2019 北京市房山区高二（上）期末

数　　学

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．抛物线 $x^2=8y$ 的焦点坐标是（　　）

A．（0，2）　　B．（0，－2）　　C．（4，0）　　D．（－4，0）

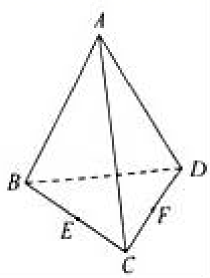
2．复数 $\frac{2}{1-i}$ 的共轭复数是（　　）

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$2+2i$　　D．$2-2i$

3．已知双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则 $m=$（　　）

A．4　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

4．如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，设 E，F 分别是 BC，CD 的中点，则 $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})$ 等于（　　）



A．$\overrightarrow{AD}$　　B．$\overrightarrow{FA}$　　C．$\overrightarrow{AF}$　　D．$\overrightarrow{EF}$

5．若 $\vec{a}$＝（4，2，3）是直线 l 的方向向量，$\vec{n}$＝（－1，3，0）是平面 α 的法向量，则直线 l 与平面 α 的位置关系是（　　）

A．垂直　　B．平行

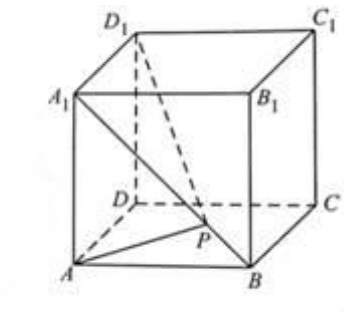
C．直线 l 在平面 α 内　　D．相交但不垂直

6．“$m\neq0$”是“方程 $x^2-y^2=m$ 表示的曲线为双曲线”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．如图，棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 A_1B 上的动点，则下列结论错误的是（　　）



A．平面 $D_1A_1P\perp$ 平面 A_1AP

B．$\angle APD_1$ 的取值范围是（0，$\frac{\pi}{2}$）

C．三棱锥 B_1-D_1PC 的体积为定值

D．$DC_1\perp D_1P$

8．设 F 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点，椭圆上至少有21个不同的点 P_i（$i=1$，2，3，…），$|P_1F|$，$|P_2F|$，$|P_3F|$，…组成公差为 d（$d>0$）的等差数列，则 d 的最大值为（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{10}$

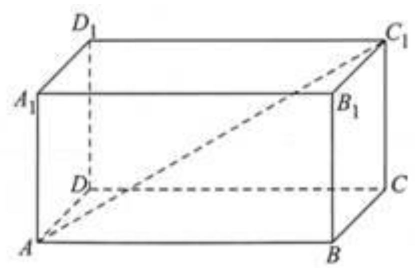
二、填空题共6小题，每小题5分，共30分）

9．已知 a，$b\in$R，i 是虚数单位，（$a+bi$）$i=2+3i$，则 $a=$_______，$b=$_______．

10．在空间直角坐标系中，已知点 M（1，0，1），M（－1，1，2），则线段 MN 的长度为_______．

11．若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$，则满足条件的一个双曲线的方程为_______．

12．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AD=AA_1=1$，$AB=2$，则 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}$ 等于_______．



13．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 e，F_1，F_2 分别为椭圆的两个焦点，若椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2$ 是钝角，则满足条件的一个 e 的值为_______．

14．已知曲线 W 的方程为 $|y|+x^2-5x=0$．

①请写出曲线 W 的一条对称轴方程______；

②曲线 W 上的点的横坐标的取值范围是______．

三、解答题共 6 题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15．（15 分）已知复数 $z_1=a+2i$，$z_2=3-4i$（$a\in R$，i 为虚数单位）．

