# 参考答案及解析

## 数学

**一、单选题**

1. A 【解析】因为 $B=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left[-3,-\frac{1}{2}\right)$. 故选 A.

2. C 【解析】由题意知 $S_3=3a_1+3d=6$，$S_5=5a_1+10d=25$，解得 $a_1=-1$，$d=3$，所以 $a_4=a_1+3d=8$. 故选 C.

3. C 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$，所以 $|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3|\boldsymbol{a}|^2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2}{3}\pi$. 故选 C.

4. B 【解析】由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由 $f(-x)=-f(x)$，得 $f(x)$ 为奇函数，且 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，由 $f(2m+1)+f(1-m)>0$ 得 $f(2m+1)>f(m-1)$，即 $2m+1>m-1$，解得 $m>-2$. 故选 B.

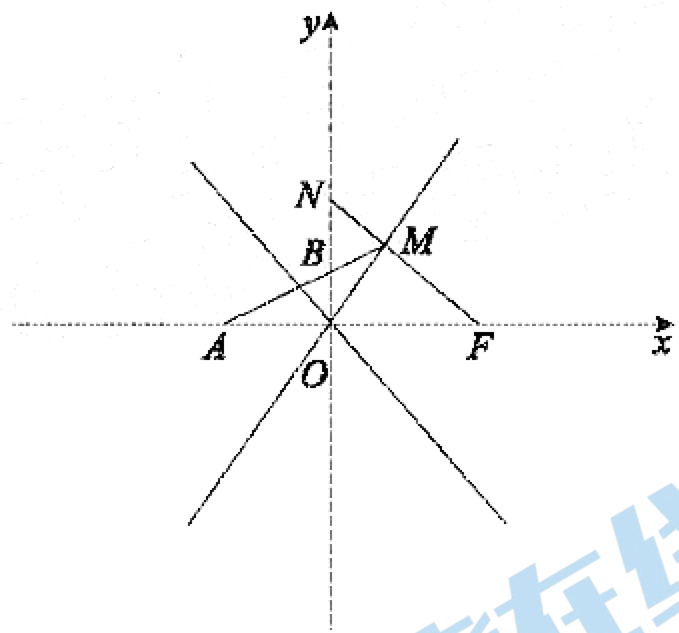
5. D 【解析】中国与沿线国家贸易进口额的极差为 4 833.6－3 661.1＝1 172.5 亿美元，所以 A 错误；对于 B，由已知图中的数据可得出口额的中位数为 $\frac{5\ 690.9+5\ 874.8}{2}=5\ 782.85$，B 错误；对于 C，2011 年至 2016 年的贸易顺差额依次为 142.9，428.6，976.8，1 536.8，2 262.1，2 213.7，2016 年开始下降，故 C 错误；由图表可知中国与沿线国家前四年的贸易出口额比贸易进口额波动性更大，故 D 正确. 故选 D.

6. B 【解析】由题意知 $C=10^n\times 57$，$C=15^n\cdot t$，得 $10^n\times 57=15^n\times t$，所以 $t=\left(\frac{2}{3}\right)^n\times 57$，因为 $n=\log_{\frac{3}{2}}2$，所以 $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}2}\times 57=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}}\times 57=\frac{1}{2}\times 57=28.5$ h. 故选 B.

7. C 【解析】由 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{6}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$，得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$，因为 $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sqrt{17}}{3}$，所以 $\frac{\sin\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{17}}{3}}=\frac{4\sqrt{17}}{51}$. 故选 C.

8. A 【解析】记 $M$ 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线 $bx-ay=0$ 上的点，因为 $|ON|=2|BM|$，且 $|OB|=|BN|$，所以 $\angle BOM=\angle BMO$，$\angle BMN=\angle BNM$，所以 $NF\perp OM$，因为右焦点 $F(c,0)$ 到渐近线 $bx-ay=0$ 的距离 $|MF|=\frac{bc}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$，所以 $|OM|=|OA|=a$，所以 $\angle BMO=\angle BAO$，所以 $\angle BOM=\angle BAO$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle OMN$，所以 $\angle ABO=\angle ONM$，又因为 $\angle MNB=\angle NMB$，$\angle ABO=\angle NBM$，所以 $\triangle MNB$ 为等边三角形，所以 $\angle FNO=60°$，所以 $\angle MFO=30°$，即 $\frac{b}{a}=\tan 60°=\sqrt{3}$，所以

$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$. 故选 A.

