

# 2022~2023 学年佛山市普通高中教学质量检测(二)

## 高三数学

2023.4

本试卷共 4 页, 22 小题。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

### 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上, 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上对应题目后面的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后, 请将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 > 4\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $(2, 3)$       B.  $[-3, +\infty)$       C.  $[-3, -2) \cup (2, 3]$       D.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
2. 已知  $\square ABCD$  的顶点  $A(-1, -2)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(5, 6)$ , 则顶点  $D$  的坐标为 ( )  
 A.  $(1, 4)$       B.  $(1, 5)$       C.  $(2, 4)$       D.  $(2, 5)$
3. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则 “ $S_3 = 3a_2$ ” 是 “ $\{a_n\}$  为等差数列” 的 ( )  
 A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
4. “基础学科拔尖学生培养试验计划” 简称“珠峰计划”, 是国家为回应“钱学森之问” 而推出的一项人才培养计划, 旨在培养中国自己的学术大师。已知浙江大学、复旦大学、武汉大学、中山大学均有开设数学学科拔尖学生培养基地, 某班级有 5 位同学从中任选一所学校作为奋斗目标, 则每所学校至少有一位同学选择的不同方法数共有 ( )  
 A. 120 种      B. 180 种      C. 240 种      D. 300 种
5. 科技是一个国家强盛之根, 创新是一个民族进步之魂, 科技创新铸就国之重器, 极目一号 (如图 1) 是中国科学院空天信息研究院自主研发的系留浮空器。2022 年 5 月, “极目一号” III 型浮空艇成功完成 10 次升空大气科学观测, 最高升空至 9050 米, 超过珠穆朗玛峰, 创造了浮空艇大气科学观测海拔最高的世界纪录, 彰显了中国的实力。“极目一号” III 型浮空艇长 55 米, 高 19 米, 若将它近似看作一个半球、一个圆柱和一个圆台的组合体, 正视图如图 2 所示, 则极目一号体积约为 ( )

(参考数据:  $9.5^2 \approx 90$ ,  $9.5^3 \approx 857$ ,  $315 \times 1005 \approx 316600$ )



图 1

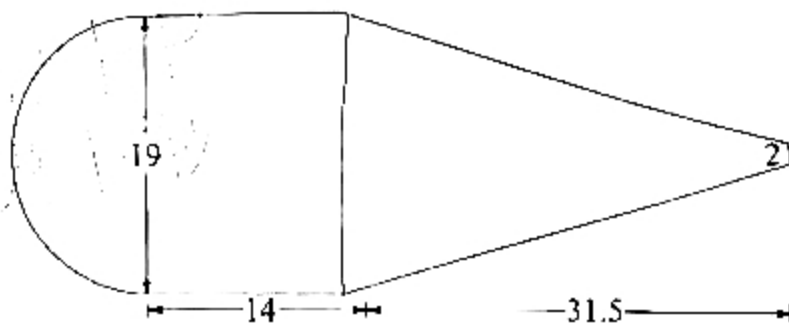


图 2

- A.  $9064 \text{ m}^3$       B.  $9004 \text{ m}^3$       C.  $8944 \text{ m}^3$       D.  $8884 \text{ m}^3$



14. 佛山被誉为“南国陶都”，拥有上千年的制陶史，佛山瓷砖享誉海内外，某企业瓷砖生产线上生产的瓷砖某项指标  $X \sim N(800, \sigma^2)$ ，且  $P(X < 801) = 0.6$ ，现从该生产线上随机抽取 10 片瓷砖，记  $Y$  表示  $800 \leq X < 801$  的瓷砖片数，则  $E(Y) = \underline{\quad}$ 。

15. 已知  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点， $P$  是过椭圆右顶点且与长轴垂直的直线上的动点，则  $\sin \angle F_1PF_2$  的最大值为  $\underline{\quad}$ 。

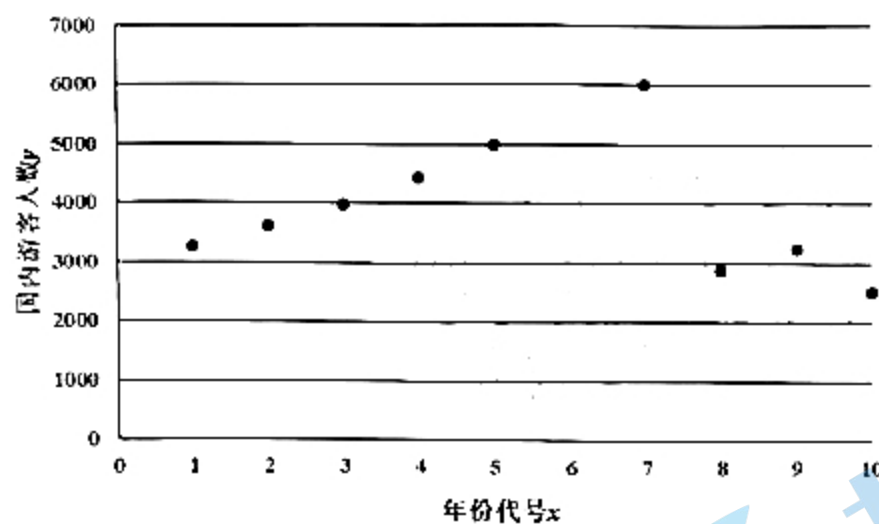
16. 有  $n$  个编号分别为  $1, 2, \dots, n$  的盒子，第 1 个盒子中有 2 个白球 1 个黑球，其余盒子中均为 1 个白球 1 个黑球，现从第 1 个盒子中任取一球放入第 2 个盒子，再从第 2 个盒子中任取一球放入第 3 个盒子，以此类推，则从第 2 个盒子中取到白球的概率是  $\underline{\quad}$ ，从第  $n$  个盒子中取到白球的概率是  $\underline{\quad}$ 。

