洛阳市 2019——2020 学年高中三年级期中考试

数学试卷(理)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷1至2页,第Ⅱ卷3至4页.共150分.考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上.
2. 考试结束,将答题卡交回.

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $iz=1+2i$,则 $|z|$ 等于

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 1　　D. 3

2. 已知集合 $A=\{x\mid\log_3(x-2)\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid 2x-m>0\}$,若 $A\subseteq B$,则实数 m 的取值范围是

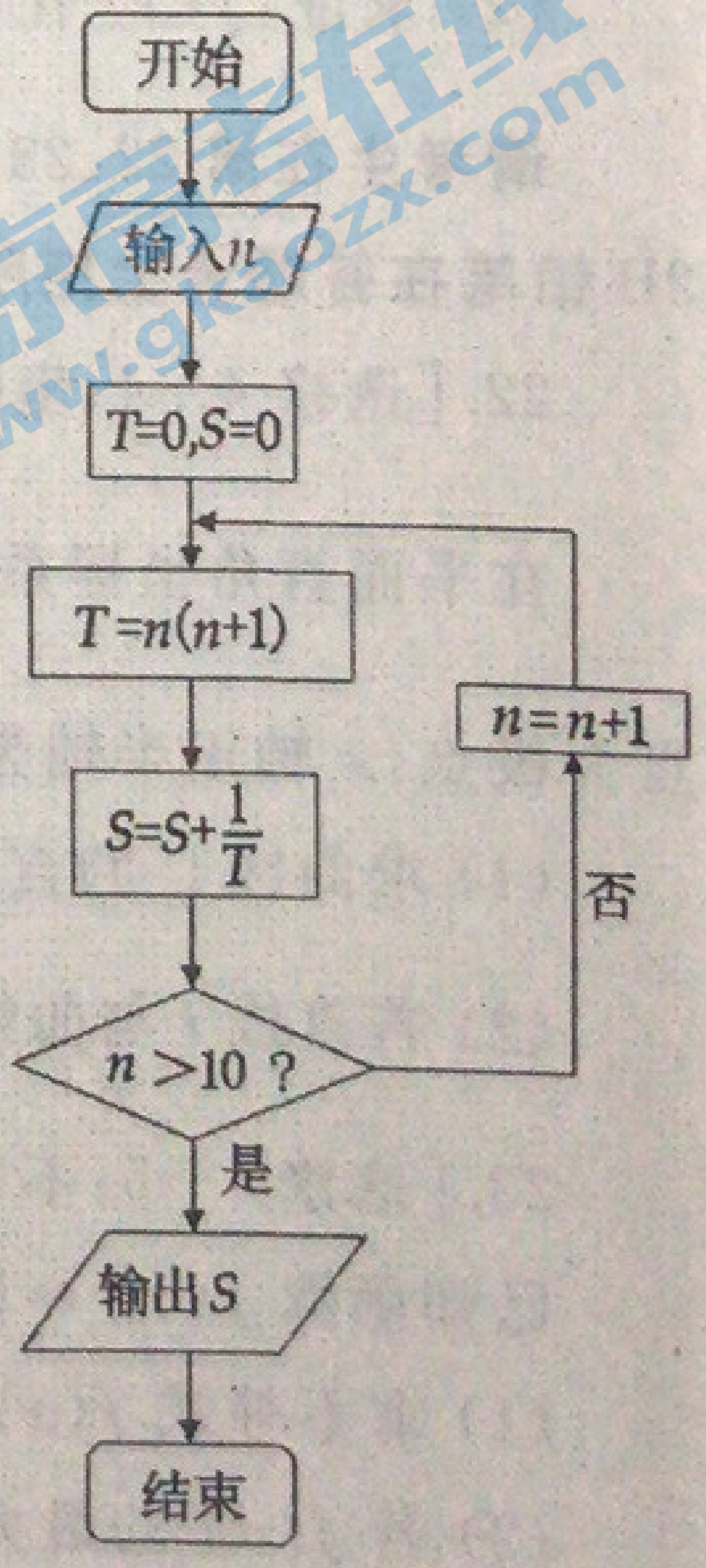
A. $(-\infty,4]$　　B. $(-\infty,4)$

C. $(-\infty,22)$　　D. $(-\infty,22]$

3. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}y-x\leqslant 1,\\ x+y\leqslant 3,\\ 4y\geqslant 1.\end{cases}$ 则 $x+3y$ 的最大值为

