2022 北京二十中高一 12 月月考

数　　学

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x||x|<2\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 已知 $a=6^{0.3}$，$b=\ln 0.3$，$c=0.3^{6}$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

3. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $y=\dfrac{1}{|x|}$　　B. $y=\mathrm{e}^{x}$　　C. $y=|\lg x|$　　D. $y=|x|$

4. 已知 $a>b>0$，则下列各选项正确的是（　　）

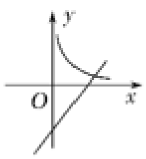
A. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0$　　B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{b}<0$

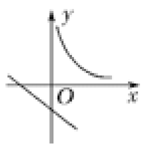
C. $\log_a 2-\log_b 2<0$　　D. $\ln a+\ln b>0$

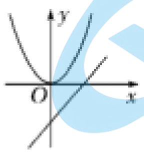
5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6}{x}-\log_2 x$．在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是（　　）

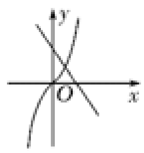
A. $(1,2)$　　B. $(2,3)$　　C. $(3,4)$　　D. $(4,5)$

6. 在同一坐标系内，函数 $y=x^{a}(a\neq 0)$ 和 $y=ax+\dfrac{1}{a}$ 的图象可能是(　　)

A. 

B. 

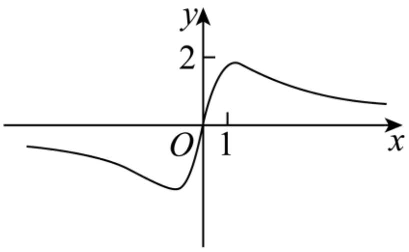
C. 

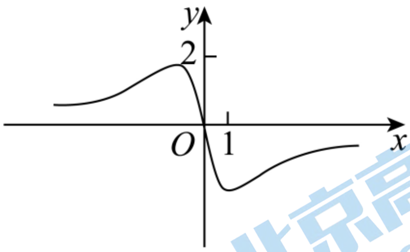
D. 

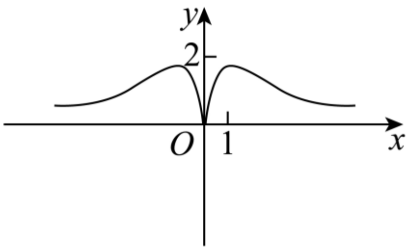
7. 青少年视力是社会普遍关注　问题，视力情况可借助视力表测量．通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录表的数据 V 的满足 $L=5+\lg V$．已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据为（　　）（$\sqrt[10]{10}\approx 1.259$）

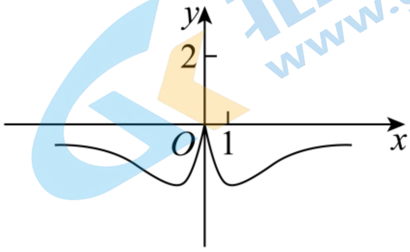
A. 1.5　　B. 1.2　　C. 0.8　　D. 0.6

8. 函数 $y=\dfrac{4x}{x^{2}+1}$ 的图象大致为（　　）

A 

B. 

C. 

D. 

9. 已知函数 $f(x)=ae^{x}+be^{-x}(ab\neq0)$，则“$a+b=0$”是“$f(x)$为奇函数”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\dfrac{1}{2}$. 下列关于函数 $f(x)$ 说法错误的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 是奇函数

B. 函数 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数

C. 函数 $f(x)$ 的值域是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

D. 存在实数 a，使得关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 有两个不相等的实数根

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是__________.

12. 函数 $f(x)=2^{x-1}-1$ 零点为__________.

13. 函数 $f(x)=\log_{a}(2x-3)+1$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图象过定点__________.