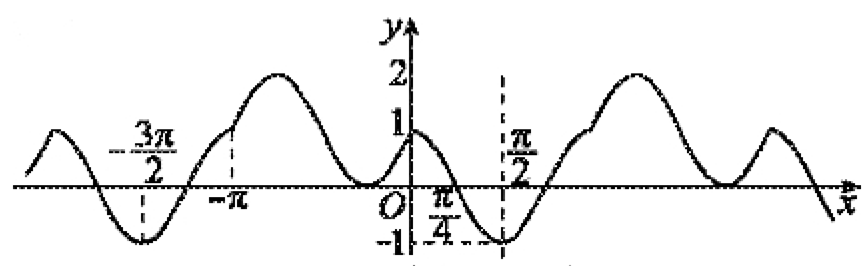



二、多选题

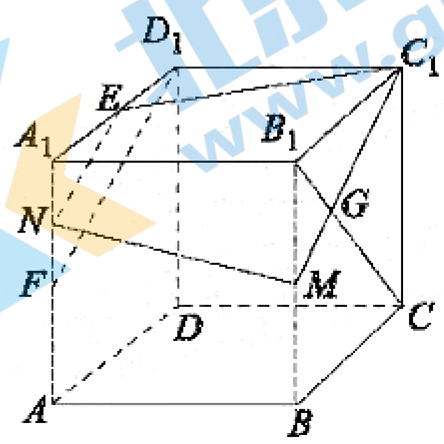
9. AC 【解析】因为 $z_1-2z_2$ 为实数，所以 $a-2(a-1)=0$，解得 $a=2$，所以 $z_1=3+2i$，$z_2=1+i$，所以 $|z_1|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$，故 A 正确，$z_1z_2=(3+2i)(1+i)=1+5i$，故 B 错误，因为 $(1+i)^2=2i$，所以 $z_2^{10}=(2i)^5=32i$，故 C 正确，因为 $\overline{z_1}=3-2i$，所以 $\frac{\overline{z_1}}{z_2}=\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$，其对应的点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ 在第四象限，故 D 错误. 故选 AC.

10. BD 【解析】因为 $n+1=13$，所以 $n=12$. 所有奇数项的二项式系数和为 $2^{11}$，故 A 错误，令 $x=1$，得所有项的系数和为 $3^{12}$，故 B 正确，由二项式系数的性质可知二项式系数最大的项为第 7 项，故 C 错误，因为 $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$ 展开式通项为 $T_{r+1}=C_{12}^{r}\cdot(2x)^{12-r}\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{r}=2^{12-r}C_{12}^{r}x^{12-\frac{4}{3}r}$，当 $12-\frac{4}{3}r$ 为整数时，$r=0,3,6,9,12$，共有 5 项，故 D 正确. 故选 BD.

11. BC 【解析】因为 $f(\pi)=1$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$，所以 $f(x)$ 不关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，故 A 项错误；易知 $2\pi$ 为 $f(x)$ 的周期，当 $2k\pi\leqslant x\leqslant\pi+2k\pi$ 时，$f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$，当 $\pi+2k\pi<x\leqslant 2\pi+2k\pi$ 时，$f(x)=(\cos x+\sin x)^2=\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$，作出 $f(x)$ 的图象如图所示，由图象可知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]$ 内单调递增，故 B 正确，因为 $f(x_1)+f(x_2)=-2$，所以 $f(x_1)=-1$，$f(x_2)=-1$，$x_1=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$，$x_2=\frac{\pi}{2}+2k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $x_1+x_2=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 C 项正确，由图象可知 $f(x)$ 的图象不关于 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 对称，故 D 项错误. 故选 BC.