（Ⅰ）若 $z_1\cdot z_2$ 是纯虚数，求实数 a 的值；

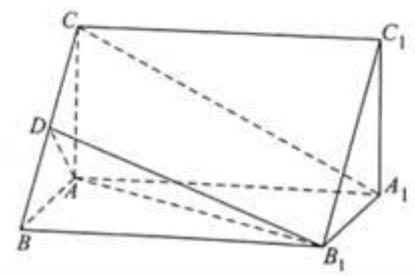
（Ⅱ）若复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 在复平面上对应的点在第二象限，求实数 a 的取值范围．

16．（15 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC\perp AB$，$AB=AC=2$，$CC_1=4$，D 为 BC 的中点．

（Ⅰ）求证：$AC\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ）求证：$A_1C\parallel$ 平面 ADB_1；

（Ⅲ）求平面 ADB_1 与平面 ACC_1A_1 所成锐二面角的余弦值．



17．（13 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，F 为抛物线的焦点．

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）若 P 是抛物线 C 上一点，点 A 的坐标为（$\frac{7}{2}$，2），求 $|PA|+|PF|$ 的最小值；

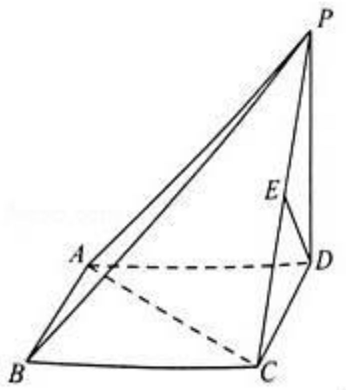
（Ⅲ）若过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线 C 交于 M，N 两点，求线段 MN 的中点坐标．

18．（14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD\perp AD$，$PD=AD$，E 为棱 PC 的中点．

（Ⅰ）证明：平面 $PBC\perp$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求直线 DE 与平面 PC 所成角的正弦值；

（Ⅲ）若 F 为 AD 的中点，在棱 PB 上是否存在点 M，使得 $FM\perp BD$？若存在，求 $\frac{PM}{MB}$ 的值；若不存在，说明理由．



19．（13 分）已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个顶点坐标为（0，1），焦距为 $2\sqrt{2}$．若直线 $y=x+m$ 与椭圆 M 有两个不同的交点 A，B．

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程；

（Ⅱ）将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求△OAB 面积的最大值（O 为坐标原点）．

20．（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 与两定点 A（－2，0），B（2，0）连线的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，记点 P 的轨迹为曲线 C．

（Ⅰ）求曲线 C 的方程；

（Ⅱ）若过点（$-\sqrt{2}$，0）的直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，曲线 C 上是否存在点 E 使得四边形 $OMEN$ 为平行四边形？若存在，求直线 l 的方程，若不存在，说明理由．

长按识别关注

数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．

【分析】通过抛物线的标准方程，直接求出抛物线的焦点坐标即可．

【解答】解：因为抛物线 $x^2=8y$，$P=4$，$\frac{P}{2}=2$，所以抛物线 $x^2=8y$ 的焦点坐标是（0，2）．

故选：A.

【点评】本题主要考查了抛物线的简单性质．解本题的关键是判断出抛物线的焦点坐标所在坐标轴以及方向．

2．

【分析】首先利用复数的除法运算化简，然后取徐不得相反数的其共轭复数．

【解答】解：由 $\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i}{2}=1+i$.

所以 $\frac{2}{1-i}$ 的共轭复数为 $1-i$.

故选：B.

【点评】本题考查了复数代数形式的乘除运算，考查了复数的基本概念，是基础题．

3．

【分析】先根据双曲线方程可知 a 和 b，进而求得 c，则双曲线离心率的表达式可得，最后根据离心率为 2 求得 m 的值．

【解答】解：根据双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{2}=1$ 可知 $a=\sqrt{m}$，$b=\sqrt{2}$，

$\therefore c=\sqrt{m+2}$，

$\therefore e=\frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{m}}=\sqrt{2}$，

求得 $m=2$，

故选：B.

【点评】本题主要考查了双曲线的简单性质．应熟练掌握双曲线标准方程中，a，b 和 c，及离心率 e 的关系．

4．

【分析】根据向量三角形法则、向量共线定理即可得出．

【解答】解：连接 AF，E，F 分别是 BC，CD 的中点，

则 $\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}$.