14. 已知函数 $f(x)=3^{x}$，$g(x)=|x+a|-2(a\in R)$. 若函数 $y=g(f(x))$ 存在两个零点，则 a 的取值范围是__________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|a^{x}-1|, x\leq1\\(a-2)(x-1), x>1\end{cases}$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$. 给出下列四个结论：

①若 $a\neq2$，则函数 $f(x)$ 的零点是 0；

②若函数 $f(x)$ 无最小值，则 a 的取值范围为 $(0,1)$；

③若 $a>2$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a-2$ 恰有三个不相等的实数根 x_1,x_2,x_3，则 a 的取值范围为 $\left(2,3\right)$，且 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围为 $\left(-\infty,2\right)$．

其中，所有正确结论的序号是_____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 计算下列各式的值.

（1）$8^{\frac{2}{3}}+(1-\sqrt{5})^0+\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[4]{(-9)^2}$；

（2）$\log_5 35+2\lg\sqrt{10}-\log_5\dfrac{1}{50}+\log_{\frac{1}{5}}14+2^{\log_2 3}$

17. 已知对数函数 $f\left(x\right)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（1）若对数函数 $f\left(x\right)$ 的图像经过点 $\left(8,3\right)$，求 a 的值；

（2）若对数函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,2a\right]$ 上的最大值比最小值大 2，求 a 的值.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(ax-1\right)\left(x-2\right)$.

（1）若 $a=-1$，求不等式 $f\left(x\right)>0$ 的解集；

（2）已知 $a>0$，求不等式 $f\left(x\right)>0$ 的解集.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$.

（1）判断函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）判断函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上 单调性，并用单调性定义证明；

（3）若 $f\ \ ax-1\ \ +f\ \ 2-x\ \ >0$ 对任意 $a\in\left(-\infty,2\right]$ 恒成立，求 x 的取值范围.

20. 有一种放射性元素，最初的质量为 500g，按每年 10% 衰减

（1）求两年后，这种放射性元素的质量；

（2）求 t 年后，这种放射性元素的质量 w（单位为：g）与时间 t 的函数表达式；

（3）由（2）中的函数表达式，求这种放射性元素的半衰期（剩留量为原来的一半所需的时间叫作半衰期）.（精确到 0.1 年，已知：$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$）

21. 对于正整数集合 A，记 $A-\left\{a\right\}=\left\{x\middle|x\in A,x\neq a\right\}$，记集合 X 所有元素之和为 $S\left(X\right)$，$S\left(\varnothing\right)=0$．若 $\exists x\in A$，存在非空集合 A_1、A_2，满足：① $A_1\cap A_2=\varnothing$；② $A_1\cup A_2=A-\left\{x\right\}$；③ $S\left(A_1\right)=S\left(A_2\right)$，则称 A 存在“双拆”．若 $\forall x\in A$，A 均存在“双拆”，称 A 可以“任意双拆”．

（1）判断集合 $\left\{1,2,3,4\right\}$ 和 $\left\{1,3,5,7,9,11\right\}$ 是否存在“双拆”？如果是，继续判断可否“任意双拆”？（不必写过程，直接写出判断结果）；

（2）$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，证明：A 不能“任意双拆”；

（3）若 A 可以“任意双拆”，求 A 中元素个数的最小值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】B

【解析】

【分析】利用集合交集的定义求解.

【详解】由$|x|<2$结合绝对值的几何意义解得$-2<x<2$，

所以$A=\{x|-2<x<2\}$，

所以$A\bigcap B=\{-1,0,1\}$，

故选:B.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】与“0”，“1”比较大小即可解决.

【详解】由题知,

$a=6^{0.3}>6^0=1$，

$b=\ln 0.3<\ln 1=0$，

$c=0.3^6$，因为$0<0.3^6<0.3^0$，所以$0<c<1$

所以$b<0<c<1<a$，

故选：A

3. 【答案】D

【解析】

【分析】根据具体函数的性质对选项逐一判断即可.

