2021年5月福州市高中毕业班质量检测

数学试题

（完卷时间120分钟；满分150分）

注意事项

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $A=\{x\in U\mid 3^x\leqslant 9\}$，则 $\complement_U A=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{4,5,6\}$　　D. $\{3,4,5,6\}$

2. 已知 z 为复数，$z^2+1=0$，则 $|z-1|$ 等于

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

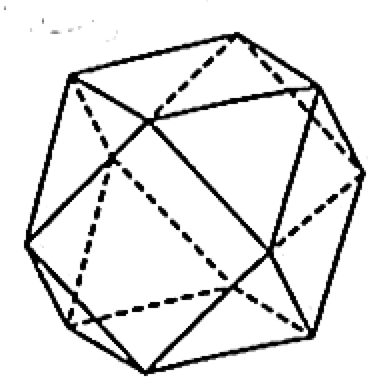
3. 在 $(x+y+z)^6$ 的展开式中，xyz^4 的系数是

A. 15　　B. 30　　C. 36　　D. 60

4. 某公园设置了一些石凳供大家休息，每张石凳是由正方体石料截去八个一样的四面体得到的，如图所示．如果一张石凳的体积是 $0.18\ \mathrm{m}^3$，那么原正方体石料的体积是

A. $0.196\mathrm{m}^3$　　B. $0.216\mathrm{m}^3$

C. $0.225\mathrm{m}^3$　　D. $0.234\mathrm{m}^3$



5. 已知 $\log_2 a=0.5^a=0.2^b$，则

A. $a<1<b$　　B. $1<a<b$

C. $b<1<a$　　D. $1<b<a$

6. 已知直线 $y=x-1$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点．若点 $C(-1,m)$ 满足 $\angle ACB=90^\circ$，则 $m=$

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 经多次实验得到某种型号的汽车每小时耗油量 Q(单位:L) 与速度 v(单位:km/h) $(40\leqslant v\leqslant 120)$ 的数据如下表:

v	40	60	90	100	120
Q	5.2	6	8.325	10	15.6

为描述 Q 与 v 的关系,现有以下三种模型供选择:$Q(v)=0.04v+3.6$,$Q(v)=0.5^{v}+a$,$Q(v)=0.000025v^3-0.004v^2+0.25v$. 选出最符合实际的函数模型,解决下列问题:某高速公路共有三个车道,分别是外侧车道、中间车道、内侧车道,车速范围分别是 $[60,90)$,$[90,110)$,$[110,120]$ (单位:km/h). 为使百公里耗油量 W(单位:L) 最小,该型号汽车行驶的车道与速度为

A. 在外侧车道以 80 km/h 行驶　　B. 在中间车道以 90 km/h 行驶

C. 在中间车道以 95 km/h 行驶　　D. 在内侧车道以 115 km/h 行驶

8. 为了了解疫情期间的心理需求,心理健康辅导员设计了一份问卷调查,问卷有两个问题:①你的学号尾数是奇数吗? ②你是否需要心理疏导? 某校高三全体学生 870 人参加了该项问卷调查. 被调查者在保密的情况下掷一枚质地均匀的骰子,当出现 1 点或 2 点时,回答问题①,否则回答问题②. 由于不知道被调查者回答的是哪一个问题,因此,当他回答"是"时,别人无法知道他是否有心理问题,这种调查既保护了他的隐私,也能得到诚实的问卷反应. 问卷调查结束后,发现该校高三学生中有 155 人回答"是",由此可估计该校高三需要心理疏导的学生人数约为

A. 10　　B. 15　　C. 29　　D. 58

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,$\boldsymbol{c}=(1,1)$,在下列各组向量中,可以作为平面内所有向量的一个基底的是

A. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$　　B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　C. $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

10. 已知 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$,直线 $x=\frac{5\pi}{12}$,$x=\frac{11\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴,则下列说法正确的是

