

2019 北京十一中高一（上）期中

数 学

一、选择题（共 10 小题；共 50 分）

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，则下列可以作为 A 的子集的是（ ）

- A. 1, 2 B. $\{1, 2, 4\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{1, 2\}$

2. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，则 $A \cup B =$ （ ）

- A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 3, 4\}$

3. 函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ 的单调递减区间为（ ）

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
C. $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

4. 命题 P ：“ $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x \geq 4^x$ ” 的否定 $\neg P$ 为（ ）

- A. $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x < 4^x$ B. $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x \leq 4^x$
C. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} < 4^{x_0}$ D. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} \leq 4^{x_0}$

5. 函数 $y = x + \frac{2}{x} (x > 0)$ 取得最小值时的自变量 x 等于（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 1 D. 3

6. 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3, x \in [0, 3]$ 的值域是（ ）

- A. $[3, 6]$ B. $[2, 6]$ C. $[2, 3]$ D. $[0, 3]$

7. 下列函数中，在其定义域内既是奇函数又是减函数的是（ ）

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = -x^2$ C. $y = -2x$ D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

8. 函数 $y = \sqrt{2x-1} - (4x-3)^0$ 的定义域为 ()

- A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
C. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ D. $(-\infty, \frac{3}{4}) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

9. 设 $p: \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, $q: 2^x \geq 1$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

10. 德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著, 以其名命名的函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 称为狄利克雷函数,

则关于函数 $f(x)$ 有以下四个命题:

- ① $f(f(x)) = 1$;
② 函数 $f(x)$ 是偶函数;
③ 任意一个非零有理数 T , $f(x+T) = f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立;
④ 存在三个点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$, 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形。其中真命题的个数是 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题 (共 6 小题; 共 24 分)

11. 计算: $2^{\frac{1}{2}} + \frac{(-4)^0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 不等式 $\frac{2x-1}{x+2} < 0$ 的解集为 _____.

13. 能说明“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题的一组 a, b 的值依次为 _____.

14. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $[-5, 5]$ 上的奇函数, 当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图象如下图, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 _____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+a, & -2 \leq x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 则:

① $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____;

② 若 $f(x)$ 有最小值, 且无最大值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

16. 已知 $x \in \mathbb{R}$, 定义: $A(x)$ 表示不小于 x 的最小整数, 如 $A(\sqrt{3}) = 2$, $A(-1.2) = -1$.

若 $A(2x+1) = 3$, 则 x 的取值范围是 _____;

若 $x > 0$ 且 $A(2x \cdot A(x)) = 5$, 则 x 的取值范围是 _____.

三、解答题 (共 4 小题; 共 46 分)

17. 已知不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 A , 不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 B .

(1) 求集合 A , 集合 B ;

(2) 求 $(C_R A) \cap B$.

18. 某游泳馆要建造一个容积为 8 立方米，深为 2 米的长方体形状的无盖水池，已知池底和池壁的造价分别是 120 元/平方米和 80 元/平方米，设底面一边的长为 x 米（长方体的容积是长方体的底面积乘以长方体的高）

- (1) 当 $x = 1$ 时，求池底的面积和池壁的面积；
- (2) 求总造价 y （元）关于底面一边长 x （米）的函数解析式；
- (3) 当 x 为何值时，总造价最低，最低造价为多少元？

19. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y ，恒有 $f(x) + f(y) = f(x+y)$ ，且当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$ ，

$$f(1) = -\frac{2}{3}$$

- (1) 求 $f(0)$ 的值；
- (2) 求证： $f(x)$ 为奇函数；
- (3) 求 $f(x)$ 在 $[-3, 6]$ 上的最大值与最小值；

20. 已知函数 $f(x) = ka^x$ （ k 为常数， $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ）的图象过点 $A(0, 1)$ 和点 $B(2, 16)$