【详解】对于 A，因为$y=\dfrac{1}{|x|}$，当$x>0$时，$y=\dfrac{1}{x}$，显然$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 A 错误;

对于 B，因为$y=f(x)=\mathrm{e}^x$，所以$f(-1)=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(1)=\mathrm{e}$，即存在$x\in\mathbf{R}$，使得$f(-x)\neq f(x)$，

所以$f(x)$不是偶函数，故 B 错误;

对于 C，因为$y=g(x)=|\lg x|$，所以$g\left(\dfrac{1}{10}\right)=\left|\lg\dfrac{1}{10}\right|=|-1|=1$，$g(10)=|\lg 10|=1$，即

$g\left(\dfrac{1}{10}\right)=g(10)$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上并不单调递增，故 C 错误;

对于 D，因为$y=h(x)=|x|$，易得$h(x)$的定义域为R，即$h(x)$的定义域关于原点对称，

又$h(-x)=|-x|=|x|=h(x)$，所以$h(x)$是在 R 上的偶函数，

当 $x>0$ 时，$h(x)=x$，显然 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 正确.

故选：D.

4. 【答案】B

【解析】

【分析】每个选项依次考查，判断一个命题是假命题只需举一个反例..

【详解】$\because a>b>0,$

A：不妨取 $a=3,b=2$，$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}<0$，A 错；

B：$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 单调递减，$\therefore f(a)<f(b),\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^a-\left(\frac{1}{2}\right)^b<0$，B 对；

C：取 $a=2,b=\frac{1}{2}$，$\log_a 2-\log_b 2=\log_2 2-\log_{\frac{1}{2}} 2=2>0$，C 错；

D：取 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3},\therefore \ln a+\ln b<0,$ D 错；

故选：B

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据零点存在性定理解决即可.

【详解】由题知，函数在定义域内单调递减，且

$f(1)=6-\log_2 1=6>0$，

$f(2)=3-\log_2 2=2>0$，

$f(3)=2-\log_2 3>0$，

$f(4)=\frac{3}{2}-\log_2 4=-\frac{1}{2}<0$，

$f(5)=\frac{6}{5}-\log_2 5<0$，

所以 $f(x)$ 零点的区间是 $(3,4)$,

故选：C

6. 【答案】B

【解析】

【分析】根据幂函数的图象与性质，分 $a>0$ 和 $a<0$ 讨论，利用排除法，即可求解，得到答案.

【详解】由题意，若 $a>0$ 时，函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，此时 $y=ax+\frac{1}{a}$ 递增，排除 D；纵轴上截距为正数，排除 C，即 $a>0$ 时，不合题意；

若 $a<0$ 时，函数 $y=x^{a}$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，又由 $y=ax+\dfrac{1}{a}$ 递减可排除 A，故选 B.

【点睛】本题主要考查了幂函数的图象与性质的应用，其中解答中熟记幂函数的图象与性质是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】根据 L,V 关系，当 $L=4.9$ 时，求出 $\lg V$，再用指数表示 V，即可求解.

【详解】由 $L=5+\lg V$，当 $L=4.9$ 时，$\lg V=-0.1$，

则 $V=10^{-0.1}=10^{-\frac{1}{10}}=\dfrac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx\dfrac{1}{1.259}\approx 0.8$.

故选：C.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】由题意首先确定函数的奇偶性，然后考查函数在特殊点的函数值排除错误选项即可确定函数的图象.

【详解】由函数的解析式可得：$f(-x)=\dfrac{-4x}{x^{2}+1}=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于坐标原点对称，选项 CD 错误；

当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{4}{1+1}=2>0$，选项 B 错误.

故选：A.

【点睛】函数图象的识辨可从以下方面入手：(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置．(2)从函数的单调性，判断图象的变化趋势．(3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性．(4)从函数的特征点，排除不合要求的图象．利用上述方法排除、筛选选项.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】根据 $a+b=0$ 可得 $f(x)$，由奇偶性定义可知充分性成立；由 $f(x)$ 为奇函数可知 $f(-x)=-f(x)$，由此可构造方程求得 $a+b=0$，知必要性成立，由此可得结论.