A. 0　　B. 3

C. 4　　D. 7



4. 执行右面的程序框图,若输出的 $S=\frac{1}{4}$,则输入的 n 值为

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 已知 $a=\frac{3}{5}$,$b=\log_{0.2}0.1$,$c=\log_3 2$,则 a,b,c 的大小关系是

A. $a<c<b$　　B. $c<a<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

6. 在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P,Q,R分别为棱AA_1,BC,C_1D_1的中点，经过P,Q,R三点的平面为α，平面α被此正方体所截得截面图形的面积为

A. $3\sqrt{3}$　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

7. 已知偶函数$f(x)$的图象关于$(1,0)$对称，且当$x\in(0,1)$时，$f(x)=x^2$，则$x\in(9,10)$时，$f(x)=$

A. x^2　　B. $-x^2$　　C. $(x-8)^2$　　D. $-(10-x)^2$

8. 已知p:函数$y=\ln(x^2-ax+1)$的定义域为$\mathbf{R}$，q:$e^x>ax$对任意实数x恒成立，若$p\wedge q$真，则实数a的取值范围是

A. $[0,2)$　　B. $[2,e)$　　C. $(-2,e)$　　D. $[0,e)$

9. 双曲线C的对称轴与坐标轴重合，两个焦点分别为F_1,F_2，虚轴的一个端点为A，若$\triangle AF_1F_2$是顶角为120°的等腰三角形，则双曲线C的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$或$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$或$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+x, x\in(0,1],\\ \lg x, x\in(1,+\infty),\end{cases}$若$f(x)=a$有三个不等实数根$x_1,x_2,x_3$，则$x_1+x_2+x_3$的取值范围是

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(2,1+\sqrt[4]{10})$　　D. $[2,1+\sqrt[4]{10}]$

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=(1+\cos^2\frac{n\pi}{2})a_n+sin^2\frac{n\pi}{2},n\in\mathbf{N}^*$则$a_{2019}\cdot\log_2a_{2020}$的值为

A. 0　　B. 1　　C. 1010^2　　D. 1010^{1010}

12. 菱形$ABCD$的边长为2，$\angle ABC=60^\circ$，沿对角线AC将三角形ACD折起，当三棱锥$D-ABC$体积最大时，其外接球表面积为

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$　　B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}\pi$　　C. $\frac{20}{9}\pi$　　D. $\frac{20}{3}\pi$

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2$,则 $|\vec{a}|=$ ________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{6n-31}{3n-17}$,若 a_i, a_j 分别是该数列的最大项和最小项,则 $i+j=$ ________.

15. 已知函数 $f(x)=\sin x+2\cos x$,在 x_0 处取得最小值,则 $f(x)$ 的最小值为 ________,此时 $\cos x_0=$ ________.

16. 已知点 P 是曲线 $x=\dfrac{1}{4}y^2$ 上任意一点,过点 P 向 y 轴引垂线,垂足为 H,点 Q 是曲线 $y=e^x$ 上任意一点,则 $|PH|+|PQ|$ 的最小值为________.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2^n-1$,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$, $b_{n+1}-2b_n=8a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.(本小题满分 12 分)

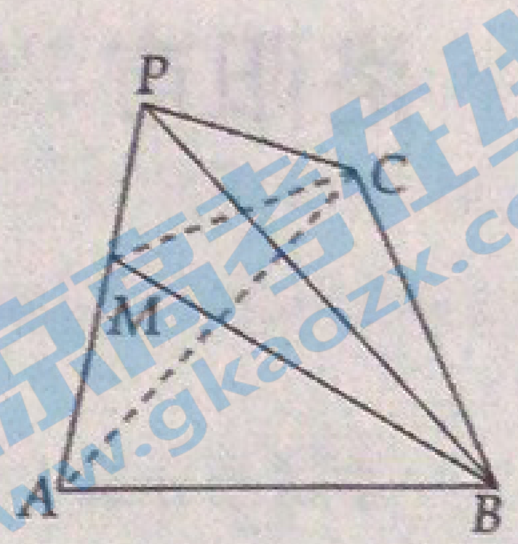
在 $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 中点,$AB=3$, $AC=\sqrt{13}$, $AD=\sqrt{7}$.