故选：C.

【点评】本题考查了向量三角形法则、向量共线定理，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

5．

【分析】$\overrightarrow{c}=(4,2,3)$ 是直线 l 的方向向量，$\overrightarrow{n}=(-1,3,0)$ 是平面α 的法向量，由 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{c}\neq 0$，得到直线 l 与平面α 的位置关系是相交但不垂直．

【解答】解：∵$\overrightarrow{c}=(4,2,3)$ 是直线 l 的方向向量，

$\overrightarrow{n}=(-1,3,0)$ 是平面α 的法向量，

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{c}=-4+6+0=2\neq 0$，

∴直线 l 与平面α 的位置关系是相交但不垂直．

故选：D.

【点评】本题考查直线与平面的位置关系的判断，考查向量法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

6．

【分析】由双曲线的定义可知：“方程 $x^2-y^2=m$ 表示的曲线为双曲线”的充要条件为：$m\neq 0$，得解．

【解答】解：由双曲线的定义有：“方程 $x^2-y^2=m$ 表示的曲线为双曲线”的充要条件为：$m\neq 0$，

故“$m\neq 0$”是“方程 $x^2-y^2=m$ 表示的曲线为双曲线”的充要条件，

故选：C.

【点评】本题考查了双曲线的定义及充分必要条件，属简单题．

7．

【分析】在 A 中，由 $A_1D_1\perp$ 平面 A_1AP，得平面 $D_1A_1P\perp$ 平面 A_1AP；在 B 中，当 P 与 A_1 重合时，$\angle APD_1=\frac{\pi}{2}$；在 C 中，$\triangle B_1D_1C$ 的面积是定值，P 到平面 B_1D_1C 的距离是定值，从而三棱锥 B_1-D_1PC 的体积为定值，故 C 正确；在 D 中，由 $DC_1\perp D_1C$，$DC_1\perp BC$，得 $DC_1\perp$ 平面 BCD_1A_1，从而 $DC_1\perp D_1P$.

【解答】解：在 A 中，∵$A_1D_1\perp$平面 A_1AP，$A_1D_1\subset$平面 D_1A_1P，∴平面 $D_1A_1P\perp$平面 A_1AP，故 A 正确；

在 B 中，当 P 与 A_1 重合时，$\angle APD_1=\frac{\pi}{2}$，∴$\angle APD_1$ 的取值范围不是（0，$\frac{\pi}{2}$），故 B 错误；

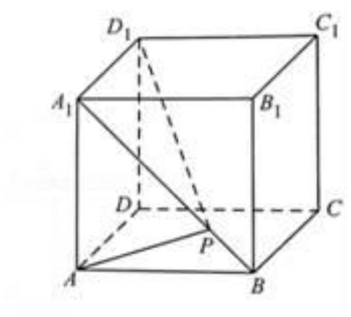
在 C 中，∵△B_1D_1C 的面积是定值，P 到平面 B_1D_1C 的距离是定值，

∴三棱锥 B_1-D_1PC 的体积为定值，故 C 正确；

在 D 中，∵$DC_1\perp D_1C$，$DC_1\perp BC$，

$D_1C\cap BC=C$，∴$DC_1\perp$平面 BCD_1A_1，∴$DC_1\perp D_1P$，故 D 正确．

故选：B.



【点评】本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想，是中档题．

8．

【分析】由已知知这个等差数列是增数列，则 $a_1\geq|FP_1|=5-3=2$，$a_{21}\leq|FP_{21}|=5+3=8$，又 $a_{21}=a_1+20d$，可得 $0<a_{21}-a_1=20d\leq6$，解得 d 的范围，则答案可求．

【解答】解：由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，得 $a=5$，$b=4$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

由已知可得等差数列是增数列，则 $a_1\geq|FP_1|=5-3=2$，$a_{21}\leq|FP_{21}|=5+3=8$，

∴$a_{21}=a_1+20d$，∴$0<a_{21}-a_1=20d\leq6$，

解得 $0<d\leq\frac{3}{10}$.