A. 函数 $y=f(x+\frac{5\pi}{12})$ 为偶函数　　B. $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

C. $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 上有 2 个零点　　D. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上为单调函数

11. 在棱长为2的正四面体 $A-BCD$ 中，M 为 AD 的中点，N 为 BC 的中点，则下列说法正确的是

A. $MN // CD$

B. 正四面体 $A-BCD$ 外接球的表面积等于 6π

C. $MN \perp BC$

D. 正四面体 $A-BCD$ 外接球的球心在 MN 上

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，M 为 AB 的中点，且 $|CA-CB|=CM$，则下列说法正确的是

A. 动点 C 的轨迹是双曲线

B. 动点 C 的轨迹关于点 M 对称

C. $\triangle ABC$ 是钝角三角形

D. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知 $\tan(\pi-\alpha)=-\frac{3}{4}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为________.

14. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_na_{n+1}=2^{2n+1}$，则 $S_n=$________.

15. 购买某种意外伤害保险，每个投保人每年度向保险公司交纳保险费20元，若被保险人在购买保险的一年度内出险，可获得赔偿金50万元．已知该保险每一份保单需要赔付的概率为 10^{-5}，某保险公司一年能销售10万份保单，且每份保单相互独立，则一年度内该保险公司此项保险业务需要赔付的概率约为________；一年度内盈利的期望为________万元.（参考数据：$(1-10^{-5})^{10^5}\approx 0.37$）（本小题第一空2分，第二空3分）

16. 函数 $f(x)=(x^2-10x+26)e^x$，若 $\forall x_1,x_2\in I, x_1\neq x_2$，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 成立，则满足条件的一个区间 I 可以是________（填写一个符合题意的区间即可）.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求 B；

（2）若 D 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上一点，且 $a=3$，$c=4$，$AD=1$，求 CD.

18.（12分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$.

（1）证明：存在等差数列 $\{b_n\}$，当 $n>1$ 时，$a_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立；

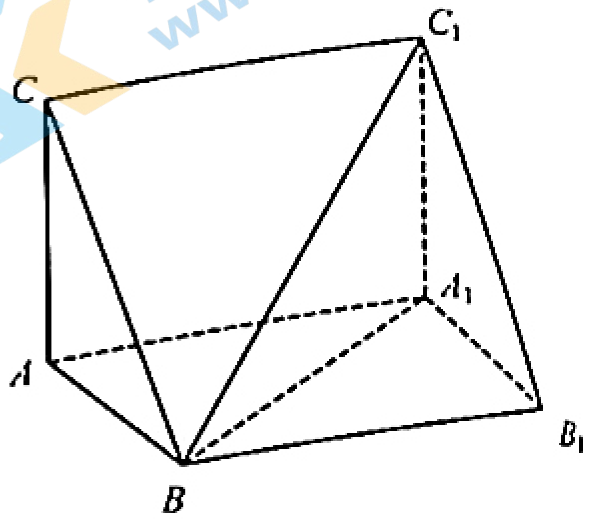
（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. (12 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