**四、解答题：**本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

2023 年 3 月 5 日，国务院总理李克强在政府工作报告中指出“着力扩大消费和有效投资，面对需求不足甚至出现收缩，推动消费尽快恢复，帮扶旅游业发展，围绕补短板、调结构、增后劲扩大有效投资。”某旅游公司为确定接下来五年的发展规画，对 2013~2022 这十年的国内旅客人数作了初步处理，用  $x_i$  和  $y_i$  分别表示第  $i$  年的年份代号和国内游客人数(单位：百万人次)，得到下面的表格与散点图。

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代号 $x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国内游客数 $y$	3262	3611	3990	4432	5000	5542	6006	2879	3246	2530



(1) 2020 年~2022 年疫情特殊时期，旅游业受到重挫，现剔除这三年的数据，再根据剩余样本数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, 7)$  建立国内游客人数  $y$  关于年份代号  $x$  的一元线性回归模型；

(2) 2023 年春节期间旅游市场繁荣火爆，预计 2023 年国内旅游人数约 4550 百万人次，假若 2024 年~2027 年能延续 2013 年~2019 年的增长势头，请结合以上信息预测 2027 年国内游客人数。

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

参考数据： $\sum_{i=1}^7 y_i = 31843$ ， $\sum_{i=1}^7 (x_i - 4)(y_i - 4549) = 13104$

18. (12分)

已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,且 $\cos A + \sin B = \sqrt{3}(\sin A + \cos B)$ .

(1) 若 $C = \frac{\pi}{3}$ ,求 $A$ ;

(2) 已知点 $D$ 在边 $AC$ 上,且 $AD = BD = 2$ ,求 $CD$ 的取值范围.

19. (12分)

已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ ,其前 $n$ 项和为 $S_n$ ,满足 $2S_n = a_{n+2} - 6$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

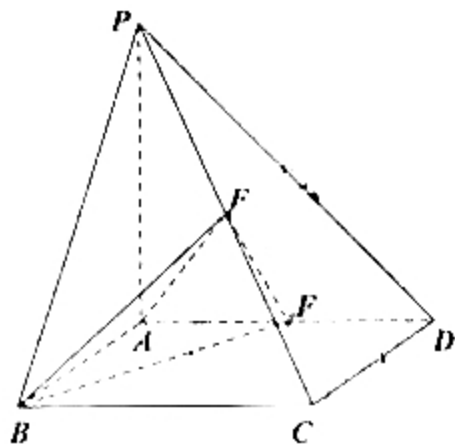
(2) 记 $b_m$ 为数列 $\{S_n\}$ 在区间 $(a_m, a_{m+2})$ 中最大的项,求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

20. (12分)

中国正在由“制造大国”向“制造强国”迈进,企业不仅仅需要大批技术过硬的技术工人,更需要努力培育工人们执着专注、精益求精、一丝不苟、追求卓越的工匠精神,这是传承工艺、革新技术的重要基石.如图所示的一块木料中, $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$ , $PA = AB = 2$ ,点 $E, F$ 是 $PC, AD$ 的中点.

(1) 若要经过点 $E$ 和棱 $AB$ 将木料锯开,在木料表面应该怎样画线,请说明理由并计算截面周长;

(2) 若要经过点 $B, E, F$ 将木料锯开,在木料表面应该怎样画线,请说明理由.



21. (12分)

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 $A$ ,焦距为4,过右焦点 $F$ 作垂直于实轴的直线交 $C$

于 $B, D$ 两点,且 $\triangle ABD$ 是直角三角形.

(1) 求双曲线 $C$ 的方程;

(2)  $M, N$ 是 $C$ 右支上的两动点,设直线 $AM, AN$ 的斜率分别为 $k_1, k_2$ ,若 $k_1 k_2 = -2$ ,求点 $A$ 到直线 $MN$ 的距离 $d$ 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{a}e^x - 3x$ ,其中 $a \neq 0$ .

(1) 若 $f(x)$ 有两个零点,求 $a$ 的取值范围;

(2) 若 $f(x) \geq a(1 - 2\sin x)$ ,求 $a$ 的取值范围.