∴d 的最大值为 $\frac{3}{10}$.

故选：B.

【点评】本题考查了椭圆的定义及其性质、等差数列的通项公式、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.

【分析】利用复数代数形式的乘除运算变形，再由复数相等的条件求解.

【解答】解：由（$a+bi$）$i=-b+ai=2+3i$，

得 $-b=2$，$a=3$，即 $a=3$，$b=-2$.

故答案为：3，－2.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数相等的条件，是基础题.

10.

【分析】根据两点间的距离公式，进行计算即可.

【解答】解：空间直角坐标系中，点 M（1，0，1），N（－1，1，2），

所以线段 AB 的长度为 $|MN|=\sqrt{(-1-1)^2+(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{6}$.

故答案为：$\sqrt{6}$.

【点评】本题考查了空间直角坐标系中两点间的距离公式的应用问题，是基础题目.

11.

【分析】已知双曲线的渐近线方程的双曲线系方程，可设双曲线方程为：$(\frac{x}{2})^2-(\frac{y}{3})^2=\lambda$（$\lambda\neq0$），即 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\lambda$（$\lambda\neq0$）.

【解答】解：由双曲线系方程可得：双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$，

则双曲线方程为 $(\frac{x}{2})^2-(\frac{y}{3})^2=\lambda$（$\lambda\neq0$），即 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\lambda$（$\lambda\neq0$），

故答案为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

【点评】本题考查了已知双曲线的渐近线方程的双曲线系方程，属简单题.

12.

【分析】由 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$，得 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=1$

【解答】解：∵ $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$，

∴ $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=1$

故答案为：1.

【点评】本题考查向量的数量积的应用，考查向量的表示以及计算，考查计算能力.

13.

【分析】当动点 P 在椭圆长轴端点处沿椭圆弧向短轴端点运动时，P 对两个焦点的张角 $\angle F_1PF_2$ 渐渐增大，当且仅当 P 点位于短轴端点 P_0 处时，张角 $\angle F_1PF_2$ 达到最大值，由此可得结论.

【解答】解：如图，当动点 P 在椭圆长轴端点处沿椭圆弧向短轴端点运动时，P 对两个焦点的张角 $\angle F_1PF_2$ 渐渐增大，

当且仅当 P 点位于短轴端点 P_0 处时，张角 $\angle F_1PF_2$ 达到最大值.

∵椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2$ 是钝角，

∴$\triangle P_0F_1F_2$ 中，$\angle F_1P_0F_2>90°$，

∴$Rt\triangle P_0OF_2$ 中，$\angle OP_0F_2>45°$，

∴$P_0O<OF_2$，即 $b<c$，

∴$a^2-c^2<c^2$，可得 $a^2<2c^2$，

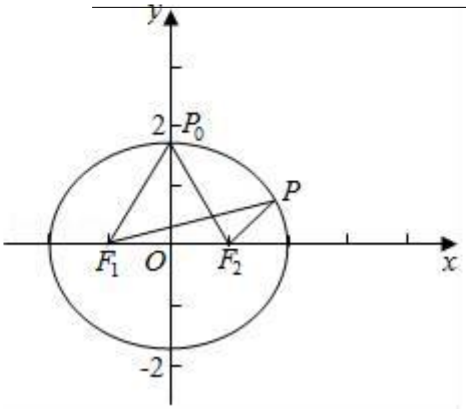
∴$e>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∵$0<e<1$，

∴$\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$，

∴满足条件的一个 e 的值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$（可取大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$小于 1 的任意一个实数值）.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$（可取大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$小于 1 的任意一个实数值）.



【点评】本题考查了椭圆的简单几何性质，考查数形结合的数学思想，属于中档题.

14.

【分析】①利用曲线方程，通过（x，﹣y）代入方程，推出过程中即可.