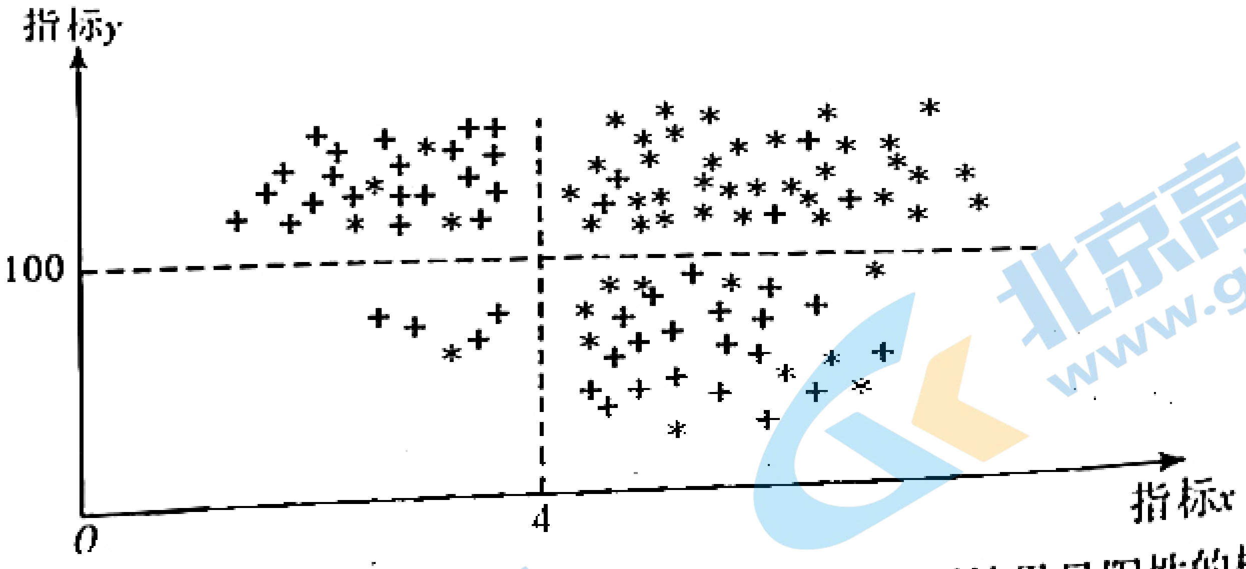
(1) 证明：$AA_1\perp$ 平面 ABC；

(2) 在①$AB=AC=1$，②BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $30°$，③异面直线 C_1C 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 这三个条件中任选两个，求二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值.



20. (12 分)

某种病菌在某地区人群中的带菌率为 10%，目前临床医学研究中已有费用昂贵但能准确检测出个体是否带菌的方法．现引进操作易、成本低的新型检测方法：每次只需检测 x,y 两项指标，若指标 x 的值大于 4 且指标 y 的值大于 100，则检验结果呈阳性，否则呈阴性．为考查该检测方法的准确度，随机抽取 50 位带菌者（用“ * ”表示）和 50 位不带菌者（用“ + ”表示）各做 1 次检测，他们检测后的数据，制成如下统计图：



(1) 从这 100 名被检测者中，随机抽取一名不带菌者，求检测结果呈阳性的概率；

(2) 能否在犯错误概率不超过 0.001 的前提下，认为“带菌”与“检测结果呈阳性”有关？

(3) 现用新型检测方法，对该地区人群进行全员检测，用频率估计概率，求每个被检者“带菌”且“检测结果呈阳性”的概率．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B,O 为原点. 以 OB 为对角线的正方形 $OPBQ$ 的顶点 P,Q 在 C 上.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 当 $a=2$ 时,过$(1,0)$ 作与 x 轴不重合的直线 l 与 C 交于 M,N 两点,直线 AM,BN 的斜率分别为 k_1,k_2,试判断$\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值? 若是,求出定值,并加以证明;若不是,请说明理由.

22. (12 分)

(1) 若 $0<a\leqslant 1$,判断函数 $f(x)=a\sin(1-x)+\ln x$ 在区间$(0,1)$内的单调性;

(2) 证明:对任意 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$, $\sin^2\frac{1}{5}+\sin^2\frac{1}{10}+\cdots+\sin^2\frac{1}{n^2+1}<\ln 2$.

