面面垂直的判定只须证明 $PO\perp$ 平面 ABC 即可.

(3) 在 (2) 的基础上，可利用三棱锥可换底的特性知 $V_{A-PBC}=V_{C-PAB}$，从而得解.

【小问 1 详解】

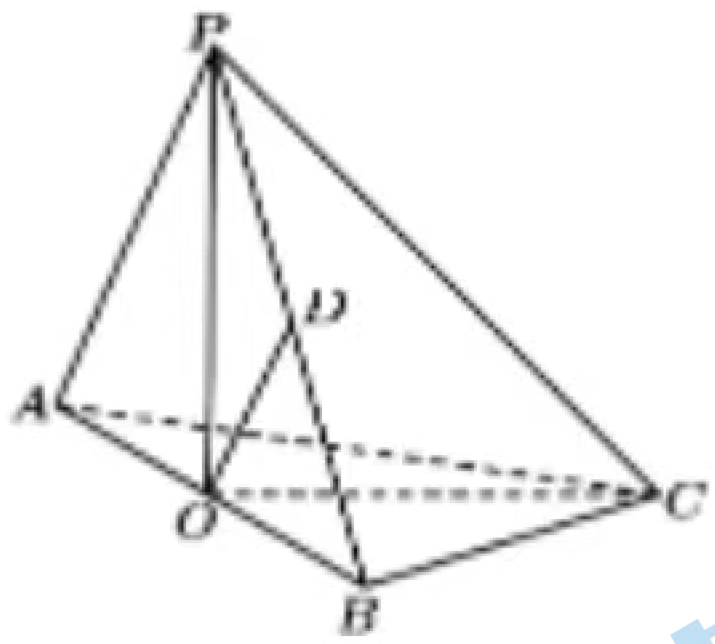
$\because O,D$ 分别为 AB,PB 的中点，$\therefore$ $OD//PA$,

又 $PA \subset$ 平面 PAC，$OD \not\subset$ 平面 PAC，

$\therefore OD //$ 平面 PAC.

【小问 2 详解】

连结 OC,OP，如图，



$\because AC = BC = \sqrt{2}$，$AB = 2$，则 $AB^2 = AC^2 + BC^2$，故 $AC \perp BC$，

又 O 为 AB 的中点，$\therefore OC \perp AB, OC = \frac{1}{2}AB = 1$，

同理，$PO \perp AB, PO = 1$，

又 $PC = \sqrt{2}$，$\therefore PC^2 = OC^2 + PO^2 = 2$，$\therefore PO \perp OC$，

又 $PO \perp AB$，$AB \cap OC = O$，$\therefore PO \perp$ 平面 ABC.

由于 $PO \subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC.

【小问 3 详解】

由（2）可知 $PO \perp$ 平面 ABC

$\therefore$ PO 为三棱锥 $P-ABC$ 的高，且 $PO = 1$，

故 $V_{A-PBC} = V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1\right) \times 1 = \frac{1}{3}$.

19. 【答案】（1）$(x-1)^2 + y^2 = 1$

（2）$x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$

【分析】（1）结合已知条件利用待定系数法或圆的几何性质即可求解；

（2）分直线斜率存在和不存在两种情况讨论，结合点到直线的离公式计算即可.

【小问 1 详解】

若选①：设圆 E 的方程为：$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\left(D^2 + E^2 - 4F > 0\right)$，

因为圆 E 经过点 $A(0,0)$，$B(1,1)$，$C(2,0)$，

所以 $\begin{cases} F = 0 \\ 1+1+D+E+F = 0 \\ 4+2D+F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = 0 \\ D = -2 \\ E = 0 \end{cases}$，

故圆 E 的方程为：$x^2 + y^2 - 2x = 0$，即 $(x-1)^2 + y^2 = 1$；

若选②：由直线方程 $mx-y-m=0$ 可知，$y=m(x-1)$，

故直线 $mx-y-m=0$ 恒过点 $(1,0)$，

因为圆 E 恒被直线 $mx-y-m=0$ 平分，

所以圆 E 的圆心为 $(1,0)$，

因为 $A(0,0)$ 在圆上，故圆 E 的半径 $r=1$，

从而圆 E 的方程为：$(x-1)^2+y^2=1$；

若选③：不妨设圆 E 的圆心为 (a,b)，半径为 r，

此时 $r=|a|$，

故圆 E 的方程为：$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$，

分别将 $A(0,0)$，$B(1,1)$ 代入上式可得，$\begin{cases}a^2+b^2=a^2\\(1-a)^2+(1-b)^2=a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，

故圆 E 的方程为：$(x-1)^2+y^2=1$；

【小问 2 详解】

当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=2$，

圆 E 的圆心 $(1,0)$ 到直线 $x=2$ 的距离为1，

则此时直线 $l: x=1$ 与圆 E 相切，

当直线 l 的斜率存在时，设方程为 $y-3=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+3=0$，

则圆心 $(1,0)$ 到直线 l 的距离 $\dfrac{|k-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\dfrac{4}{3}$，

所以此时直线 l 的方程为 $\dfrac{4}{3}x-y+\dfrac{1}{3}=0$，即 $4x-3y+1=0$，

综上：直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $4x-3y+1=0$.