②利用绝对值的范围，求解横坐标的范围.

【解答】解：①曲线 W 的方程为$|y|+x^2-5x=0$．（x，﹣y）代入方程，可得$|-y|+x^2-5x=0$，即$|y|+x^2-5x=0$，对称轴为：$y=0$.

②$|y|+x^2-5x=0$，可得$|y|=-x^2+5x\geqslant 0$，可得：$x\in[0，5]$.

故答案为：①：$y=0$；②$[0，5]$.

【点评】本题考查函数与方程的应用，对称轴以及转化思想的应用，考查计算能力.

三、解答题共 6 题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.

【分析】（Ⅰ）利用复数代数形式的乘除运算化简，再由实部为 0 且虚部不为 0 列式求解；

（Ⅱ）利用复数代数形式的乘除运算化简，由实部小于 0 且虚部等于 0 联立不等式组求解.

【解答】解：（Ⅰ）由复数 $z_1=a+2i$，$z_2=3-4i$，

得 $z_1\cdot z_2=(a+2i)(3-4i)=3a+8+(6-4a)i$，

由题意，$3a+8=0$，$6-4a\neq 0$，即 $a=-\frac{8}{3}$；

（Ⅱ）$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+2i}{3-4i}=\frac{(a+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3a-8}{25}+\frac{6+4a}{25}i$，

若复数$\frac{z_1}{z_2}$在复平面上对应的点在第二象限，则$\begin{cases}3a-8<0\\6+4a>0\end{cases}$，

解得 $-\frac{3}{2}<a<\frac{8}{3}$.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

16.

【分析】（Ⅰ）推导出 $AA_1\perp$ 平面 ABC，从而 $AA_1\perp AC$，再由 $AC\perp AB$，能证明 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

（Ⅱ）连结 A_1B，与 AB_1 相交于点 O，连结 DO，由 $DO\parallel A_1C$，能证明 $A_1C\parallel$ 平面 ADB_1.

（Ⅲ）由 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AA_1\perp AB$，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，利用向量法能求出平面 ADB_1 与平面 ACC_1A_1 所成锐二面角的余弦值.

【解答】证明：（Ⅰ）∵$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AA_1\parallel CC_1$，∴$AA_1\perp$ 平面 ABC，

∴$AA_1\perp AC$，又 $AC\perp AB$，$AB\cap AA_1=A$，

∴$AC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

（Ⅱ）连结 A_1B，与 AB_1 相交于点 O，连结 DO，

∵D 是 BC 中点，O 是 A_1B 中点，

则 $DO\parallel A_1C$，$A_1C\not\subset$ 平面 ADB_1，$DO\subset$ 平面 ADB_1，

∴$A_1C\parallel$ 平面 ADB_1.

解：（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AA_1\perp AB$，

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 A（0，0，0），B（2，0，0），B_1（2，4，0），D（1，0，1），

$\overrightarrow{AD}=$（1，0，1），$\overrightarrow{AB_1}=$（2，4，0），

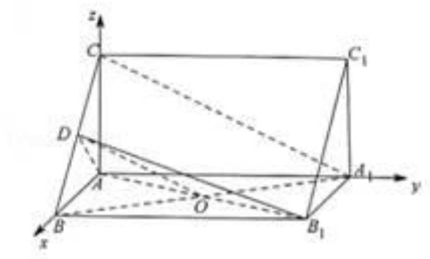
设平面 ADB_1 的法向量 $\vec{n}=$（x，y，z），

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2x64y=0\end{cases}$，取 $y=1$，得 $\vec{n}=$（－2，1，2），

平面 ACC_1A_1 的法向量 $\overrightarrow{AB}=$（2，0，0），

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{AB}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=-\dfrac{2}{3}$，

∴平面 ADB_1 与平面 ACC_1A_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.