(1) 求边 BC 的长;

(2) 求 $\triangle ABD$ 内切圆半径.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle PAC$ 为正三角形，M 为棱 PA 的中点，$AB\perp AC$，$AC=\frac{1}{2}BC$，平面 $PAB\perp$ 平面 PAC.



（1）求证：$AB\perp$ 平面 PAC；

（2）若 Q 是棱 AB 上一点，$V_{Q-BMC}=\frac{1}{4}V_{P-ABC}$，求二面角 $Q-MC-A$ 的大小.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，且经过点 $P(2,2)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $Q(1,-1)$ 的直线与椭圆 C 相交于 M,N 两点（与点 P 不重合），试判断点 P 与以 MN 为直径的圆的位置关系，并说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\cos x-2x$.

（1）求 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求证：$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上仅有 2 个零点.

请考生在第 22、23 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分. 做答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号后的方框涂黑.

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程；

（2）若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，设 $M(1,1)$，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-3|-2|x|$.

（1）求不等式 $f(x)\geqslant 2$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 的最大值为 m，a,b,c 为正数且 $a+b+c=m$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 3$.

洛阳市2019——2020学年高中三年级期中考试

数学试卷参考答案(理)

一、选择题

1—5 BADCA　　6—10 ADABC　　11—12CD

二、填空题

13. $2\sqrt{2}$　　14. 11　　15. $-\sqrt{5}$, $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　16. $\sqrt{2}-1$

三、解答题

17. 解:(1) 当 $n \geqslant 2$ 时,$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$.　……2 分

$n = 1$ 时,$a_1 = 2^1 - 1 = 1$,显然 a_1 适合上式.　……3 分

综上可得 $a_n = 2^{n-1}$.　……4 分

(2) 由(1) 知 $a_n = 2^{n-1}$,代入 $b_{n+1} - 2b_n = 8a_n$ 得 $b_{n+1} - 2b_n = 2^{n+2}$,　……5 分

即$\dfrac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{b_n}{2^n} = 2$.　……6 分

又$\dfrac{b_1}{2} = 1$,　……7 分

所以数列$\left\{\dfrac{b_n}{2^n}\right\}$是以首项为1,公差为2的等差数列.

所以$\dfrac{b_n}{2^n} = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.　……8 分

所以 $b_n = (2n-1)\cdot 2^n$　……9 分

$T_n = 1\times 2^1 + 3\times 2^2 + 5\times 2^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^n$.　①

① × 2 得:$2T_n = 1\times 2^2 + 3\times 2^3 + 5\times 2^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n+1}$.　②

② − ① 得:$T_n = -2 - 2\times 2^2 - 2\times 2^3 - \cdots - 2\times 2^n + (2n-1)\cdot 2^{n+1}$.

$T_n = -2 - 2\times\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} + (2n-1)\cdot 2^{n+1}$.

$T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1} + 6$.　……12 分

18. 解:(1) 设 $BD = x$,则 $BC = 2x$,

在 $\triangle ABD$ 中由余弦定理得 $\cos\angle ABD = \dfrac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB\cdot BD} = \dfrac{x^2 + 9 - 7}{2\times 3\cdot x}$　……2 分

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得 $\cos\angle ABC = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot BD} = \dfrac{4x^2 + 9 - 13}{2\times 3\times 2x}$.

易知 $\angle ABC = \angle ABD$ 所以$\dfrac{x^2 + 9 - 7}{2\times 3\cdot x} = \dfrac{4x^2 + 9 - 13}{2\times 3\times 2x}$　……5 分

解得 $x = 2$(-2 舍去),所以 $BC = 4$.　……6 分

(2) 由(1) 可知 $\cos B = \dfrac{1}{2}$,且 $B \in (0,\pi)$,所以 $\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　……7 分