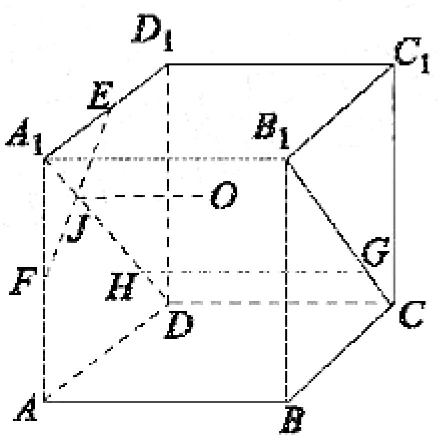

12. ACD 【解析】因为 $\overrightarrow{B_1G}=\lambda\overrightarrow{B_1C}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，所以点 $G$ 为线段 $B_1C$ 上一个动点，故 $G$ 点到平面 $ADD_1A_1$ 距离是定值，为 4，因为 $\triangle A_1EF$ 面积是定值，故三棱锥 $V_{G-EFA_1}$ 是定值，又 $V_{G-EFA_1}=V_{F-EGA_1}$，故 A 正确；延长 $C_1G$ 交棱 $BB_1$ 于点 $M$，则 $\frac{B_1M}{C_1C}=\frac{B_1G}{GC}=\frac{1}{2}$，即 $M$ 是 $BB_1$ 的中点，取 $A_1F$ 的中点 $N$，连接 $EN,MN,EC_1$，




因为 $EN\,/\!/\,D_1F$，$D_1F\,/\!/\,C_1M$，所以 $EN\,/\!/\,C_1M$，所以平面 $ENMC_1$ 为平面 $EGC_1$ 截正方体所得的截面，因为 $EC_1=C_1M=2\sqrt{5}$，$EN=\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{17}$，所以四边形 $ENMC_1$ 的周长为 $5\sqrt{5}+\sqrt{17}$，故 B 项错误；由 B 选项知 $FM\perp$ 平面 $BCC_1B_1$，当点 $G$ 在 $B_1C$ 上移动时，连接 $MG$，则 $\angle FGM$ 为直线 $FG$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成的角，因为 $MG$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，最大值

为 $2\sqrt{5}$，所以 $\tan\angle FGM\in\left[\frac{2\sqrt{5}}{5},2\sqrt{2}\right]$，故 C 正确；