【点评】本题考查线面垂直、线面平行的证明，考查二面角的余弦值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想，是中档题．

17．

【分析】（Ⅰ）运用抛物线的准线方程，可得 $p=1$，进而得到抛物线方程；

（Ⅱ）过 A 作 $AB\perp$ 准线 l，垂足为 B，运用抛物线的定义和三点共线取得最值，即可得到所求最小值；

（Ⅲ）由题意可得直线 MN 的方程为 $y=x-\frac{1}{2}$，代入抛物线的方程，运用韦达定理和中点坐标公式，即可得到所求中点坐标．

【解答】解：（Ⅰ）抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，

F 为抛物线的焦点，可得 F（$\frac{1}{2}$，0），

即 $\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，$p=1$，

抛物线的方程为 $y^2=2x$；

（Ⅱ）若 P 是抛物线 C 上一点，点 A 的坐标为（$\frac{7}{2}$，2），

如图，过 A 作 $AB\perp$ 准线 l，垂足为 B，

由抛物线的定义可得 $|PB|=|PF|$，

则 $|PA|+|PF|=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$，

当且仅当 A，P，B 三点共线，取得最小值 4；

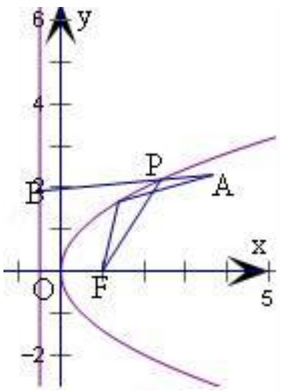
（Ⅲ）由题意可得直线 MN 的方程为 $y=x-\frac{1}{2}$，

代入抛物线方程 $y^2=2x$，可得 $x^2-3x+\frac{1}{4}-=0$，

设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），可得 $x_1+x_2=3$，

即有 MN 的中点的横坐标为 $\frac{3}{2}$，纵坐标为 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$，

即有 MN 的中点坐标为（$\frac{3}{2}$，1）．



【点评】本题考查抛物线的定义、方程和性质，考查三点共线取得最小值，以及直线方程和抛物线方程联立，运用韦达定理和中点坐标公式，考查运算能力，属于中档题．

18．

【分析】（Ⅰ）推导出 $PD\perp$底面 $ABCD$，从而 $PD\perp BC$，由底面 $ABCD$ 为正方形，得 $BC\perp CD$，从而 $BC\perp$平面 PCD，由此能证明平面 $PBC\perp$平面 PCD．

（Ⅱ）以 D 为原点，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出直线 DE 与平面 PAC 所成角的正弦值．

（Ⅲ）向量 $\overrightarrow{BF}=(-2,\ -2,\ 2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{FB}=(1,\ 2,\ 0)$，由点 M 在棱 PB 上，设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BF}$，（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），从而 $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=(1-2\lambda,\ 2-2\lambda,\ 2\lambda)$，由 $FM\perp DB$，能求出结果．

【解答】证明：（Ⅰ）∵平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，$PD\perp AD$，

∴$PD\perp$底面 $ABCD$，∴$PD\perp BC$，

又∵底面 $ABCD$ 为正方形，$BC\perp CD$，

∴$BC\perp$平面 PCD，

∴平面 $PBC\perp$平面 PCD．

解：（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $PD\perp$底面 $ABCD$，$AD\perp CD$，

如图，以 D 为原点，建立空间直角坐标系，

设 $PD=AD=2$，则 D（0，0，0），A（2，0，0），C（0，2，0），

P（0，0，2），E（0，1，1），

$\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{PA}=(2,0,-2)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面 *PAC* 的一个法向量，

设 *DE* 与平面 *PAC* 所成角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{DE},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴直线 *DE* 与平面 *PAC* 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（III）向量$\overrightarrow{BF}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{FB}=(1,2,0)$，

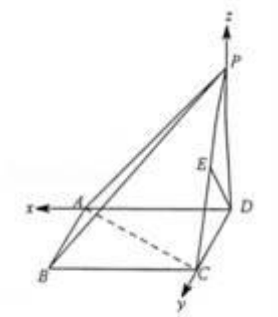
由点 *M* 在棱 *PB* 上，设$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BF}$，$(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

∴ $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$，

由 $FM\perp DB$，得 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，

∴ $(1-2\lambda)\times2+(2-2\lambda)\times2=0$，

解得 $\lambda=\frac{3}{4}$，∴ $\frac{PM}{MB}=\frac{1}{3}$.