福州市 2021 届高三 5 月调研卷

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数．选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

1．D　　2．C　　3．B　　4．B

5．C　　6．C　　7．A　　8．B

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 20 分．每小题全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9．AD　　10．ABC　　11．BCD　　12．BD

二、填空题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 20 分．

13．$\dfrac{24}{25}$　　14．$2^{n+1}-2$

15．0.63；150　　16．$(2,3)$ 等（注：$[2,4]$ 的任意一个非空子区间均可）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．本小题主要考查正弦定理、余弦定理、解三角形等基础知识；考查运算求解能力；考查函数与方程思想，化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养；体现基础性．满分 10 分．

解法一：（1）由题设及正弦定理得，$\sin B\sin A=\sin A\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，…………… 1 分

从而 $\sin B\sin A=\sin A(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B)$，……………………………………2 分

化简得，$\dfrac{1}{2}\sin A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B$．……………………………………3 分

因为 $0 < A < \pi, \therefore \sin A \neq 0$， …………………………………………………………………4 分

所以 $\tan B = \sqrt{3}$，

又 $0 < B < \pi$，故 $B = \dfrac{\pi}{3}$． …………………………………………………………………5 分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理知，

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 3^2 + 4^2 - 2\times 3\times 4\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} = 13$，

即 $b = \sqrt{13}$． …………………………………………………………………………………6 分

又由于 A, B, C, D 四点共圆，从而 $\angle ADC = \pi - B = \dfrac{2\pi}{3}$， ……………………… 7 分

在 $\triangle ADC$ 中，设 $DC = x$，由余弦定理得，

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$， ……………………………………… 8 分

即得 $13 = 1^2 + x^2 - 2\times 1\cdot x\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}$，

化简得，$x^2 + x - 12 = 0$，解得 $x = 3$ 或 $x = -4$（舍去），

故 $DC = 3$． ………………………………………………………………………………10 分

解法二：（1）由题设及正弦定理得，$\sin B\sin A = \sin A\cos(B - \dfrac{\pi}{6})$， ………………1 分

从而 $\sin B\sin A = \sin A(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B + \dfrac{1}{2}\sin B)$， ……………………………………2 分

化简得 $\dfrac{1}{2}\sin A\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B$． ………………………………………………3 分

因为 $0 < A < \pi, \therefore \sin A \neq 0$，

所以 $\dfrac{1}{2}\sin B - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B = 0$，

所以 $\sin\left(B - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$， ……………………………………………………………4 分

又 $0 < B < \pi$，故 $B = \dfrac{\pi}{3}$． …………………………………………………………………5 分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理知，

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 3^2 + 4^2 - 2\times 3\times 4\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} = 13$，

即 $b = \sqrt{13}$． …………………………………………………………………………………6 分

又由于 A,B,C,D 四点共圆，从而 $\angle ADC=\pi-B=\dfrac{2\pi}{3}$， ……………………7 分

在 $\triangle ACD$ 中，设 $\angle ACD=\theta$，则由正弦定理得

$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，即 $\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{CD}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{\sqrt{13}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$， ………8 分

所以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，

又 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 $\cos\theta=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$， ……………………………………9 分

所以 $CD=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=3$． ……………………………… 10 分

18．本小题主要考查等差数列、等比数列的概念、通项公式，数列求和等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力；考查化归与转化思想；考查数学抽象、数学运算等核心素养；体现基础性，综合性．满分 12 分．

解法一：（1）当 $n>1$ 时，由 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，得 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2-\dfrac{b_{n-1}}{b_n}$， ……………………2 分

化简得 $b_{n+1}=2b_n-b_{n-1}$，即 $b_{n+1}-b_n=b_n-b_{n-1}$， ……………………………………4 分

这说明 $\{b_n\}$ 是等差数列，故存在一个等差数列 $\{b_n\}$，当 $n>1$ 时，$a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立．

……………………………………………………………………………………6 分

（2）依题意，$a_2=2-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{5}{3}$， ……………………………………………7 分

又由（1）知 $a_2=\dfrac{b_2}{b_1}$，所以 $\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{5}{3}$，即 $b_2=\dfrac{5}{3}b_1$， ……………………………8 分

所以等差数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d=b_2-b_1=\dfrac{2}{3}b_1$， …………………………………9 分

所以 $b_n=b_1+(n-1)d=\dfrac{2}{3}(n+\dfrac{1}{2})b_1$， ………………………………………… 11 分

故 $a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})b_1}{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{2})b_1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}$. ……………………………………………………12 分

