

高一数学期中试卷

(120分钟)

一、选择题：(本大题共10小题，每小题5分，共50分。)

1. 已知集合 $A = \{x | x - 2 \geq 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. \emptyset B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{1, 2\}$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$ ”的否定为（ ）。

- A. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 + 1 \geq 0$
B. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 + 1 < 0$
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$
D. $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$

3. 下列四组函数中表示同一函数的是（ ）

- A. $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$
B. $f(x) = x^2, g(x) = (x+1)^2$
C. $f(x) = x-1, g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
D. $f(x) = x^2, g(t) = t^2$

4. 下列不等式正确的是（ ）

- A. 若 $a > b$, 则 $ac > bc$
B. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$
C. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
D. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

5. 在下列区间中, 函数 $f(x) = x^3 + 4x - 1$ 的零点所在的区间为（ ）

- A. $[-\frac{1}{4}, 0]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f(g(\pi)) = (\quad)$
- A. 1 B. 0 C. -1 D. $x = \pi$

7. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = 8$, 那么 ab 的最大值等于 ()

- A. 32 B. 16 C. 8 D. 4

8. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 " $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ " 是 " $x < 1$ " 的 () 条件

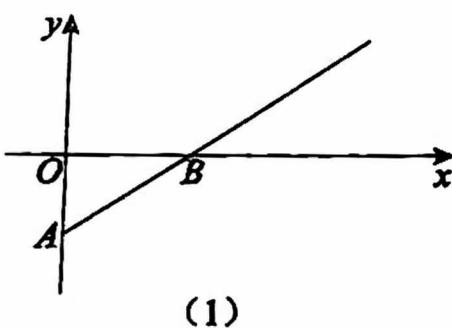
- A. 充分而不必要 B. 必要而不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

9. 在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$) 有 $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

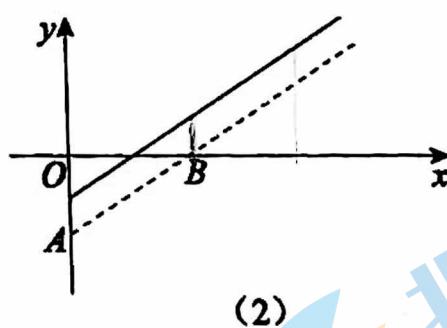
则 ()

- A. $f(-2) < f(1) < f(3)$ B. $f(1) < f(-2) < f(3)$
C. $f(3) < f(-2) < f(1)$ D. $f(3) < f(1) < f(-2)$

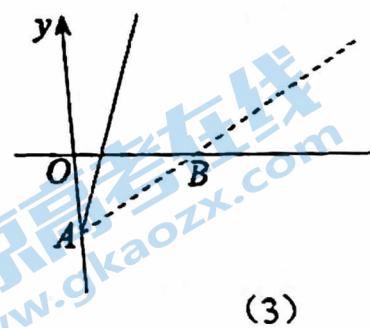
10. 某部影片的盈利额 (即影片的票房收入与固定成本之差) 记为 y , 观影人数记为 x , 其函数图像如图 (1) 所示. 由于目前该片盈利未达到预期, 相关人员提出了两种调整方案, 图 (2)、图 (3) 中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图像.



(1)



(2)



(3)

给出下列四种说法:

- ① 图 (2) 对应的方案是: 提高票价, 并提高成本;
② 图 (2) 对应的方案是: 保持票价不变, 并降低成本;
③ 图 (3) 对应的方案是: 提高票价, 并保持成本不变;
④ 图 (3) 对应的方案是: 提高票价, 并降低成本.

其中, 正确的说法是 ()

- (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

二、填空题：（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。）

11. 函数 $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ 的定义域是_____.

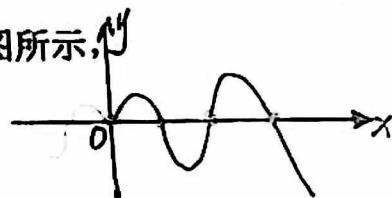
12. 方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 的解集是_____.

13. 函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，且 $f(1) = -2$ ，那么 $f(-1) + f(0) =$ _____.

14. 若 $x > 1$ ，则函数 $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ 的值域为_____.

15. 设 $a, b \neq 0$ ，使命题“若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题的一组 a, b 的值依次为_____.

16. 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R ，在 $[0, +\infty)$ 上大致图像如右图所示，则函数 $y = f(|x|)$ 的零点个数为_____.



三、解答题：（本大题共 7 小题，每小题 10 分，共 70 分。）

17. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$

(1) 求 $A \cap B$ ；

(2) 求 $(C_U A) \cup B$.

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$ ，

(1) 当 $a = 1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 的最大值和最小值；

(2) 若对于任意 $x \in R$ 都有 $f(x) > 0$ ，求实数 a 的取值范围.

19. 解下列关于 x 的不等式.

(1) $\frac{x-1}{x-2} < 0$ ；

(2) $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$

20. 已知函数 $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并加以证明；

(2) 证明函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上为增函数。

21. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + 2bx + c (b, c \in \mathbb{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的零点是 -1 和 1 ，求实数 b, c 的值；

(2) 已知 $c = b^2 + 2b + 3$ ，设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 的两根，且

$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 8$ ，求实数 b 的值。

22. 通过研究学生的学习行为，专家发现学生的注意力随着老师讲课时间的变化而变化：讲课开始时，学生的兴趣激增；中间有一段时间，学生的兴趣保持较理想的状态，随后学生的注意力开始分散。设 $f(t)$ 表示学生注意力随时间 t (分钟) 的变化规律： $f(t)$ 越大，表明学生注意力越集中。经过实验分析得知：

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 24t + 100 & (0 < t \leq 10) \\ 240 & (10 < t \leq 20) \\ -7t + 380 & (20 < t \leq 40) \end{cases}$$

(1) 讲课开始后多少分钟，学生的注意力最集中？能持续多少分钟？

(2) 一道数学难题，需要连续讲解 24 分钟，并且要求学生的注意力至少达到 180，那么经过适当安排，老师能否在学生达到需要的状态下讲授完这道题目？

23. 对于区间 $[a, b]$ ($a < b$)，若函数 $y = f(x)$ 同时满足：① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调函数；② 函数 $y = f(x)$ ， $x \in [a, b]$ 的值域是 $[a, b]$ ，则称区间 $[a, b]$ 为函数 $f(x)$ 的“保值”区间。

(1) 求函数 $y = x^2$ 的所有“保值”区间；

(2) 函数 $y = x^2 + m$ ($m \neq 0$) 是否存在“保值”区间？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由。