# 中学生标准学术能力测试诊断性测试 2020 年 9 月测试

# 文科数学答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | B | D | B | D | C | A | D | B | C | D |

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $4+3\pi$

14. $\dfrac{2\pi}{3}$

15. $\dfrac{2\sqrt{15}}{9}$

16. $\dfrac{10}{3}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17．解：

（1）∵抽到持“无所谓”态度的人的概率为 $\dfrac{2}{9}$，

$\therefore \dfrac{80+z}{900}=\dfrac{2}{9}$，解得 $z=120$， ............2 分

∴持“不该延期”态度的人数共有 $900-300-100-120-80=300$，

∴应在“不该延期”态度抽取 $150\times\dfrac{300}{900}=50$ 人； ............4 分

（2）由（1）知持“无所谓”态度的一共有 200 人，

∴在所抽取的10人中，高三学生为 $\dfrac{120}{200}\times 10=6$ 人，

学生家长为 $\dfrac{80}{200}\times 10=4$ 人，

在这 10 人中再随机抽取 3 人进行视频会议，于是这 3 人中家长人数 $\xi=0, 1, 2, 3$．

$P(\xi=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$ ............6 分， $P(\xi=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$ ............8 分，

$P(\xi=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$ ............10 分，　　　　$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$ ............12 分

18．解：

(1) 设 $d$ 为数列 $\{a_n\}$ 的公差，则 $d=\dfrac{a_5-a_2}{3}=2$，

所以 $a_n=a_2+(n-2)d=2n-1$， ............2 分

因为 $S_n+b_n=1$，所以 $S_{n+1}+b_{n+1}=1$，

两式相减可得，

$S_{n+1}+b_{n+1}-S_n-b_n=1-1=0$，

化简得：$2b_{n+1}=b_n$，可知 $\{b_n\}$ 为等比数列， ............5 分

又因为 $2b_1=1$，所以 $b_1=\dfrac{1}{2}$，因此数列 $\{b_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

所以 $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ............7 分

（2） $c_n=a_n+b_n=2n-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，进行分组求和，

数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $\dfrac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2}=n^2$， ............9 分

数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=1-b_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

所以 $T_n=n^2+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<n^2+1$，得证。 ............12 分

19．解：

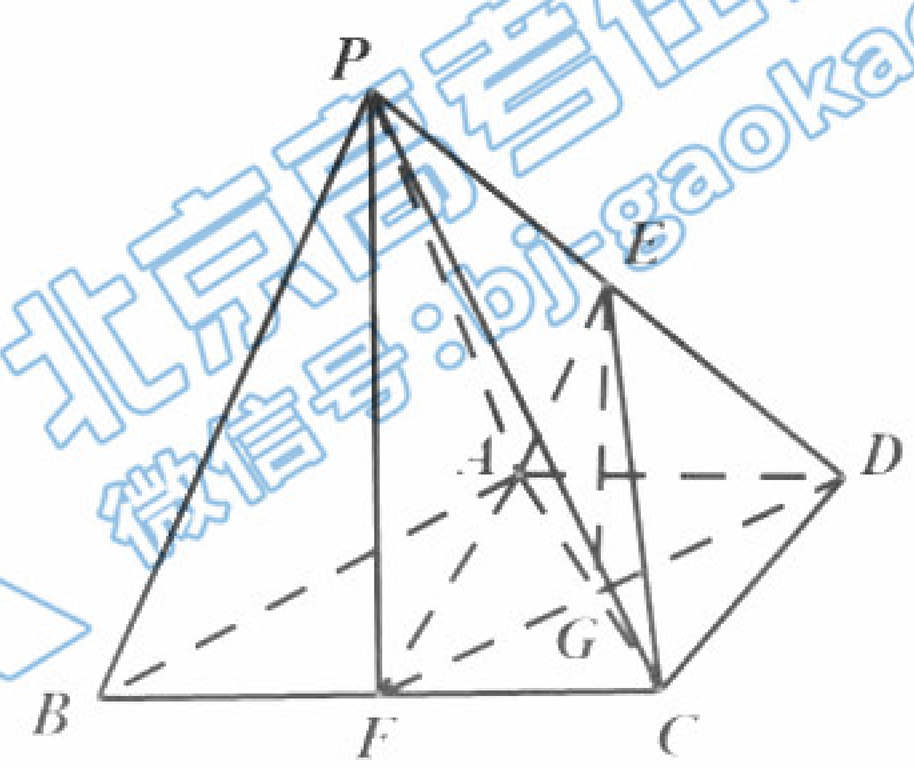
（1）证明：连接 $AF,FD$，设 $FD\cap AC=G$，连接 $EG$，

由题意可知四边形 $ADCF$ 为矩形，故 $G$ 为 $FD$ 的中点，

又 $E$ 为 $PD$ 的中点，

$\therefore EG$ 为 $\Delta PDF$ 的中位线，

$\therefore EG // PF$， ............2 分



由$\begin{cases} EG // PF \\ EG \subset \text{平面}AEC \\ PF \not\subset \text{平面}AEC \end{cases} \Rightarrow PF // \text{平面}AEC$…………4 分