解法二：（1）由已知，当 $n>1$ 时，因为 $a_1=3$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，

所以 $a_2=\dfrac{5}{3}$，$a_3=\dfrac{7}{5}$，……………………………………………………………2 分

故令 $b_n=2n-1$，则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列. ………………4 分

此时 $a_n=\dfrac{2n+1}{2n-1}$，代入验算满足 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，

故存在一个等差数列 $\{b_n\}$，当 $n>1$ 时，$a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立，命题得证. ……………6 分

（2）由 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，得 $a_{n+1}-1=1-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n-1}{a_n}$，……………………………7 分

由 $a_1=3$，得 $a_n-1\neq 0$，………………………………………………………………8 分

所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}==\dfrac{a_n}{a_n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}+1$，…………………………………………9 分

所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{2}$，公差为 1 的等差数列，

即 $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{2}+(n-1)=\dfrac{2n-1}{2}$，……………………………………………11 分

所以 $a_n=\dfrac{2n+1}{2n-1}$. ……………………………………………………………12 分

19. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，直线与平面所成的角，异面直线所成的角等基础知识；考查空间想象能力，推理论证能力，运算求解能力； 考查化归与转化思想，数形结合思想，函数与方程思想；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性．满分 12 分．

解法一：（1）证明：因为 $AB\perp AC$，平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1. ……1 分

又因为 $AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AC\perp AA_1$. ……………………………………2 分

同理：$AB\perp AA_1$，…………………………………………………………………4 分

又因为 $AB\cap AC=A$，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC；……………………………………………5 分

（2）选择①②：

由（1）知，$AA_1\perp$ 平面 ABC，所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱.

因为 $AC\perp AB$，$AB=AC=1$，所以 $BC=\sqrt{2}$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$A_1C_1 \parallel AC$，

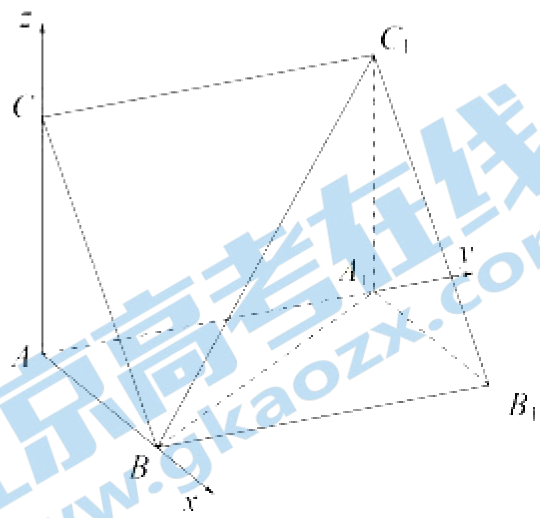
所以 $A_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $\angle C_1BA_1$ 为 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角，

所以 $\angle C_1BA_1=30^\circ$. ……………………………………………………………………6 分

在 Rt $\triangle C_1A_1B$ 中，$C_1A_1=1$，$C_1B=2$，所以 $A_1B=\sqrt{3}$，

在 Rt $\triangle ABA_1$ 中，$AB=1$，所以 $AA_1=\sqrt{2}$. ……………………………………………7 分

以 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图所示.



$B(1,0,0)$，$C(0,0,1)$，$B_1(1,\sqrt{2},0)$，$A_1(0,\sqrt{2},0)$，$C_1(0,\sqrt{2},1)$

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,1)$，

$\overrightarrow{BC_1}=(-1,\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,\sqrt{2},0)$. ……………………………8 分

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{2}y=0\\ z=0\end{cases}$，令 $y=1$ 得平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,0)$.

……………………………………………………………………………………………………9 分

设平面 BC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}y=0\\ -x+\sqrt{2}y+z=0\end{cases}$，令 $x=1$ 得平面 BC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

……………………………………………………………………………………………………10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………11 分

所以二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………12 分

解法二：

（1）同解法一；……………………………………………………………………5 分

（2）选择①③：

因为 $AC\perp AB$， $AB=AC=1$，所以 $BC=\sqrt{2}$.

