

东城区 2020-2021 学年第二学期期末考试

高一数学

2021.7

本试卷共 4 页，满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 30 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知复数 $z = -2 + i$ ，则 $z + \bar{z} =$ ()

- (A) -4 (B) -2 (C) $2i$ (D) 0

(2) 若 a, b 都是单位向量，则下列结论一定正确的是 ()

- (A) $a = b$ (B) $a \cdot b = 1$ (C) $a // b$ (D) $|a| = |b|$

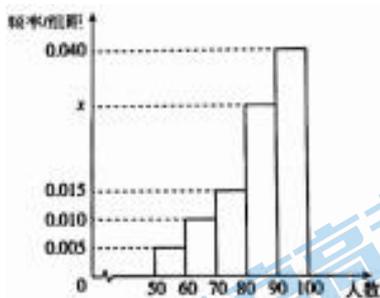
(3) 由随机函数 $RAND$ 生成了在区间 $[0, 1)$ 内的随机数 x ，则下列运算中能将 x 对应到区间 $[a, b)$ 的是 ()

- (A) $ax + b$ (B) $bx + a$ (C) $(b - a)x + a$ (D) $(b - a)x + b$

(4) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 各条棱所在的直线中，与直线 BC_1 异面且垂直的可以是 ()

- (A) AA_1 (B) BC (C) A_1D_1 (D) CD

(5) 某校组织全体学生参加了主题为“建党百年，薪火相传”的知识竞赛，随机抽取了 200 名学生进行成绩统计，发现抽取的学生的成绩都在 50 分至 100 分之间，进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），画出频率分布直方图如图所示，下列说法正确的是 ()



- (A) 直方图中 x 的值为 0.004
(B) 在被抽取的学生中，成绩在区间 $[60, 70)$ 的学生数为 10
(C) 估计全校学生的平均成绩不低于 80 分
(D) 估计全校学生成绩的样本数据的 80% 分位数约为 93 分

(6) 设向量 $a = (\cos \alpha, \sin \beta)$, 则“ $|a|=1$ ”是“ $\alpha = \beta$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 抛掷一颗质地均匀的骰子, 有如下随机事件: $C_1 =$ “点数为 i ”, 其中 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$; $D_1 =$ “点数不大 2”, $D_2 =$ “点数不小于 2”, $D_3 =$ “点数大于 5”; $E =$ “点数为奇数”, $F =$ “点数为偶数”. 下列结论正确的是 ()

- (A) C_1 与 C_2 对立 (B) D_1 与 D_2 互斥 (C) $D_3 \subseteq F$ (D) $E \supseteq (D_1 \cap D_2)$

(8) 将函数 $f(x) = \sin(2x - \varphi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到的图象关于 y 轴对称, 则 φ 的值可以为 ()

- (A) $-\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(9) 若直线 $m \not\subset$ 平面 a , 则下列结论一定成立的个数是 ()

- ① a 内的所有直线与 m 异面;
② a 内存在唯一一条直线与 m 相交;
③ a 内存在直线与 m 平行.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(10) 一条河流的两岸平行, 一艘船从河岸边的 A 处出发到河对岸. 已知船在静水中的速度 v_1 的大小为 $|v_1| = 10\text{m/s}$, 水流速度 v_2 的大小为 $|v_2| = 2\text{m/s}$. 设船行驶方向与水流方向的夹角为 θ , 若船的航程最短, 则 ()

- (A) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (B) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

第二部分 (非选择题 共 70 分)

二、填空题: 共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(11) 在复平面内, 复数 $z = (1+i)^2$ 对应的点 Z 的坐标为 _____; $|z| =$ _____.

(12) 已知某车企从今年开始投产了 A, B, C 三种型号的新能源汽车, 第一个月下线的台数依次为 250, 450, 300, 现用分层抽样的方法从中随机抽取 20 台车进行质量测试, 则某一台 B 型号的新能源汽车被抽取的概率为 _____.