（2）设 $AD = CD = 1$，$BD = 2$，$\angle PDC = \angle PDA = 60^\circ$，则 $PA = PC = \sqrt{3}$，

由 $DC^2 + PC^2 = PD^2 \Rightarrow DC \perp PC$，…………6 分

由$\begin{cases} DC \perp PC, \\ DC \perp BC, \\ PC \perp BC = C, \end{cases} \Rightarrow DC \perp \text{平面}PBC$，由 $DC \subset \text{平面}PDC$，

$\therefore \text{平面}PBC \perp \text{平面}PDC$…………8 分，

故 $\angle FPC$ 为所求的线面角，…………9 分

$\because AF // DC, DC \perp \text{平面}PBC$，

$\therefore AF \perp \text{平面}PBC$，

$\therefore \angle AFP = \dfrac{\pi}{2}$，可得 $PF = \sqrt{PA^2 - AF^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$，…………11 分

在 $\Delta PFC$ 中，$PF = \sqrt{2}, CF = 1, PC = \sqrt{3}$，

$\therefore PF \perp FC \therefore \sin \angle FPC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$…………12 分

20. 解：

（1）当 $a = 1$ 时，$f(x) = x^2 + 2x + \ln x$（$x > 0$），

则 $f'(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x}$，…………2 分

$\therefore f'(1) = 5$，

$\because f(1) = 3$，

所以 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y - 3 = 5(x-1)$，

即：$y = 5x - 2$…………4 分

（2）$f(2t-1) \geq 2f(t) - 3$ 等价于 $2(t-1)^2 + a\ln(2t-1) - 2a\ln t \geq 0$，

记 $h(t)=2(t-1)^2+a\ln(2t-1)-2a\ln t$ （$t\geq 1$），

$h'(t)=4(t-1)+\frac{2a}{2t-1}-\frac{2a}{t}=\frac{2(t-1)[2t(2t-1)-a]}{(2t-1)t}$，…………6 分

当 $t\geq 1$ 时，$2t(2t-1)\geq 2$，所以当 $a\leq 2$ 时，

$h'(t)\geq 0$ 在 $t\geq 1$ 时恒成立，即 $h(t)$ 在 $t\geq 1$ 时为增函数，

故 $t\geq 1$ 时，$h(t)\geq h(1)=0$，即不等式 $f(2t-1)\geq 2f(t)-3$；…………9 分

当 $a>2$ 时，由 $h'(t)=0$，得 $t=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{4}$，当 $t\in\left(1,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\right)$ 时，

$h'(t)<0$，此时满足 $h(t)$ 在 $t\in\left(1,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\right)$ 为减函数，

则当 $t\in\left(1,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\right)$ 时，有 $h(t)<h(1)=0$，与已知矛盾

综上，$a\leq 2$ …………12 分

21. 解：

（1）由 $\begin{cases}y^2=4x\\ y=-\frac{1}{2}x+b\end{cases}$ 得 $y^2+8y-8b=0$，由题意知 $\Delta>0$，即 $b>-2$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由根与系数的关系得 $y_1+y_2=-8, y_1y_2=-8b$ …………2 分，

且 $x_1+x_2=4b-2(y_1+y_2)=4b+16, x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=4b^2$ …………4 分

以 $AB$ 为直径的圆过抛物线的焦点 $F(1,0)$，则 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，

即 $(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$，

$\therefore x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2=0\ (*)$，

将 $x_1+x_2=4b+16, x_1x_2=4b^2$，$y_1y_2=-8b$ 代入 $(*)$ 式，

化简得：$4b^2-12b-15=0$，…………6 分

$\therefore b=\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{2}$，经检验满足 $b>-2$

故直线 $l$ 的方程式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$ 或 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3-2\sqrt{6}}{2}$ …………7 分

（2）由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{64+32b}$，

设点 $M$ 到直线 $AB$ 的距离为 $d$，$l_{AB}:x+2y-2b=0$，

则由点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{|2b+1|}{\sqrt{5}}$，

$\therefore S_{\Delta MAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{64+32b}\cdot\dfrac{|2b+1|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+b}|1+2b|(-2<b<0)$ ………9 分

令 $f(b)=(2+b)(1+2b)^2(-2<b<0)$，

$\therefore f'(b)=(1+2b)^2+4(2+b)(1+2b)=(1+2b)(9+6b)$，

令 $f'(b)=0$，得 $b=-\dfrac{1}{2}$ 或 $b=-\dfrac{3}{2}$， …………11 分

在 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ 上，$f'(b)>0$；在 $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 上，$f'(b)<0$；在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上，$f'(b)>0$，