如图所示，



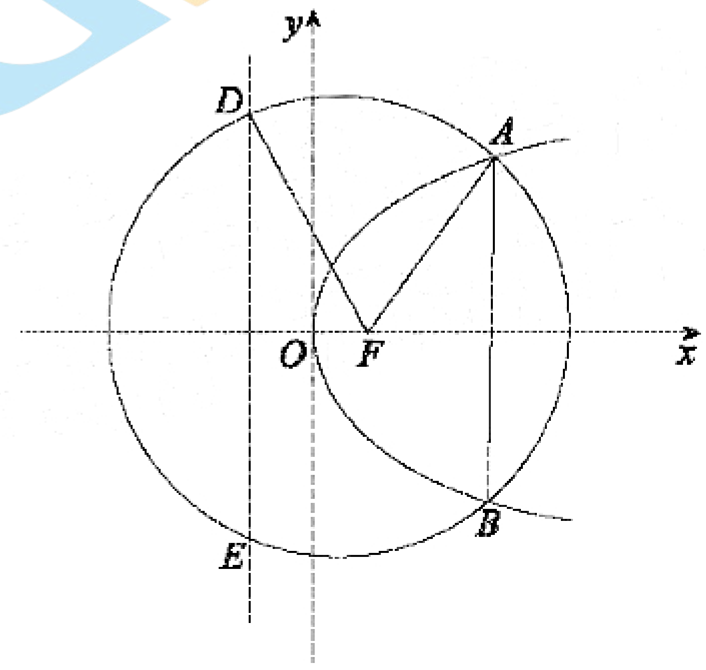

连接 $A_1D$，交 $EF$ 于点 $J$，则 $J$ 为 $EF$ 的中点，$A_1J=JE=JF=\sqrt{2}$，在 $A_1D$ 上取点 $H$，使 $\overrightarrow{A_1H}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1D}$，连接 $GH$，则 $GH/\!/CD$，所以 $GH\perp$ 平面 $ADD_1A_1$，$GH=4$，设三棱锥 $A_1-EFG$ 的外接球球心为 $O$，则 $OA_1=OG=OE=OF$，由 $OA_1=OE=OF$ 及 $A_1J=JE=JF=\sqrt{2}$ 得点 $O$ 在过点 $J$ 且与 $GH$ 平行的直线上，设 $OJ=h$，因为 $OA_1^2=OJ^2+A_1J^2=h^2+(\sqrt{2})^2$，$OG^2=(4-h)^2+(2\sqrt{2})^2$，所以 $h^2+(\sqrt{2})^2=(4-h)^2+(2\sqrt{2})^2$，解得 $h=\frac{11}{4}$，所以 $OA_1^2=\frac{153}{16}$，所以三棱锥 $A_1-EFG$ 的外接球表面积为 $4\pi\times\frac{153}{16}=\frac{153}{4}\pi$，故 D 项正确．故选 ACD.

三、填空题

13.17 【解析】因为 $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=(m+2n)\left(\frac{4}{m}+\frac{2}{n}\right)=8+\frac{8n}{m}+\frac{2m}{n}\geqslant 8+2\sqrt{\frac{8n}{m}\times\frac{2m}{n}}=16$，当且仅当 $\frac{8n}{m}=\frac{2m}{n}$，即 $\begin{cases}m=\frac{1}{2},\\ n=\frac{1}{4},\end{cases}$ 时等号成立，所以 $\frac{4}{m}+\frac{n+2}{n}=\frac{4}{m}+\frac{2}{n}+1\geqslant 17$.

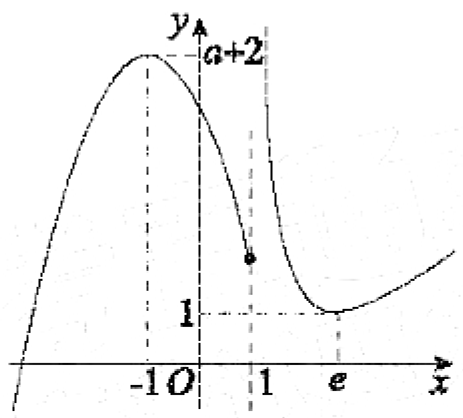
14. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 【解析】取 $BC$ 的中点 $E$，连接 $SE,DE$，则 $\angle SDE$（或其补角）为异面直线 $SD$ 与 $AB$ 所成的角，由题意知 $SE=SD=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2}$，$DE=2$，所以 $\cos\angle SDE=\frac{8+4-8}{2\times2\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

15. $2\sqrt{21}$ 【解析】如图所示，




不妨设点 $A$ 在第一象限，由 $|AB|=8$，$y^2=4x$，得 $A(4,4)$，因为 $F(1,0)$，所以圆的半径 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以 $|DE|=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$.

16. $[0,+\infty)$ 【解析】当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{x}{e\ln x}$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{e\ln^2 x}$，当 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，故 $x=e$ 时，$f(x)_{\min}=f(e)=1$；当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)=x^3-3x+a$，$f'(x)=3x^2-3$，当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值 $f(-1)=2+a$，当 $x=1$ 时，$f(1)=-2+a$，作出 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e\ln x},x>1\\ x^3-3x+a,x\leqslant1\end{cases}$ 的大致图象如图，由题意知 $[f(x)]^2-(t+2)f(x)+2t=0$，即 $(f(x)-2)(f(x)-t)=0$ 有 7 个不同的实根，当 $f(x)=2$ 有三个根时，$f(x)=t$ 有四个实根，此时 $2+a=2$ 或 $-2+a>2$，得 $a=0$ 或 $a>4$；当 $f(x)=2$ 有四个根时，$f(x)=t$ 有三个实根，此时 $-2+a\leqslant2<2+a$，得 $0<a\leqslant4$，所以 $a\geqslant0$.