【点评】本题考查面面垂直的证明，考查线面角的正弦值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想，是中档题.

19.

【分析】（Ⅰ）根据已知条件求出 *b*、*c* 的值，再根据 *a*、*b*、*c* 的关系求出 *a* 的值，即可得出椭圆的方程；

（Ⅱ）将直线 *AB* 的方程与椭圆的方程联立，列出韦达定理，利用弦长公式并结合韦达定理求出$|AB|$，并计算出原点 *O* 到直线 *AB* 的距离作为△*OAB* 的高，然后利用三角形的面积公式得出△*OAB* 面积的表达式，利用函数思想求出△*OAB* 面积的最大值.

【解答】解：（Ⅰ）由题意可知，$c=\sqrt{2}$，$b=1$，由 $a^2=b^2+c^2$，得 $a=\sqrt{3}$，

因此，椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

（Ⅱ）设点 A 的坐标为（x_1，y_1），点 B 的坐标为（x_2，y_2），

联立直线与椭圆的方程$\begin{cases}y=x+m\\x^2+3y^2=3\end{cases}$，消去 y 得，$4x^2+6mx+3m^2-3=0$，

由直线与椭圆相交得△＝$36m^2-16(3m^2-3)>0$，即 $m^2<4$，解得 $-2<m<2$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{4}$，

∴ $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-\frac{3m}{2})^2-(3m^2-3)}=\sqrt{6-\frac{3m^2}{2}}$，

点 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$，

所以，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{6-\frac{3m^2}{2}}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-(m^2-2)^2}(-2<m<2)$，

当 $m^2=2$ 时，即当 $m=\pm\sqrt{2}$时，△OAB 的面积取到最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

【点评】本题考查椭圆的性质，考查韦达定理在椭圆综合问题中的应用，同时考查了计算能力与推理能力，属于难题．

20．

【分析】（Ⅰ）设 P（x，y），由题意可得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$，运用直线的斜率公式，化简即可得到点 P 的轨迹为曲线 C；

（Ⅱ）设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），由题意知 l 的斜率一定不为 0，设 l：$x=my-\sqrt{2}$，代入椭圆方程整理得（m^2+2）$y^2-2\sqrt{2}my-2=0$，假设存在点 E，使得四边形 $OMEN$ 为平行四边形，其充要条件为 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，则点 E 的坐标为（x_1+x_2，y_1+y_2）．由此利用韦达定理结合已知条件能求出直线 l 的方程．

【解答】解：（Ⅰ）设 P（x，y），∵$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$，则，$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，（$x\neq\pm2$）

（Ⅱ）设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），由题意知 l 的斜率一定不为 0，

故不妨设 l：$x=my-\sqrt{2}$，代入椭圆方程整理得：

$(m^2+2)y^2-2\sqrt{2}my-2=0$，$\triangle>0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$，

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2\sqrt{2}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{m^2+2}$.

假设存在点 E，使得四边形 $OMEN$ 为平行四边形，

其充要条件为 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

则点 E 的坐标为（x_1+x_2，y_1+y_2）.

$\Rightarrow E\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{m^2+2}, \dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}\right)$.

把 E 的坐标代入得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$(x\neq\pm 2)$ 可得：$m^4-4=0$.

解得 $m^2=2$.

$\therefore$直线 l 的方程为：$x=\pm\sqrt{2}y-\sqrt{2}$

【点评】本题考查点的轨迹方程的求法，考查满足条件的点是否存在的判断与直线方程的求法，体现了数学转化思想方法，是中档题.