【详解】当 $a+b=0$ 时，$f(x)=ae^{x}-ae^{-x}$，$\therefore f(-x)=ae^{-x}-ae^{x}=-f(x)$，

$\therefore f\quad x$ 为奇函数，充分性成立；

当 $f(x)$ 为奇函数时，由 $f(-x)=-f(x)$ 得：$ae^{-x}+be^{x}=-ae^{x}-be^{-x}$，

$\therefore a=-b$，即 $a+b=0$，必要性成立；

$\therefore$ “$a+b=0$”是“$f(x)$ 为奇函数”的充分必要条件.

故选：C

10. 【答案】D

【解析】

【分析】根据奇函数的性质、指数函数的性质，结合函数的单调性进行求解判断即可.

【详解】解：对于 A，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\because f(0)=\dfrac{e^0}{1+e^0}-\dfrac{1}{2}=0$，且 $f\left(-x\right)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^x}{1+e^x}=-f\left(x\right)$，

$\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 是奇函数，A 选项正确；

对于 B，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e^x}$，

令 $x_1<x_2$，$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e^{x_1}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+e^{x_2}}=\dfrac{1+e^{x_1}-\left(1+e^{x_2}\right)}{\left(1+e^{x_1}\right)\left(1+e^{x_2}\right)}=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{\left(1+e^{x_1}\right)\left(1+e^{x_2}\right)}$，

$\because x_1<x_2$，$\therefore e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}-e^{x_2}<0$，

而 $1+e^{x_1}>1$，$1+e^{x_2}>1$，

$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{\left(1+e^{x_1}\right)\left(1+e^{x_2}\right)}<0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

因此函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，B 选项正确；

对于 C，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e^x}$，$\because 1+e^x>1$，

$\therefore 0<\dfrac{1}{1+e^x}<1$，则 $-1<-\dfrac{1}{1+e^x}<0$，

$\therefore -\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e^x}<\dfrac{1}{2}$，即 $-\dfrac{1}{2}<f\left(x\right)<\dfrac{1}{2}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的值域是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，C 选项正确；

对于 D，由 B 可知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，因此关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 不可能有两个不相等的实数根，D 选项错误；

故选：D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$(0,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】

【分析】利用具体函数的定义域的求法求解即可.

【详解】因为 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$，

所以 $\begin{cases}x>0\\x-1\neq 0\end{cases}$，则 $x>0$ 且 $x\neq 1$，

故 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

12. 【答案】1

【解析】

【分析】直接解方程即可.

【详解】 $f(x)=2^{x-1}-1=0,\therefore 2^{x-1}=1,\therefore x-1=\log_2 1=0,\therefore x=1.$

故答案为：1

13. 【答案】$(2,1)$

【解析】

【分析】令真数为1，求出 x 的值，再代入函数解析式，即可得出函数 $y=f(x)$ 的图象所过定点的坐标.

【详解】令 $2x-3=1$，得 $x=2$，且 $f(2)=\log_a 1+1=1$.

因此，函数 $y=f(x)$ 的图象过定点 $(2,1)$.

故答案为 $(2,1)$.

【点睛】本题考查对数型函数图象过定点问题，一般利用真数为1求出自变量的值，考查运算求解能力，属于基础题.

14. 【答案】$(-\infty,-2)$

【解析】

【分析】先分类讨论 $a\geq 0$ 时，不符合题意；当 $a<0$ 时，写成分段函数的形式，判断其单调性，利用零点存在定理得出有两个零点的条件即可求解.