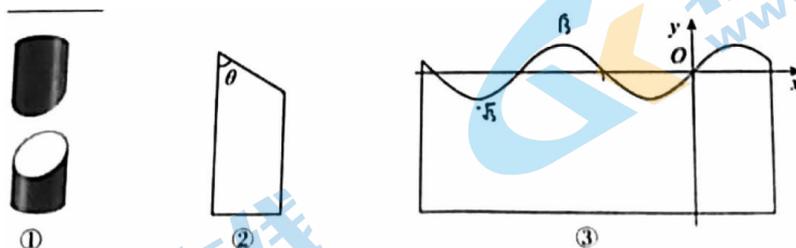
(13) 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 = 2bc, b = 2c$, 则 $\cos A =$ _____.

(14) 已知 $\odot O$ 中弦 $AB = 6$, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.

(15) 已知 α, β 是平面, m 是直线, 从下列五个条件中选择若干个作为已知条件, 能够得到 $m // \beta$ 的是 _____. (填入条件的序号即可)

- ① $\alpha // \beta$; ② $a \perp \beta$; ③ $m \perp a$; ④ $m // \alpha$; ⑤ $m \not\subset \beta$.

(16) 用一张 A4 纸围绕半径为 r cm 的石膏圆柱体包裹若干圈, 然后用裁纸刀将圆柱体切为两段, 如图①所示. 设圆柱体母线与截面的夹角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), 如图②. 将其中一段圆柱体外包裹的 A4 纸展开铺平, 如果忽略纸的厚度造成的误差, 我们会发现剪裁边缘形成的曲线是正弦型曲线, 如图③. 建立适当的坐标系后, 这条曲线的解析式可设为 $f(x) = A \sin \omega x$ ($A > 0, \omega > 0$), 若 $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 则 $r =$ _____ cm, 此时, 当 $\theta =$ _____ 时, 可使 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.



三、解答题: 共 5 小题, 共 46 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(17) (本小题 9 分)

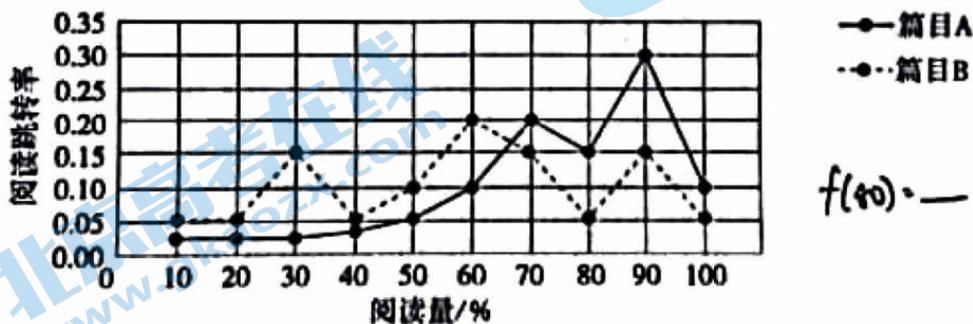
已知 $\tan \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 1 - \sin \beta = \cos 2\beta, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(1) 求 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ 及 $\sin \beta$ 的值;

(2) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

(18) (本小题 9 分)

为开学生视野, 丰富学生的数学学习方式, 某高校数学学院学生会创办了微信公众号《数学乐园》, 设定了“数学史料”“趣题妙解”等栏目, 定期发布文章. 为了扩大微信公众号的影响力, 后台统计了反映读者阅读情况的一些数据, 其中阅读跳转率 $f(x)$ 记录了在阅读某文章的所有读者中, 阅读至该篇文章总量的 $x\%$ 时退出该页面的读者占阅读此文章所有读者的百分比. 例如: 阅读跳转率 $f(20) = 5\%$ 表示阅读某篇文章的所有读者中, 阅读量至该篇文章总量的 20% 时退出该页面的读者占阅读此篇文章的所有读者的 5%. 现从“数学史料”“趣题妙解”专栏中各随机选取一篇文章. 分别记为篇目 A, B, 其阅读跳转率的折线图如图所示. 用频率来估计概率.



(1) 随机选取一名篇目 A 的读者, 估计他退出页面时阅读量大于文章总量的 80% 的概率;

(2) 现用比例分配的分层随机抽样的方法, 在阅读量没有达到 30% 的篇目 B 的读者中抽取 6 人, 任选其中 2 人进行访谈, 求这两人退出页面时阅读量都为文章总量的 10% 的概率;

(3) 请依据图中的数据, 比较篇目 A 和篇目 B 的阅读情况, 写出一个结论, 并选择其中一个栏目提出你的优化建议.