## 四、解答题

17. 解：(1)因为 $a\sin A-c\sin C=(a-b)\sin B$，

所以由正弦定理得 $a^2-c^2=ab-b^2$，

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，则 $C=\dfrac{\pi}{3}$．　　(4分)

(2)因为 $b=5$，$c\cos A=1$，

所以 $c\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$，即 $a^2-c^2=15$，　　(7分)

因为 $a^2-c^2=ab-b^2$，所以 $a^2-c^2=5a-25$，

所以 $a=8$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$．

(10分)

18. 解：(1)由题意知甲得0分的概率为 $1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$，

乙得0分的概率为 $1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$，

所以甲、乙两人所得分数相同的概率为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{29}{90}$．　　(4分)

(2)$X$可能取值为0，1，2，3，4，5，6，

则 $P(X=0)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{180}$，

$P(X=1)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{36}$，

$P(X=2)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{10}$，

$P(X=3)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{19}{90}$，

$P(X=4)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{11}{36}$，

$P(X=5)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{15}$，

$P(X=6)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$，　　(10分)

所以，随机变量 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\dfrac{1}{180}$ | $\dfrac{1}{36}$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{19}{90}$ | $\dfrac{11}{36}$ | $\dfrac{4}{15}$ | $\dfrac{1}{12}$ |

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{180}+1\times\dfrac{1}{36}+2\times\dfrac{1}{10}+3\times\dfrac{19}{90}+4\times\dfrac{11}{36}+5\times\dfrac{4}{15}+6\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{47}{12}$．　　(12分)

19. 解：(1)取 $AA_1$ 的中点 $G$，连接 $EG$，$FG$，$AC$，

因为 $EG/\!/AD$，$EG\not\subset$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $EG/\!/$平面 $ABCD$，

因为 $AG/\!/CF$，$AG=CF$，

所以四边形 $AGFC$ 是平行四边形，

$FG/\!/AC$，又 $FG\not\subset$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $FG/\!/$平面 $ABCD$，

因为 $FG\cap EG=G$，

所以平面 $EFG/\!/$平面 $ABCD$，

因为 $EF\subset$平面 $EFG$，

所以 $EF/\!/$平面 $ABCD$．　　(5分)

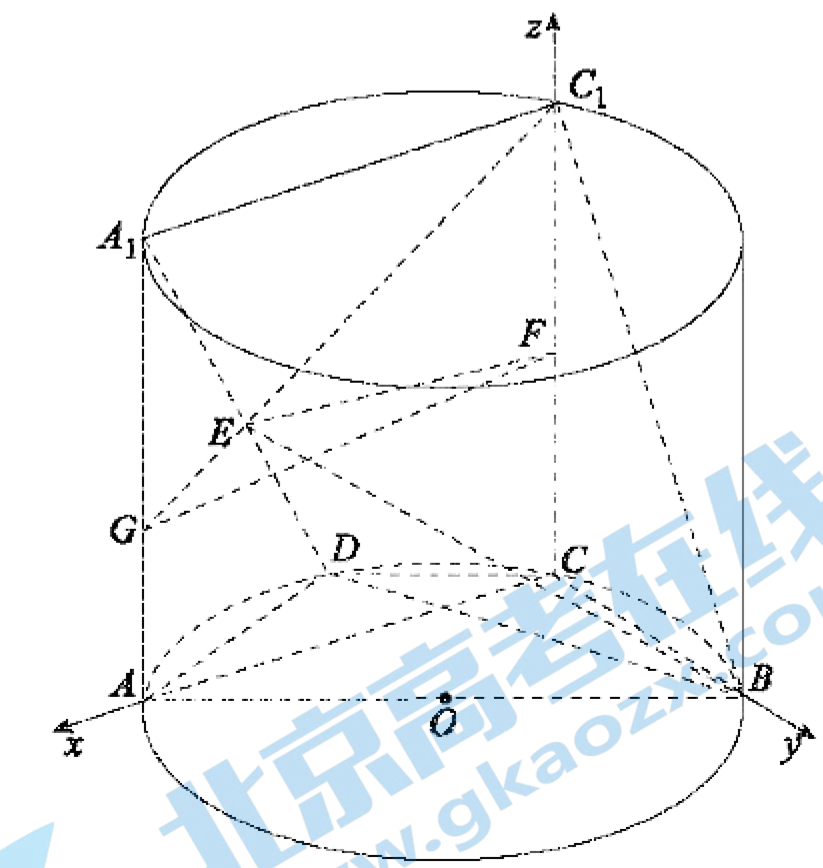
(2)设 $CD=BC=\dfrac{1}{2}AA_1=\dfrac{1}{2}AB=2$，