【详解】因为 $f(x)=3^x$，$g(x)=|x+a|-2(a\in \mathrm{R})$，

所以 $g(f(x))=|f(x)+a|-2=|3^x+a|-2$，

若 $a\geq 0$ 时，$g(f(x))=3^x+a-2$ 在 R 上为增函数，至多有一个零点，不符合题意；

当 $a<0$ 时，$g(f(x))=|3^x+a|-2=\begin{cases}3^x+a-2, x\geq \log_3(-a)\\-3^x-a-2, x<\log_3(-a)\end{cases}$，

则 $g(f(x))$ 在 $(-\infty,\log_3(-a))$ 单调递减，在 $(\log_3(-a),+\infty)$ 单调递增，

易知 $g(f(x))_{\min}=3^{\log_3(-a)}+a-2=-a+a-2=-2<0$，

当 $x \ge \log_3(-a)$ 时，因为 $y=3^x$ 可取得无穷大值，故不管 a 的取值如何，在 $(\log_3(-a),+\infty)$ 必存在一点

x_1，使得 $g(f(x_1))>0$，

所以 $g(f(x))$ 在 $(\log_3(-a),x_1)\subseteq(\log_3(-a),+\infty)$ 上必存在唯一零点，

因为函数 $y=g(f(x))$ 存在两个零点，

所以当 $x<\log_3(-a)$ 时，$g(f(x))$ 在 $(-\infty,\log_3(-a))$ 上也必须存在一个零点，即在 $(-\infty,\log_3(-a))$ 必存在

一点 x_2，使得 $g(f(x_2))>0$，即 $-3^{x_2}-a-2>0$，

所以 $-a-2>3^{x_2}$ 在 $(-\infty,\log_3(-a))$ 上能成立，

因为指数函数 $y=3^x>0$ 恒成立，且当 $x\to-\infty$ 时，$y=3^x\to 0$，

所以只需 $-a-2>0$ 即可，得 $a<-2$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)$.

故答案为：$(-\infty,-2)$.

15. 【答案】①④

【解析】

【分析】令 $f(x)=0$ 可确定①正确；由函数无最小值可知当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递减，得②错误；分别判断两段函数的单调性，根据严格单调递增的要求知③错误；讨论可知 $a>2$ 时存在有三个不等实根的情况，采用数形结合的方式可得 a 的范围，分别求得 x_1,x_2,x_3，进而得到 $x_1+x_2+x_3$ 的范围，知④正确.

【详解】对于①，令 $|a^x-1|=0$，解得：$x=0$；令 $(a-2)(x-1)=0$，解得：$x=1$（舍）；

$\therefore$ 若 $a\ne 2$，则函数 $f(x)$ 的零点是 $x=0$，①正确；

对于②，当 $x\le 1$ 时，$f(x)=|a^x-1|$，此时 $f(x)_{\min}=f(0)=0$；

若 $f(x)$ 无最小值，则需当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递减，即 $a-2<0$，解得：$a<2$，

又 $a>0$ 且 $a\ne1$，$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,2)$，②错误；

对于③，当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 上分别单调递增；

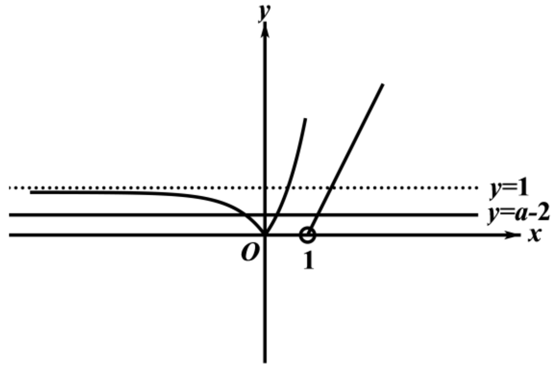
若需 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $|a-1|\le 0$，解得：$a=1$（舍），

$\therefore f\ \ x$ 在 $(0,+\infty)$ 上并非严格单调递增，③错误；

对于④，当 $a=2$ 时，$f(x)=0$ 在 $x>1$ 时有无数解，不满足题意；

当 $0<a<1$ 或 $1<a<2$ 时，$a-2<0$，则当 $x\le1$ 时，方程 $f(x)=a-2$ 无解；当 $x>1$ 时，$f(x)=a-2$ 有唯一解 $x=2$；不满足方程有三个不等实根；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 大致图象如下图所示，



