2021 北京海淀高一（上）期末

数　　学

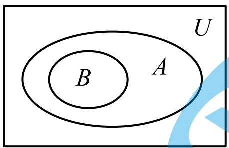
2021.01

学校___________班级___________姓名___________成绩___________

考 生 须 知	1．本试卷共 6 页，共三道大题，19 道小题. 满分 100 分. 考试时间 90 分钟. 2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名. 3．试题答案一律填涂或书写在试卷上. 4．考试结束，请将本试卷交回.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,2,3\}$，集合 A 与 B 的关系如图所示，则集合 B 可能是　　（　）



A. { 2，4，5 }

B. { 1，2，5 }

C. { 1，6 }

D. { 1，3 }

（2）若 $p:\forall x\in(0,+\infty), x+\frac{1}{x}\geq 2$，则 $\neg p$ 为　　（　）

A. $\exists x\in(0,+\infty), x+\frac{1}{x}<2$　　B. $\exists x\in(0,+\infty), x+\frac{1}{x}\leq 2$

C. $\exists x\in(0,+\infty), x+\frac{1}{x}\geq 2$　　D. $\forall x\in(0,+\infty), x+\frac{1}{x}<2$

（3）下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是　　（　）

A. $y=-x^2$　　B. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　C. $y=x^{-1}$　　D. $y=x^3$

（4）某校高一年级有 180 名男生，150 名女生，学校想了解高一学生对文史类课程的看法，用分层抽样的方式，从高一年级学生中抽取若干人进行访谈.已知在女生中抽取了 30 人，则在男生中抽取了　　（　）

A. 18 人　　B. 36 人　　C. 45 人　　D. 60 人

（5）已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列不等式一定成立的是　　（　）

A. $a^2 > b^2$　　B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$　　C. $a|c| > b|c|$　　D. $c - a < c - b$

（6）从数字 2, 3, 4, 6 中随机取两个不同的数，分别记为 x 和 y，则 $\frac{x}{y}$ 为整数的概率是　　（　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{7}{12}$

（7）已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{5}{x}$，下列区间中含有 $f(x)$ 的零点的是　　（　）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

（8）已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax$，则"$a < 0$"是"函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增"的　　（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

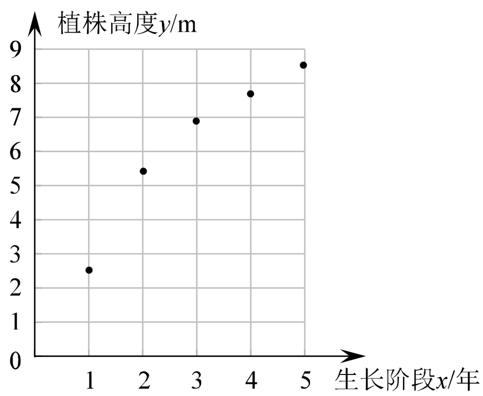
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

（9）对任意的正实数 x,y，不等式 $x + 4y \geq m\sqrt{xy}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是　　（　）

A. $(0,4]$　　B. $(0,2]$

C. $(-\infty,4]$　　D. $(-\infty,2]$

（10）植物研究者在研究某种植物 1~5 年内的植株高度时，将得到的数据用下图直观表示. 现要根据这些数据用一个函数模型来描述这种植物在 1~5 年内的生长规律，下列函数模型中符合要求的是（　）



A. $y = ka^x + b\ (k > 0, a > 0, 且 a \neq 1)$

B. $y = k\log_a x + b\ (k > 0, a > 0, 且 a \neq 1)$

C. $y = \frac{k}{x} + b\ (k > 0)$

D. $y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中横线上.

（11）不等式 $x^2 - 3x < 0$ 的解集为________.

（12）某超市对 6 个时间段内使用 A,B 两种移动支付方式的次数用茎叶图作了统计，如图所示. 使用支付方式 A 的次数的极差为______；若使用支付方式 B 的次数的中位数为 17，则 $m=$_______.

支付方式A		支付方式B
4　2	0	6　7
1　0	1	6　m　9
5　3	2	1

（13）已知 $a=\log_2\frac{1}{3}, b=2^{\frac{1}{3}}, c=\left(\frac{1}{3}\right)^2$，则 a，b，c 的大小关系是______________.（用“<”连结）

（14）函数 $f(x)$ 的定义域为 D，给出下列两个条件：

① 对于 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1\neq x_2$ 时，总有 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

② $f(x)$ 在定义域内不是单调函数.

请写出一个同时满足条件①②的函数 $f(x)$，则 $f(x)=$________.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geq a,\\ -x^2-2x, x<a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

① 存在实数 a，使函数 $f(x)$ 为奇函数；

② 对任意实数 a，函数 $f(x)$ 既无最大值也无最小值；

③ 对任意实数 a 和 k，函数 $y=f(x)+k$ 总存在零点；

④ 对于任意给定的正实数 m，总存在实数 a，使函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,m)$ 上单调递减.