由 $AD=CD=BC$，得 $\angle DAB=\angle ABC=60°$，

因为 $AC\perp BC$，所以 $AC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，　　(6分)

由题意知 $CA$，$CB$，$CC_1$ 两两垂直，以 $C$ 为坐标原点，

分别以 $CA,CB,CC_1$ 所在直线为 $x,y,z$ 轴建立空间直角坐标系,




则 $A(2\sqrt{3},0,0)$,$A_1(2\sqrt{3},0,4)$,$B(0,2,0)$,$C_1(0,0,4)$,$D(\sqrt{3},-1,0)$,$E\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},-\frac{1}{2},2\right)$,

所以$\overrightarrow{EC_1}=\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2},2\right)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,4)$,

(7 分)

设平面 $C_1EB$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-3\sqrt{3}x+y+4z=0,\\ y-2z=0,\end{cases}$取 $z=1$,

得 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{2}{3}\sqrt{3},2,1\right)$, (9 分)

连接 $BD$,因为 $BD\perp AD$,$BD\perp AA_1$,$AD\cap AA_1=A$,

所以 $BD\perp$平面 $AA_1D$,

所以平面 $AA_1D$ 的一个法向量为$\overrightarrow{DB}=(-\sqrt{3},3,0)$,

(10 分)

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DB},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{-2+6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{19}{3}}}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$,

所以平面 $AA_1D$ 与平面 $C_1EB$ 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. (12 分)

20. 解:(1)因为 $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$,

所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$, (2 分)

因为 $a_1=2,a_2=8$,

所以 $a_2-a_1=6\neq 0$,

所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 6 为首项,公比为 3 的等比数列. (4 分)

(2)由(1)知 $a_{n+1}-a_n=6\times 3^{n-1}=2\times 3^n$,

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+1)=2\times\dfrac{(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$

$(n\geqslant 2)$,又 $a_1=2$ 符合上式,所以 $a_n=3^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$, (6 分)

所以 $b_n=\dfrac{(-1)^n\cdot(2n^2+6n+5)}{\log_3^2(1+a_{n+1})\cdot\log_3^2(1+a_{n+2})}$

$=\dfrac{(-1)^n\cdot(2n^2+6n+5)}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}$

$=(-1)^n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}\right]$,

当 $n$ 为偶数时,$T_n=-\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}-\dfrac{1}{4^2}-\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}=-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}=\dfrac{1}{(n+2)^2}-\dfrac{1}{4}$; (9 分)

当 $n$ 为奇数时,$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{(n+3)^2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(n+2)^2}-\dfrac{1}{(n+3)^2}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(n+2)^2}$;

综上所述:$T_n=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{(-1)^n}{(n+2)^2}$. (12 分)

21. 解:(1)由题意知 $A(0,b)$,$F(c,0)$,

因为$\triangle AOF$ 的面积为 1,所以 $S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}bc=1$.

又直线 $AF$ 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$,即 $bx+cy-bc$

$=0$，

因为点 $O$ 到直线 $AF$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\frac{bc}{\sqrt{c^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，解得 $c=2,b=1,a=\sqrt{5}$，

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.　　（4 分）

(2)依题意，当直线 $MN$ 斜率为 0 时，不符合题意；当直线斜率不为 0 时，设直线 $MN$ 方程为 $x=my+2$ $(m\neq0)$.

联立 $\begin{cases}x=my+2\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$，得 $(m^2+5)y^2+4my-1=0$，

易知 $\Delta=16m^2+4(m^2+5)=20(m^2+1)>0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{4m}{m^2+5}$，$y_1\cdot y_2=-\frac{1}{m^2+5}$.　　（6 分）

因为 $ME\perp x$ 轴，$NQ\perp x$ 轴，所以 $E(x_1,0)$，$Q(x_2,0)$.