20.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

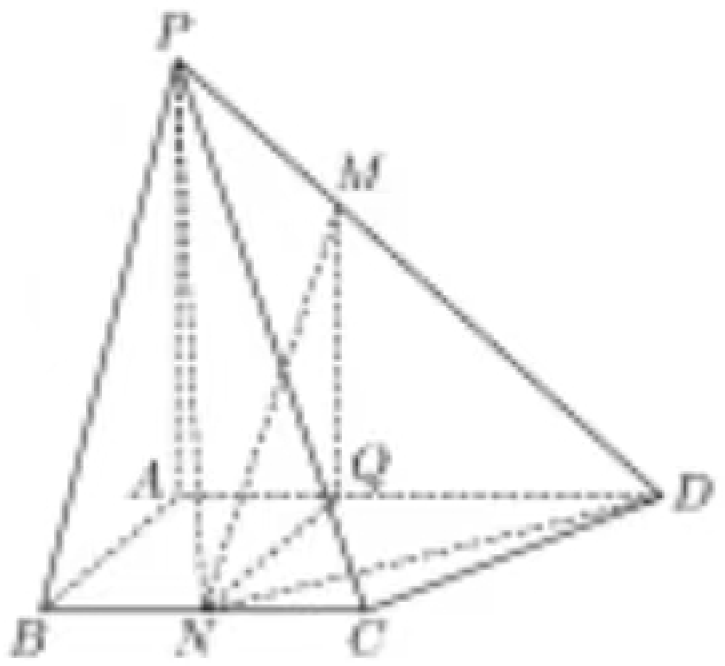
（3）存在，$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{PM}{PD}=1$

【分析】（1）利用面面平行证明线面平行；

（2）利用坐标法求二面角余弦值与正弦值；

（3）设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，可表示点 M 与 $\overrightarrow{MN}$，再根据线面夹角求得 λ 的值.

【小问 1 详解】



如图所示，在线段 AD 上取一点 Q，使 $AQ=\frac{1}{3}AD$，连接 MQ，NQ，

$\because DM=2MP$，

$\therefore QM//AP$，

又 $AD=3$，$AB=BC=2$，

$\therefore AQ\underline{\underline{//}}BN$，四边形 $ABNQ$ 为平行四边形，

$\therefore NQ//AB$，

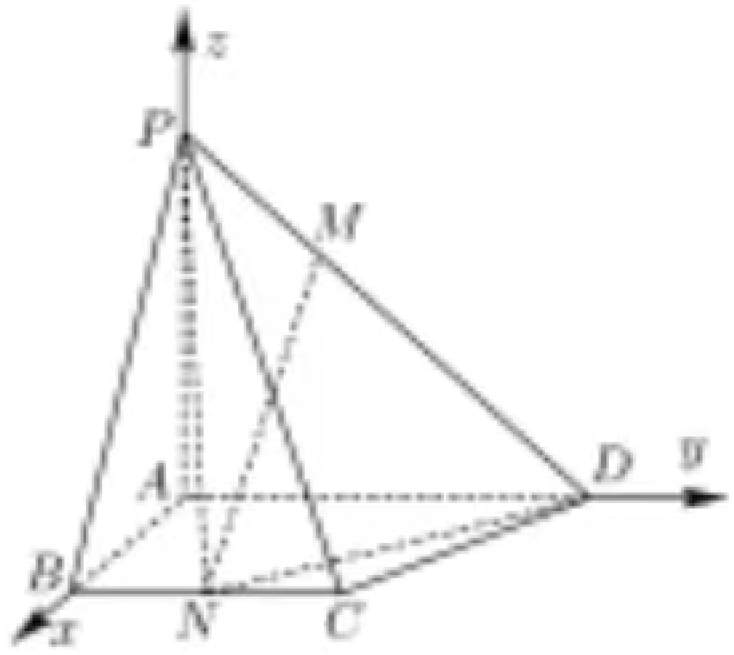
又 $NQ\cap MQ=Q$，$AB\cap AP=A$，

所以平面 $MNQ//$ 平面 PAB，

$\because MN\subset$ 平面 MNQ，

$\therefore MN//$ 平面 PAB；

【小问 2 详解】



如图所示，以点 A 为坐标原点，以 AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AP 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，