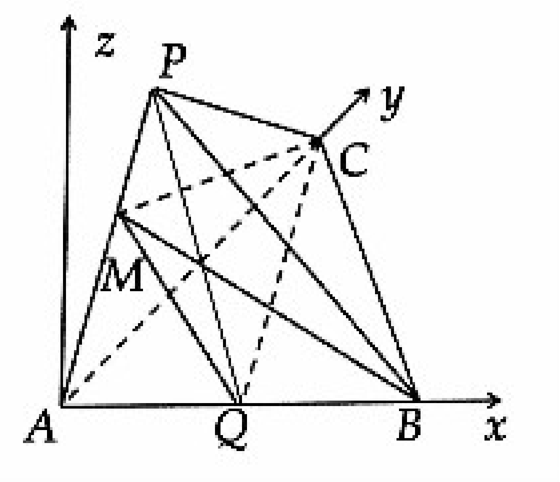
所以 $\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BD\cdot \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ……9 分

设 $\triangle ABD$ 内切圆半径为 r,则 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}(AB+BD+AD)\cdot r$. ……11 分

$\therefore\quad r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$.

即 $\triangle ABD$ 内切圆半径为$\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$. ……12 分

19. 解:(1) 因为 $\triangle PAC$ 为正三角形,M 为棱 PA 的中点,则 $CM\perp PA$, ……1 分
又 $\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAC,平面 $PAB\cap$ 平面 $PAC=PA$,
$\therefore\quad CM\perp$ 平面 PAB, $\quad\therefore\quad CM\perp AB$. ……2 分
又 $CA\perp AB$,且 $CA\subset$ 平面 PAC,$CM\subset$ 平面 PAC,$CA\cap CM=C$, ……3 分



$\therefore\quad AB\perp$ 平面 PAC. ……4 分
(2) 连接 PQ,MQ,由题意及(1)得 $V_{Q-BMC}=V_{M-BQC}$
$=\frac{1}{2}V_{P-BQC}=\frac{1}{4}V_{P-ABC}$,$S_{\triangle QBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,
$\therefore\quad Q$ 为线段 AB 的中点, ……5 分
过点 A 作平面 ABC 的垂线 AH,以 A 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AH}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系. 不妨设 $AC=2$,$BC=4$,则 $P(0,1,\sqrt{3})$,$A(0,0,0)$,$C(0,2,0)$,$Q(\sqrt{3},0,0)$,
$M(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$\overrightarrow{CM}=(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,$\overrightarrow{CQ}=(\sqrt{3},-2,0)$, ……7 分
易知平面 AMC 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$, ……8 分
设平面 QMC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$,

$\therefore\quad \begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \sqrt{3}x-2y=0.\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$,则平面 QMC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(2,\sqrt{3},3)$. ……10 分

$\therefore\quad \cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{2}$. ……11 分

故二面角 $Q-MC-A$ 的大小为$\frac{\pi}{3}$. ……12 分

20. (1) 设椭圆的焦距为 $2c$,则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, ① ……1 分

又$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$, ② $a^2=b^2+c^2$, ③ ……2 分

由 ①,②,③ 解得:$a^2=16$,$b^2=\frac{16}{3}$, ……3 分

椭圆 C 的方程是$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$. ……4 分

(2) 当直线 MN 与 x 轴不垂直时,设直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)-1$,与椭圆 C 的方程联立,$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1,\\ y=k(x-1)-1.\end{cases}$

消去 y 得 $(1+3k^2)x^2-6k(k+1)x+3k^2+6k-13=0$. ……5 分

$\Delta>0$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2+6k}{1+3k^2}$,

$x_1\cdot x_2=\dfrac{3k^2+6k-13}{1+3k^2}$, ……6 分

$\overrightarrow{PM}=(x_1-2,y_1-2)$,$\overrightarrow{PN}=(x_2-2,y_2-2)$, ……7 分

故$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-2)(y_2-2)$

$=(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1-k-3)(kx_2-k-3)$, ……8 分

$=(1+k^2)x_1x_2-(k^2+3k+2)(x_1+x_2)+k^2+6k+13$ ……9 分

$=(1+k^2)\dfrac{3k^2+6k-13}{1+3k^2}-(k^2+3k+2)\times\dfrac{6k^2+6k}{1+3k^2}+k^2+6k+13$

$=\dfrac{(3k^4+6k^3-10k^2+6k-13)-(6k^4+24k^3+30k^2+12k)+(3k^4+18k^3+40k^2+6k+13)}{1+3k^2}$