其中所有正确结论的序号是____________.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题共9分）

已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{x|0<x<5\}$. 求：

（Ⅰ）$A\cap B$；

（Ⅱ）$(\complement_U A)\cup B$.

（17）（本小题共 10 分）

已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

（Ⅰ）用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（Ⅱ）解不等式 $f(2^{x+1})>f(4^x)$.

（18）（本小题共 10 分）

某网上电子商城销售甲、乙两种品牌的固态硬盘，甲、乙两种品牌的固态硬盘保修期均为 3 年. 现从该商城已售出的甲、乙两种品牌的固态硬盘中各随机抽取 50 个，统计这些固态硬盘首次出现故障发生在保修期内的数据如下：

型号	甲			乙		
首次出现故障的时间 x（年）	$0<x\le1$	$1<x\le2$	$2<x\le3$	$0<x\le1$	$1<x\le2$	$2<x\le3$
硬盘数（个）	2	1	2	1	2	3

假设甲、乙两种品牌的固态硬盘首次出现故障相互独立.

（Ⅰ）从该商城销售的甲品牌固态硬盘中随机抽取一个，试估计首次出现故障发生在保修期内的概率；

（Ⅱ）某人在该商城同时购买了甲、乙两种品牌的固态硬盘各一个，试估计恰有一个首次出现故障发生在保修期的第 3 年（即 $2<x\le3$ ）的概率.

（19）（本小题共 11 分）

函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正实数 k，对任意的 $x\in D$，总有 $|f(x)-f(-x)|\le k$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$.

（Ⅰ）判断下列函数是否具有性质 $P(1)$，并说明理由.

① $f(x)=2021$；　② $g(x)=x$；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 为二次函数，若存在正实数 k，使得函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$.

求证：$f(x)$ 是偶函数；

（Ⅲ）已知 $a>0$，k 为给定的正实数，若函数 $f(x)=\log_2(4^x+a)-x$ 具有性质 $P(k)$，求 a 的取值范围.

2021 北京海淀高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	C	B	D	B	C	A	C	B

二、填空题：

（11）$\{x\,|\,0<x<3\}$（12）23；8（13）$a<c<b$

（14）$\dfrac{1}{x}$（答案不唯一）（15）①②④

注：第（11）题解答正确但未写成集合形式或集合书写不正确的得 3 分；第（12）题每空 2 分；第（13）题写成 $b>c>a$ 的不扣分；第（14）题答案不唯一，只要解析式符合题意均得满分；第（15）题分为 0 分，2 分和 4 分三档，不答或含有③的得 0 分，答案是①②④中的一个或两个的得 2 分，答案是①②④的得 4 分.

三、解答题：本大题共 4 题，共 40.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）解：不等式$|x-1|<2$的解为$-1<x<3$，

故 $A=\{x|-1<x<3\}$……………………………………………………………2 分

（Ⅰ）$A\cap B=\{x|-1<x<3\}\cap\{x|0<x<5\}=\{x|0<x<3\}$…………………………………5 分

（Ⅱ）$\complement_U A=\{x\,|\,x\le -1\text{或}x\ge 3\}$，…………………………………………………………7 分

$(\complement_U A)\cup B=\{x\,|\,x\le -1\text{或}x\ge 3\}\cup\{x|0<x<5\}=\{x\,|\,x\le -1\text{或}x>0\}$……………………9 分

（17）（Ⅰ）证明：任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，…………………………………………1 分

则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-\dfrac{1}{x_1})-(x_2-\dfrac{1}{x_2})$……………………………………………2 分

$=(x_1-x_2)(1+\dfrac{1}{x_1x_2})$………………………………………………4 分

$\because$ $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

$\therefore$ $x_1-x_2<0, 1+\dfrac{1}{x_1x_2}>0$……………………………………………………………5 分

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<0$.

即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增……………………………………………………6 分

（Ⅱ）∵ $2^{x+1}>0, 4^x>0$,…………………………………………………………………………7 分

又∵函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(2^{x+1})>f(4^x)$ ，

∴ $2^{x+1}>4^x$ ，………………………………………………………………………………8 分

∴ $2^{x-1}<1$,…………………………………………………………………………………9 分

∴ $x<1$.

∴不等式的解集为 $(-\infty,1)$ ……………………………………………………………………10 分

（18）解：（Ⅰ）在图表中甲品牌的 50 个样本中，首次出现故障发生在保修期内的频率为 $\frac{5}{50}$ ，即 $\frac{1}{10}$.

……………………………………………………………………………………………1 分

设从该商城销售的甲品牌固态硬盘中随机抽取一个，其首次出现故障发生在保修期内为事件 A .

……………………………………………………………………………………………2 分

利用频率估计概率，得 $P(A)=\frac{1}{10}$.

所以从该商城销售的甲品牌固态硬盘中随机抽取一个，估计其首次出现故障发生在保修期内的

概率为 $\frac{1}{10}$ ……………………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）在图表中甲品牌的 50 个样本中，首次出现故障发生在保修期第 3 年的频率为 $\frac{2}{50}$ ，即 $\frac{1}{25}$.