又 N 是 BC 中点，则 $N(2,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{DN}=(2,-2,0)$，

设平面 PCD 的法向量 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}_1=3y_1-3z_1=0\\\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}_1=-2x_1+y_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$\vec{n}_1=(1,2,2)$，

设平面PND的法向量$\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}_2=3y_2-3z_2=0\\\overrightarrow{DN}\cdot\vec{n}_2=2x_2-2y_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，则$\vec{n}_2=(1,1,1)$，

所以$\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\dfrac{1+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，

则二面角$C-PD-N$的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$；

【小问 3 详解】

存在，$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{PM}{PD}=1$

假设存在点M，设$\dfrac{PM}{PD}=\lambda$，即$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，$\lambda\in[0,1]$，

由（2）得$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$N(2,1,0)$，且平面PCD的法向量$\vec{n}_1=(1,2,2)$，

则$\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{PM}=(0,3\lambda,-3\lambda)$，

则$M(0,3\lambda,3-3\lambda)$，

$\overrightarrow{MN}=(2,1-3\lambda,3\lambda-3)$，

$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}_1\rangle\right|=\left|\dfrac{2+2(1-3\lambda)+2(3\lambda-3)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(1-3\lambda)^2+(3\lambda-3)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$或$\lambda=1$，

故存在点M，此时$\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{PM}{PD}=1$.

21.【答案】（1）4；（2）$B\left(1,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$；

（3）存在，答案见解析.

【分析】（1）根据题中给定定义直接求解；

（2）根据定义列出式子，用不等式求解最值；

（3）根据定义分类讨论证明.

【小问 1 详解】

$\rho(A,B)=|1-2|+|0-3|=4$.

【小问 2 详解】

因为点 B 为直线 $l:x-\sqrt{2}y+2=0$ 上的动点，

故可设点 B 的坐标为 $B\left(\sqrt{2}t-2,t\right)$，

则 $\rho(A,B)=|\sqrt{2}t-3|+|t|=\sqrt{2}\left|t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|+|t|\geq\left|t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|+|t|\geq\left|\left(t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-t\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

当且仅当 $t=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，故 $\rho(A,B)$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

此时点 B 坐标为 $B\left(1,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

【小问 3 详解】

注意到点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 不同，下面分三种情况讨论.

若 $x_1=x_2$，则 $y_1\neq y_2$，由条件②得 $|x-x_1|+|y-y_1|=|x_2-x|+|y_2-y|$，

即 $|y-y_1|=|y-y_2|$，所以 $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

由条件①得 $|x-x_1|+|y-y_1|+|x_2-x|+|y_2-y|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.

所以 $2|x-x_1|+\frac{1}{2}|y_2-y_1|+\frac{1}{2}|y_2-y_1|=|y_2-y_1|$，

所以 $|x-x_1|=0$，所以 $x=x_1$.

因此，所求的点 C 为 $\left(x_1,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

若 $y_1=y_2$，则 $x_1\neq x_2$，类似于 A.，可得符合条件的点 C 为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},y_1\right)$.

当 $x_1\neq x_2$，且 $y_1\neq y_2$ 时，不妨设 $x_1<x_2$.

$\rho(A,C)+\rho(C,B)=|x-x_1|+|y-y_1|+|x_2-x|+|y_2-y|$

$=|x-x_1|+|x_2-x|+|y-y_1|+|y_2-y|$

$\geq|x-x_1+x_2-x|+|y-y_1+y_2-y|$

$=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=\rho(A,B)$

当且仅当 $(x-x_1)(x_2-x)\geq0$ 与 $(y-y_1)(y_2-y)\geq0$ 同时成立时取等号，

即当且仅当 $(x-x_1)(x_2-x)\geq0$ 与 $(y-y_1)(y_2-y)\geq0$ 同时成立时条件①成立.

（i）若 $y_1 < y_2$，则由上面证明知，要使条件①成立，则有 $x_1 \le x \le x_2$ 且 $y_1 \le y \le y_2$

.从而由条件②得 $x + y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.

因此所求点 C 的集合为

$$M = \left\{(x,y) \mid x + y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2), x_1 \le x \le x_2 \text{且} y_1 \le y \le y_2\right\}.$$

（ii）若 $y_1 > y_2$，类似地由条件①可得 $x_1 \le x \le x_2$ 且 $y_2 \le y \le y_1$，从而由条件②得

$x - y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$.

因此所求点 C 的集合为

$$N = \left\{(x,y) \mid x - y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2), x_1 \le x \le x_2 \text{且} y_2 \le y \le y_1\right\}.$$

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！