若 $f(x)=a-2$ 有三个不等实根，则 $0<a-2<1$，解得：$2<a<3$；

设 $x_1<x_2<x_3$，

令 $(a-2)(x-1)=a-2$，解得：$x=2$，即 $x_3=2$；

令 $\left|a^x-1\right|=a-2$，解得：$x_1=\log_a(3-a)$，$x_2=\log_a(a-1)$，

$\therefore x_1+x_2=\log_a(3-a)(a-1)=\log_a\left(-a^2+4a-3\right)$；

$\because 2<a<3$，$\therefore -a^2+4a-3\in(0,1)$，$\therefore x_1+x_2\in(-\infty,0)$，

$\therefore x_1+x_2+x_3\in(-\infty,2)$，④正确.

故答案为：①④

【点睛】思路点睛：本题考查分段函数零点、最值、单调性和方程根的分布的问题；求解方程根的分布的基本思路是能够将问题转化为曲线与平行于 x 轴的直线交点个数问题，通过数形结合的方式，利用函数图象来进行分析和讨论，由此确定根的分布情况.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) 5　　(2) 7

【解析】

【分析】根据指数、对数的运算规律化简求解即可.

【小问 1 详解】

解：原式 $=\sqrt[3]{8^2}+1+\left(3^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[4]{81}=\sqrt[3]{4^3}+1+3^{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}-\sqrt[4]{3^4}=4+1+3-3=5$.

【小问 2 详解】

解：原式 $=\log_5(5\times7)+2\lg10^{\frac{1}{2}}-\log_5(25\times2)^{-1}-\log_5(2\times7)+3$

$=1+\log_5 7+1-(-2-\log_5 2)-\log_5 2-\log_5 7+3$

$=1+1+2+3=7$.

17. 【答案】(1) $a=2$

(2) $a=\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）已知对数函数 $f\left(x\right)$ 的图像经过点 $\left(8,3\right)$，将此点代入函数即可求出 a 的值；

（2）对数函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,2a\right]$ 上的最大值比最小值大 2，分类讨论 $a>1$，$0<a<1$ 时函数的单调性，并求出最大值与最小值，列出方程即可求出 a 的值.

【小问 1 详解】

解：若对数函数 $f\left(x\right)$ 图像经过点 $\left(8,3\right)$，则 $f\left(8\right)=\log_a 8=3$，

$\therefore a^3=8$，即 $a=2$.

【小问 2 详解】

解：当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 在 $\left[a,2a\right]$ 上是增函数，

$\therefore f\left(x\right)_{\max}=f\left(2a\right)=\log_a 2a=\log_a 2+1$，$f_{\min}(x)=f(a)=\log_a a=1$，

因为最大值比最小值大 2，

所以 $\log_a 2+1-1=\log_a 2=2$，解得 $a=\sqrt{2}$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 在 $\left[a,2a\right]$ 上是减函数，

$\therefore f\left(x\right)_{\max}=f\left(a\right)=1$，$f\left(x\right)_{\min}=f\left(2a\right)=\log_a 2+1$，

则 $1-\left(\log_a 2+1\right)=-\log_a 2=2$，

$\therefore a^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

综上 $a=\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

18. 【答案】（1）$\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）当 $a=-1$ 时，直接由一元二次不等式 解法可得出所求的答案；

（2）分类讨论：$0<a<\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{2}$ 和 $a>\dfrac{1}{2}$，分别根据一元二次不等式的解法即可得出相应的解集.

【小问 1 详解】

解：当 $a=-1$ 时，$f(x)=(-x-1)(x-2)$，

所以不等式 $f\left(x\right)>0$ 可化为：$(-x-1)(x-2)>0$，解得 $-1<x<2$，

即不等式 $f\left(x\right)>0$ 的解集为：$\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$.