- (1) 求函数的解析式；
- (2) $g(x) = b + \frac{1}{f(x)+1}$ 是奇函数，求常数 b 的值；

(3) 对任意的 $x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，试比较 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的大小。

2019 北京十一中高一（上）期中数学参考答案

第一部分

1.D 2.A 3.C 4.C 5.A 6.B 7.C 8.B 9.A 10.A

第二部分

11. $2\sqrt{2}+1$

12. $(-2, \frac{1}{2})$

13. 1, -1 (答案不唯一)

14. $(-3, 0) \cup (3, 5]$

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}, (1, \frac{5}{2}]$

16. $(\frac{1}{2}, 1], (1, \frac{4}{5}]$

第三部分

17. (1) 集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | -3 < x < 2\}$

(2) $C_R A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ $C_R A \cap B = \{x | -3 < x \leq -1\}$

18. 解: (1) 因为容积为 8 立方米, 深为 2 米, 所以池底面积为 $\frac{8}{2} = 4$ 平方米, 所以池底造价为 $120 \times 4 = 480$

元。因为深为 2 米, 底面一边长 x 米, 底面积为 4 平方米, 所以另一边长为 $\frac{4}{x}$ 米。

则四面池壁的面积为 $2x \times 2 + 2 \times \frac{4}{x} \times 2 = 4x + \frac{16}{x}$, $\therefore y = 80 \times (4x + \frac{16}{x}) + 480 = 320x + \frac{1280}{x} + 480, (x > 0)$;

(2) 由(1)知, $y = 320x + \frac{1280}{x} + 480, (x > 0)$, 所以 $y = 320x + \frac{1280}{x} + 480 \geq 2\sqrt{320x \cdot \frac{1280}{x}} + 480 = 1760$, 当且仅当 $320x = \frac{1280}{x}$, 即 $x = 2 > 0$ 时, 取得最小值 1760, $\therefore$ 当 $x = 2$ 时, 总造价最低, 最低造价为 1760 元。

19. (1) 令 $x = y = 0$, 可得 $f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$, 从而, $f(0) = 0$.

(2) 令 $y = -x$, 可得 $f(x) + f(-x) = f(x-x) = f(0) = 0$. 即 $f(-x) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数。

(3) 对任意 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 > x_2$, 则 $x_1 - x_2 > 0$, 于是 $f(x_1 - x_2) < 0$.

$f(x_1) - f(x_2) = f[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2) = f(x_1 - x_2) + f(x_2)$, 从而 $f(x_2) = f(x_1 - x_2) < 0$ 。

所以 $f(x)$ 在 R 上为减函数, 所求函数的最大值为 $f(-3)$, 最小值为 $f(6)$ 。

因为 $f(-3) = -f(3) = -[f(2) + f(1)] = -[2f(1) + f(1)] = -3f(1) = 2$,

$f(6) = -f(-6) = -[f(-3) + f(-3)] = -4$, 所以 $f(x)$ 在 $[-3, 6]$ 上的最大值为 2, 最小值为 -4。

20. (1) 将 $A(0, 1)$ 和点 $B(2, 16)$ 代入 $f(x)$ 得 $\begin{cases} k = 1 \\ k \cdot a^2 = 16 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1 \\ a = 4 \end{cases}$, 故 $f(x) = 4^x$ 。

(2) 由(1)得 $g(x) = b + \frac{1}{4^x + 1}$, 若 $g(x)$ 是奇函数, 则 $g(-x) = b + \frac{1}{4^{-x} + 1} = b + \frac{4^x}{4^x + 1} = -b - \frac{1}{4^x + 1}$, 解得 $b = -\frac{1}{2}$ 。

(3) 因为 $f(x)$ 的图象是凹函数, 所以 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$,

证明如下:

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 4^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$, $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{4^{x_1} + 4^{x_2}}{2} > \frac{2\sqrt{4^{x_1} \cdot 4^{x_2}}}{2} = 4^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$, 故 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 。