所以直线 $QM$：$y=\frac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$　①，

直线 $NE$：$y=\frac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$　②，

联立①②解得 $x_P=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(my_1+2)y_2+(my_2+2)y_1}{y_1+y_2}=2+\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{5}{2}$.

（8 分）

因为 $ME\parallel NQ$，$ME$ 与直线 $x=\frac{5}{2}$ 平行，

所以 $S_{\triangle PMN}=S_{\triangle PNQ}-S_{\triangle MNQ}=\frac{1}{2}|NQ|\cdot|x_P-x_1|$

$=\frac{1}{2}|y_2|\cdot\left|\frac{5}{2}-x_1\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}y_2-my_1y_2\right|$，

因为 $\frac{my_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{1}{4}$，所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{4}(y_1+y_2)\right|=\frac{1}{8}|y_1-y_2|$

$=\frac{1}{8}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}$，（10 分）

由 $\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}=\frac{\sqrt{5}}{16}$，得 $m^4-6m^2+9=0$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$，此时直线 $l$ 的方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$ 或 $x+\sqrt{3}y-2=0$.　　（12 分）

22. 解：(1)由题意知 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$，即 $\frac{\pi}{2}+b=\frac{\pi}{2}+1$，得 $b=1$，

因为 $f'(x)=-a\sin x+\sin x+x\cos x$，

所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a+1=0$，得 $a=1$，

所以 $f'(x)=x\cos x$，

当 $0<x<\pi$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{\pi}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$，

当 $-\pi<x<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $-\frac{\pi}{2}<x<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减.　　（4 分）

(2)假设存在实数 $m$，使 $f(x)\leqslant m(x-\pi)$ 在 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上恒成立，

即 $x\sin x+\cos x+1-m(x-\pi)\leqslant0$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上恒成立，

令 $g(x)=x\sin x+\cos x+1-m(x-\pi)$，只需 $g(x)_{\max}\leqslant0$.　　（5 分）

注意到 $g(\pi)=0$，所以若 $x\sin x+\cos x+1-m(x-$

$\pi)\leqslant 0$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上恒成立，

$\pi$ 必为 $g(x)$ 的最大值点，从而为 $g(x)$ 的极大值点，必有 $g'(\pi)=0$.

由 $g'(x)=x\cos x-m$，得 $g'(\pi)=-\pi-m=0$，解得 $m=-\pi$. （6分）

下面证明 $m=-\pi$ 符合题意.

当 $m=-\pi$ 时，$g'(x)=x\cos x+\pi$，令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\cos x-x\sin x$.

(i) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增；

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)=g'(x)$ 单调递减，

所以当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)>g'(\pi)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增；

由 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增得，$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增. （8分）

(ii) 当 $x\in\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$ 时，令 $F(x)=h'(x)=\cos x-x\sin x$，

由 $F'(x)=-2\sin x-x\cos x$，得 $F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增，

因为 $F(\pi)=-1<0$，$F\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5\pi}{4}-1\right)>0$，

所以由零点存在定理知存在 $x_1\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$，使得 $F(x_1)=0$，

当 $x\in[\pi,x_1)$ 时，$F(x)<0$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，即 $g'(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_1,\frac{5\pi}{4}\right]$ 时，$F(x)>0$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，即 $g'(x)$ 单调递增； （10分）

因为 $g'(\pi)=0$，$g'\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\pi\left(1-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)>0$，

所以由零点存在定理得，存在 $x_2\in\left(x_1,\frac{5\pi}{4}\right)$，使得 $g'(x_2)=0$，

当 $x\in[\pi,x_2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_2,\frac{5\pi}{4}\right]$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. （11分）

综合(i)(ii)的结论，又 $g(\pi)=0$，$g\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5\pi}{4}+1\right)+\frac{\pi^2}{4}+1<0$，

所以 $g(x)_{\max}=0$，符合题意.

综上所述：$m$ 的取值集合为 $\{-\pi\}$. （12分）

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。