【小问 2 详解】

解：因为 $(ax-1)(x-2)>0$，

当$\frac{1}{a}>2$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，解得$x<2$或$x>\frac{1}{a}$；

当$\frac{1}{a}=2$，即$a=\frac{1}{2}$时，解得$x\neq 2$；

当$\frac{1}{a}<2$，即$a>\frac{1}{2}$时，解得$x<\frac{1}{a}$或$x>2$；

综上所述，当$0<a<\frac{1}{2}$时，不等式$f\left(x\right)>0$的解集为$(-\infty,2)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$；

当$a=\frac{1}{2}$时，不等式$f\left(x\right)>0$的解集为$\left(-\infty,2\right)\bigcup\left(2,+\infty\right)$；

当$a>\frac{1}{2}$时，不等式$f\left(x\right)>0$的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.

19. 【答案】（1）奇函数，理由见解析；

（2）单调递增，证明见解析；

（3）$\left[-1,0\right]$.

【解析】

【分析】（1）根据证明函数的奇偶性步骤解决即可；

（2）根据单调性定义法证明即可；

（3）根据奇偶性，单调性转化解不等式即可.

【小问 1 详解】

$f\left(x\right)=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$为奇函数，理由如下

易知函数的定义域为$\left(-\infty,+\infty\right)$，关于原点对称，

因为$f(-x)=\frac{3^{-x}-3^x}{2}=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数.

【小问 2 详解】

$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上的单调递增，证明如下

因为$f\left(x\right)=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，

设任意的$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

所以$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{3^{x_1}-3^{-x_1}}{2}-\frac{3^{x_2}-3^{-x_2}}{2}=\frac{\left(3^{x_1}-3^{x_2}\right)-\left(3^{-x_1}-3^{-x_2}\right)}{2}$

$$=\frac{\left(3^{x_1}-3^{x_2}\right)+\left(\frac{3^{x_1}-3^{x_2}}{3^{x_1}3^{x_2}}\right)}{2}=\frac{\left(3^{x_1}-3^{x_2}\right)\left(1+\frac{1}{3^{x_1}3^{x_2}}\right)}{2}$$

因为$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，

所以$3^{x_1}-3^{x_2}<0,3^{x_1}3^{x_2}>0$，

所以 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在$\left(0,+\infty\right)$上的单调递增.

【小问 3 详解】

由（1）知 $f(x)$ 为奇函数，由（2）知 $f\left(x\right)$ 在$\left(0,+\infty\right)$上的单调递增，

所以 $f(x)$ 在$\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递增，

因为 $f\left(ax-1\right)+f\left(2-x\right)>0$ 对任意 $a\in\left(-\infty,2\right]$ 恒成立，

所以 $f(ax-1)>-f(2-x)=f(x-2)$，

所以 $ax-1>x-2$ 对任意 $a\in\left(-\infty,2\right]$ 恒成立，

令 $g\left(a\right)=xa+\left(1-x\right)>0$，$a\in\left(-\infty,2\right]$

则只需$\begin{cases}x\le 0\\ g(2)=2x+(1-x)>0\end{cases}$，解得$-1<x\le 0$，

所以 x 的取值范围为$\left(-1,0\right]$.

20. 【答案】（1）405 g

（2） $w=500\times 0.9^t$

（3） 6.6 年.

【解析】

【分析】(1)根据衰减率直接求解即可；(2)根据衰减规律归纳出函数表达式；(3)半衰期即为质量衰减为原来的一半，建立等式，利用换底公式求解.

【小问 1 详解】

经过一年后，这种放射性元素的质量为$500\times(1-0.1)=500\times 0.9$，

经过两年后，这种放射性元素的质量为$500\times(1-0.1)\times(1-0.1)=500\times 0.9^2$，

即两年后，这种放射性元素的质量为 405 g

【小问 2 详解】

由于经过一年后，这种放射性元素的质量为$500\times(1-0.1)=500\times 0.9^1$，

经过两年后，这种放射性元素的质量为$500\times(1-0.1)\times(1-0.1)=500\times 0.9^2$，

……

所以经过 t 年后，这种放射性元素的质量 $w=500\times 0.9^{t}$.