$=0$, ……10 分

当 $MN\perp x$ 轴时,$M(1,\sqrt{5})$,$N(1,-\sqrt{5})$,$\overrightarrow{PM}=(-1,\sqrt{5}-2)$,$\overrightarrow{PN}=(-1,-\sqrt{5}-2)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$ 成立. ……11 分

故 $PM\perp PN$,点 P 在以 MN 为直径的圆上. ……12 分

21. 解:(1) $f'(x)=e^x+\sin x-2$, ……1 分

$f'(0)=-1$,$f(0)=0$,

$\therefore$ $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-0=-(x-0)$,

即 $y=-x$. ……3 分

(2) 令 $g(x)=f'(x)=e^x+\sin x-2$,$g'(x)=e^x+\cos x$,

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$g'(x)>0$,

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……4 分

而 $g(-\dfrac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-3<0$,$g(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$,

由零点存在性定理知:$g(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上有唯一零点,

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上有唯一零点. ……6 分

又 $f'(0)=-1<0$,$f'(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}+1-2>0$,

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上递增且有唯一零点 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, ……7 分

$\therefore\ x\in(-\frac{\pi}{2},\alpha)$ 时, $f'(x)<0$; $x\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 时 $f'(x)>0$,

$\therefore\ f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\alpha)$ 上单调递减,在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增, ……8 分

又 $f(0)=0$, $f(\alpha)<0$,

结合 $f(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}+\pi>0$. $f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi$,

$\because\ e^3>16>\pi^2$, $\therefore e^{\frac{\pi}{2}}>e^{\frac{3}{2}}>\pi$, $\therefore\ f(\frac{\pi}{2})>0$.

由零点存在性定理知: $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\alpha)$ 上有一个零点 0,

在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上有一个零点. ……10 分

$x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x)=e^x+\sin x-2\geqslant e^x-3\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}-3>0$,

$\therefore\ f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上单调递增, $\therefore\ f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{2})>0$ 此时 $f(x)$ 无零点,

综上, $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上仅有 2 个零点. ……12 分

22. (1) $\because \begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$, ……1 分

曲线 C 的直角坐标方程为: $x^2+y^2-2x-3=0$,

即: $(x-1)^2+y^2=4$. ……3 分

由 $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$, 消去 t 可得: $\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}+1$,

$\therefore$ 直线 l 的普通方程为: $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-1=0$. ……5 分

(2) 直线 l 的参数方程可写成:

$\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}m\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}m\end{cases}$ (m 为参数),

代入曲线 C 的直角坐标方程可得: ……6 分

$m^2+\sqrt{3}m-3=0$. 显然 $\Delta>0$, ……7 分

$\therefore\ m_1+m_2=-\sqrt{3}$, $m_1\cdot m_2=-3$ ……8 分

$\therefore\ \frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|m_1|}+\frac{1}{|m_2|}=\frac{|m_1|+|m_2|}{|m_1m_2|}=\frac{|m_1-m_2|}{|m_1m_2|}=$

$\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|m_1m_2|}=\frac{\sqrt{3+12}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}$. ……10 分

23. (1) $f(x)=|x-3|-2|x|=\begin{cases}x+3, x\leqslant 0,\\ -3x+3, 0<x<3,\\ -x-3, x\geqslant 3.\end{cases}$ ……1 分

$\therefore$ 原不等式等价于 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ x+3\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<3\\ -3x+3\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 3\\ -x-3\geqslant 2\end{cases}$, ……3 分

解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $0<x\leqslant\frac{1}{3}$. ……4 分

$\therefore$ 不等式$f(x)\geqslant 2$的解集为$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant \frac{1}{3}\}$. ……5分

(2) 由(1),函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增,在$[0,+\infty)$上单调递减.

$\therefore$ $f(x)_{\max}=f(0)=3$. ……6分

所以$m=3$,即$a+b+c=3$. ……7分

$\because$ $a^2+b^2\geqslant 2ab, a^2+c^2\geqslant 2ac, c^2+b^2\geqslant 2cb$,

$\therefore$ $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+ac+bc)$. ……8分

$\therefore$ $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$, ……9分

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$. 当且仅当$a=b=c=1$时等号成立. ……10分