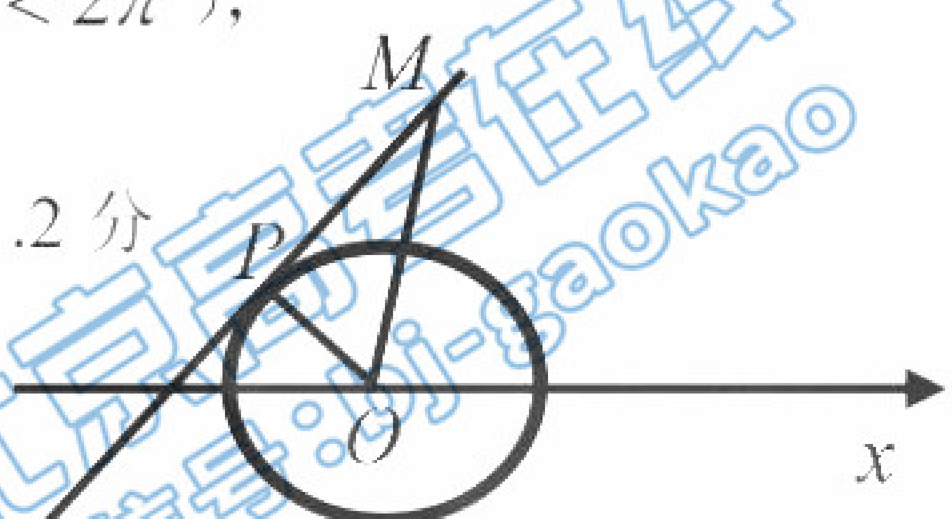
$\therefore f(b)$ 在 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $b=-\dfrac{3}{2}$ 时，$\Delta MAB$ 的面积最大，此时 $(S_{\Delta MAB})_{\max}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot2=4$ ……12 分

**(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。**

22. 解：

(1) 如图，在极坐标系中，在切线上任取一点为 $M(\rho,\theta)$（$0\le\theta<2\pi$），




依题意有 $\angle POx=\dfrac{5\pi}{6}$，则 $\angle POM=|\dfrac{5\pi}{6}-\theta|$。 …………2 分

又 $\angle MPO=90^\circ, OP=2$，则有 $\dfrac{2}{\rho}=\cos(\dfrac{5\pi}{6}-\theta)$，

故该切线的极坐标方程为 $\rho\cos(\dfrac{5\pi}{6}-\theta)=2$。 …………4 分

(2) 圆 $O$ 的普通方程为 $x^2+y^2=4$。

把直线 $l_1$ 的参数方程代入圆的普通方程中，整理得 $t^2+2(\cos\theta+\sin\theta)t-2=0$。

设方程 $t^2+2(\cos\theta+\sin\theta)t-2=0$ 的两根为 $t_1,t_2$。

则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4(\cos\theta+\sin\theta)^2+8}=2\sqrt{3+\sin 2\theta}$，

…………6 分

把直线 $l_2$ 的参数方程代入圆的普通方程中，整理得 $t^2+2(\cos\theta-\sin\theta)t-2=0$。

设方程 $t^2+2(\cos\theta-\sin\theta)t-2=0$ 的两根为 $t_3,t_4$。

则 $|CD|=|t_3-t_4|=\sqrt{(t_3+t_4)^2-4t_3t_4}=\sqrt{4(\cos\theta-\sin\theta)^2+8}=2\sqrt{3-\sin 2\theta}$ ……8 分

则 $|AB|\cdot|CD|=4\sqrt{9-\sin^2 2\theta}$，$\because \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3},\therefore \dfrac{\pi}{3}\le 2\theta\le\dfrac{2\pi}{3}$，

则 $\dfrac{3}{4}\le\sin^2 2\theta\le 1$，故当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$|AB|\cdot|CD|$ 有最大值 $2\sqrt{33}$。

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$|AB|\cdot|CD|$ 有最小值 $8\sqrt{2}$。…………10 分

23．解：

（1）依据题意，$\dfrac{xyz}{xy+yz+xz}$ 有意义时，$x,y,z>0$，

因为 $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge(1+1+1)^2=9$，且 $x+y+z=2$

可得，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{9}{2}$，…………3 分

所以 $\dfrac{xyz}{xy+yz+xz}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}\le\dfrac{2}{9}$

当且仅当 $x=y=z=\dfrac{2}{3}$ 时，取到等号……5 分（由于是证明题，取等条件不写不扣分）

（2）

$t^2=x^2+y^2+z^2+35+2\sqrt{(x^2+1)(y^2+9)}+2\sqrt{(y^2+9)(z^2+25)}+2\sqrt{(z^2+25)(x^2+1)}$

…………6 分

$\ge x^2+y^2+z^2+35+2(xy+3+yz+15+xz+5)$ …………8 分

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz+81$

$=(x+y+z)^2+81=85$，

$\because t>0$，$\therefore t\geq\sqrt{85}$ …………9 分

当且仅当 $\begin{cases}3x=y\\5y=3z\\5x=z\end{cases}$，又因为 $x+y+z=2$，即 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{9}\\y=\dfrac{2}{3}\\z=\dfrac{10}{9}\end{cases}$ 时，$t$ 取到最小值 $\sqrt{85}$

…………10 分

# 关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多