【小问 3 详解】

由题可知 $500\times 0.9^{t}=250$，即 $t=\log_{0.9}0.5=\dfrac{\lg 0.5}{\lg 0.9}=\dfrac{-\lg 2}{2\lg 3-1}\approx 6.6$ 年.

21. 【答案】(1) 答案见解析

(2) 证明见解析　　(3) 7

【解析】

【分析】(1) 根据题中定义判断可得出结论；

(2) 不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，利用反证法，通过讨论集合 A 中去掉的元素，结合“任意双拆”的定义得出等式，推出矛盾，即可证得原结论成立；

(3) 分析可知集合 A 中每个元素均为奇数，且集合 A 中所有元素都为奇数，分析可知 $n\geq 7$，当 $n=7$ 时，$A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$，根据“任意分拆”的定义可判断集合 A 可“任意分拆”，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：对于集合 $\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}-\{4\}=\{1,2,3\}$，且 $1+2=3$，

所以，集合 $\{1,2,3,4\}$ 可双拆，

若在集合中去掉元素 1，因为 $2+3\neq 4$，$2+4\neq 3$，$3+4\neq 2$，故集合 $\{1,2,3,4\}$ 不可“任意分拆”；

若集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 可以“双拆”，则在集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 去除任意一个元素形成新集合 B，

若存在集合 B_1、B_2 使得 $B_1\cap B_2=\varnothing$，$B_1\cup B_2=B$，$S(B_1)=S(B_2)$，则

$S(B)=S(B_1)+S(B_2)=2S(B_1)$，

即集合 B 中所有元素之和为偶数，

事实上，集合 B 中的元素为 5 个奇数，这 5 个奇数的和为奇数，不合乎题意，

故集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 不可“双拆”.

【小问 2 详解】

证明：不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$.

反证法：如果集合 A 可以“任意双拆”，

若去掉的元素为 a_1，将集合 $\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_2+a_5=a_3+a_4$，①，或 $a_5=a_2+a_3+a_4$，②，

若去掉的元素为 a_2，将集合 $\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_1+a_5=a_3+a_4$，③，或 $a_5=a_1+a_3+a_4$，④，

由①−③可得 $a_1=a_2$，矛盾；

由②−③可得 $a_1=-a_2$，矛盾；

由①－④可得 $a_1=-a_2$，矛盾；

由②－④可得 $a_1=a_2$，矛盾.

因此，当 $n=5$ 时，集合 A 一定不能“任意双拆”.

【小问 3 详解】

解：设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

由题意可知 $S(A)-a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 均为偶数，因此 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 均为奇数或偶数.

如果 $S(A)$ 为奇数，则 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 也均为奇数，由于 $S(A)=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 n 为奇数；

如果 $S(A)$ 为偶数，则 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 也均为偶数.

此时设 $a_i=2b_i$，则 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 也是可“任意分拆”的，

重复上述操作有限次，便可得各项均为奇数的“任意分拆”集，此时各项之和也为奇数，

则集合 A 中元素个数 n 为奇数，

综上所述，集合 A 中的元素个数为奇数，

当 $n=3$ 时，显然集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 不可“任意分拆”；

当 $n=5$ 时，由（2）可知，$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 不可“任意分拆”，故 $n\geq 7$.

当 $n=7$ 时，取集合 $A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$，

因为 $3+5+7+9=11+13$，$1+9+13=5+7+11$，$1+3+5+11=7+13$,$1+3+7+11=9+13$，

$1+9+11=3+5+13$，$3+7+9=1+5+13$，$1+3+5+9=7+11$，

则集合 A 可“任意分拆”，

所以，集合 A 中元素个数 n 的最小值为 7.

【点睛】方法点睛：处理集合有关的新定义问题时，关键在于审清题意，合理将所给定义转化为元素与集合、集合与集合之间的关系来处理，本题在证明（2）中的结论时，要充分利用题中定义，结合反证法推出矛盾，进而得出结论成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。