(19) (本小题 9 分)

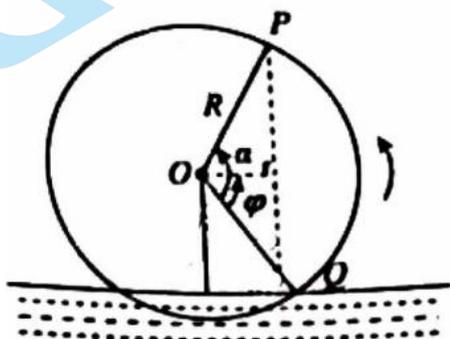
水车是一种利用水流的动力进行灌溉的工具, 工作示意图如图所示. 设水车 (即圆周) 的直径为 3 米, 其中心 (即圆心) O 到水面的距离 b 为 1.2 米, 逆时针匀速旋转一圈的时间是 80 秒. 水车边缘上一点 P 距水面的高度为 h (单位: 米), 水车逆时针旋转时间为 t (单位: 秒). 当点 P 在水面上时高度记为正值; 当点 P 旋转到水面以下时, 点 P 距水面的高度记为负值. 过点 P 向水面作垂线, 交水面于点 M , 过点 O 作 PM 的垂线, 交 PM 于点 N . 从水车与水面交于点 Q 时开始计时 ($t=0$), 设 $\angle QON = \varphi$, 水车逆时针旋转 t 秒转动的角的大小记为 a .

(1) 求 h 与 t 的函数解析式;

(2) 当雨季来临时, 河流水量增加, 点 O 到水面的距离减少了 0.3 米, 求 $\angle QON$ 的大小 (精确到 1°);

(3) 若水车转速加快到原来的 2 倍, 直接写出 h 与 t 的函数解析式.

(参考数据: $\sin \frac{\pi}{5} \approx 0.60, \sin \frac{3\pi}{10} \approx 0.80, \sin \frac{2\pi}{5} \approx 0.86$)



(20) (本小题 9 分)

已知点 $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(1, 2)$.

(1) 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 求点 P 的坐标;

(2) 已知 $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$.

①若点 Q 在直线 $AB: y = -x + 3$ 上, 试写出 λ, μ 应满足的数量关系, 并说明你的理由;

②若 $\triangle QAB$ 为等边三角形, 求 λ, μ 的值.

(21) (本小题 10 分)

如图①, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4, AD=2, E, F$ 分别为 AB, DC 的中点. 将四边形 $AEFD$ 沿 EF 折起至四边形 A_1EFD_1 的位置, 如图②.

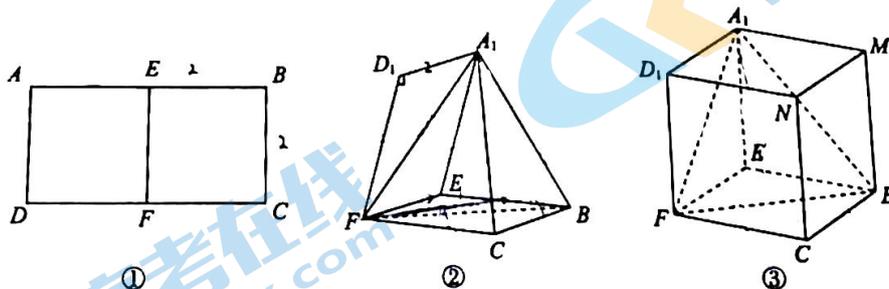
(1) 求证: $EF \perp$ 平面 A_1EB ;

(2) 若点 A_1 在平面 $EFCB$ 上的射影为 BE 的中点, 求三棱锥 $F-A_1BC$ 的体积;

(3) 当平面 A_1EFD_1 与平面 $EFCB$ 垂直时, 作正方体 $A_1D_1NM-EFCB$ 如图③. 若平面 $a \parallel$ 平面 A_1FB , 且平面 a 截该正方体所得图形的面积为 S .

①若 $C \in a$, 则 $S =$ _____;

② S 的最大值为_____. (直接写出结果)



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