在图表中乙品牌的 50 个样本中，首次出现故障发生在保修期第 3 年的频率为 $\frac{3}{50}$.

……………………………………………………………………………………………5 分

设从该商城销售的甲品牌固态硬盘中随机抽取一个，其首次出现故障发生在保修期内的第三年为事件 B ，从该商城销售的乙品牌固态硬盘中随机抽取一个，其首次出现故障发生在保修期内的第三年为事件 C ……………………………………………………………………………6 分

利用频率估计概率，得 $P(B)=\frac{1}{25}$ ， $P(C)=\frac{3}{50}$ ……………………………………………7 分

$$\begin{aligned}P(B\overline{C}+\overline{B}C)&=P(B)P(\overline{C})+P(\overline{B})P(C)\\&=P(B)[1-P(C)]+[1-P(B)]P(C)\\&=\frac{1}{25}\times(1-\frac{3}{50})+(1-\frac{1}{25})\times\frac{3}{50}\\&=\frac{119}{1250}\end{aligned}$$

所以某人在该商城同时购买了甲、乙两个品牌的固态硬盘各一个，估计保修期内恰有一个首次出现故障的概率为 $\frac{119}{1250}$.

……………………………………………………………………10 分

（19）解：（Ⅰ）对于①，对于任意实数 x，可得 $|f(x)-f(-x)|=|2021-2021|=0<1$,所以 $f(x)$ 具有性质 $P(1)$；

……………………………………………………………………2 分

对于②，对于任意实 x，可得 $|g(x)-g(-x)|=|x-(-x)|=|2x|$.

易知,只需取 $x=1$,则可得 $|g(1)-g(-1)|=2>1$,所以 $g(x)$ 不具有性质 $P(1)$.

……………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 满足性质 $P(k)$.

则对于任意实数 x,满足 $|f(x)-f(-x)|=|ax^2+bx+c-(ax^2+bx+c)|=|2bx|\le k$.

……………………………………………………………………5 分

若 $b\neq 0$,则可取 $x_0=\dfrac{k}{|b|}>0$,有 $|f(x_0)-f(-x_0)|=|2bx_0|=2k>k$,矛盾.

……………………………………………………………………6 分

所以 $b=0$,此时 $f(x)=ax^2+c(a\neq 0)$ 即 $f(x)$ 为偶函数.

……………………………………………………………………7 分

（Ⅲ）由于 $a>0$,函数 $f(x)=\log_2(4^x+a)-x$ 的定义域为 R.

易知 $f(x)=\log_2(4^x+a)-x=\log_2(2^x+a\cdot 2^{-x})$.

若函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$，则对于任意实数 x,有

$$|f(x)-f(-x)|=|\log_2(2^x+a\cdot 2^{-x})-\log_2(2^{-x}+a\cdot 2^x)|=|\log_2\frac{2^x+a\cdot 2^{-x}}{2^{-x}+a\cdot 2^x}|\le k.$$

即 $-k\le \log_2\dfrac{2^x+a\cdot 2^{-x}}{2^{-x}+a\cdot 2^x}\le k$ ……………………………………8 分

即 $-k\le \log_2\dfrac{4^x+a}{1+a\cdot 4^x}\le k$.

由于函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

可得 $2^{-k}\le \dfrac{4^x+a}{1+a\cdot 4^x}\le 2^k$ ……………………………………9 分

即 $2^{-k}\le \dfrac{1}{a}+\dfrac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}\le 2^k$.

当 $a=1$ 时，得 $2^{-k}\le 1\le 2^k$，对任意实数 x 恒成立.

当 $a>1$ 时，易知 $a-\frac{1}{a}>0$，由 $1+a\cdot 4^x>1$，得 $0<\frac{1}{1+a\cdot 4^x}<1$，得 $0<\frac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}<a-\frac{1}{a}$，

得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}<a$.

依题意， $2^{-k}\le\frac{1}{a}+\frac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}\le 2^k$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{a}\ge 2^{-k},\\ a\le 2^k.\end{cases}$ 即 $1<a\le 2^k$.

当 $a<1$ 时，易知 $a-\frac{1}{a}<0$，由 $1+a\cdot 4^x>1$，得 $0<\frac{1}{1+a\cdot 4^x}<1$，得 $0>\frac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}>a-\frac{1}{a}$，

得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{a}+\frac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}>a$.

依题意， $2^{-k}\le\frac{1}{a}+\frac{a-\frac{1}{a}}{1+a\cdot 4^x}\le 2^k$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $\begin{cases}a\ge 2^{-k},\\ \frac{1}{a}\le 2^k.\end{cases}$ 即 $1>a\ge 2^{-k}$.

综上所述，a 的取值范围为 $[2^{-k},2^k]$.

……………………………………………………………………………………11 分

注：本试卷各题中若有其他合理的解法请酌情给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。