由（1）知， $AA_1\perp$ 平面 ABC，故 $AA_1\perp AB$，

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $C_1C\,/\!/\,A_1A$，

所以异面直线 C_1C 与 A_1B 所成角为 $\angle AA_1B$，所以 $\cos\angle AA_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………6 分

在 Rt $\triangle ABA_1$ 中，因为 $AB=1$， $AA_1\perp AB$， $\cos\angle AA_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $AA_1=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………7 分

下同解法一；…………………………………………………………………12 分

解法三：

（1）同解法一；……………………………………………………………………5 分

选择②③：

由（1）知， $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1， $A_1C_1\,/\!/\,AC$，

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $\angle C_1BA_1$ 为 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角，

所以 $\angle C_1BA_1=30^\circ$. ……………………………………………………………6 分

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $C_1C\,/\!/\,A_1A$，且 $AA_1\perp AB$，

所以异面直线 C_1C 与 A_1B 所成角为 $\angle AA_1B$，所以 $\cos\angle AA_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………7 分

在 Rt$\triangle A_1BC_1$ 中，设 $C_1A_1=1$，则 $C_1B=2$，所以 $A_1B=\sqrt{3}$，

在 Rt $\triangle ABA_1$ 中，因为 $A_1B=\sqrt{3}$， $\cos\angle AA_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $AA_1=\sqrt{2}$， $AB=1$. ……………………………………………………8 分

下同解法一. ……………………………………………………………………………12 分

20. 本题主要考查用样本估计总体，独立性检验，条件概率等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，推理论证能力，创新能力以及应用意识；考查统计与概率思想，化归与转化思想；考查数学建模，数据分析，数学运算等核心素养；体现综合性、应用性和创新性. 满分 12 分.

解法一：（1）设 $A=$ “从这 100 名被检测者中，随机抽取一名不带菌者，检测结果呈阳性”，……………………………………………………………………………1 分

根据统计图可知在不带菌者中，检测结果呈阳性的有 5 人，………………………2 分

所以 $P(A)=\dfrac{5}{50}=\dfrac{1}{10}$. ……………………………………………………………3 分

（2）假设 H_0：“带菌”与“检测结果呈阳性”无关，……………………………4 分

可作出 2×2 列联表如下：……………………………………………………………5 分

	阳性	阴性	合计
带菌	35	15	50
不带菌	5	45	50
合计	40	60	100

进一步计算得，K^2 的观测值 $k=\dfrac{100\times(35\times45-15\times5)^2}{40\times60\times50\times50}=37.5>10.828$；………6 分

因为 $P(K^2\geq10.828)=0.001$，………………………………………………………7 分

所以，能够在犯错误概率不超过 0.001 的前提下认为“带菌”与“检测结果呈阳性”有关. ……………………………………………………………………………………8 分

（3）设 $B=$ “被检测者带菌”，$C=$ “被检测者检测结果呈阳性”，

则 $BC=$ “被检者‘带菌’且‘检测结果呈阳性’”，………………………………9 分

用频率估计概率，根据题意可知：$P(B)=0.1$，$P(C\mid B)=\dfrac{35}{50}=0.7$，…………11 分

所以由条件概率公式可知 $P(BC)=P(B)\cdot P(C\mid B)=0.1\times0.7=0.07$. …………12 分

解法二：（1）设 $A=$ “从这 100 名被检测者中，随机抽取一名为不带菌者”，$D=$ “从这 100 名被检测者中，随机抽取一名检测结果呈阳性”，

则“从这 100 名被检测者中，随机抽取一名不带菌者，检测结果呈阳性”的概率就是“在事件 A 发生的条件下，事件 D 发生”的概率，记为 $P(D|A)$． …………1 分

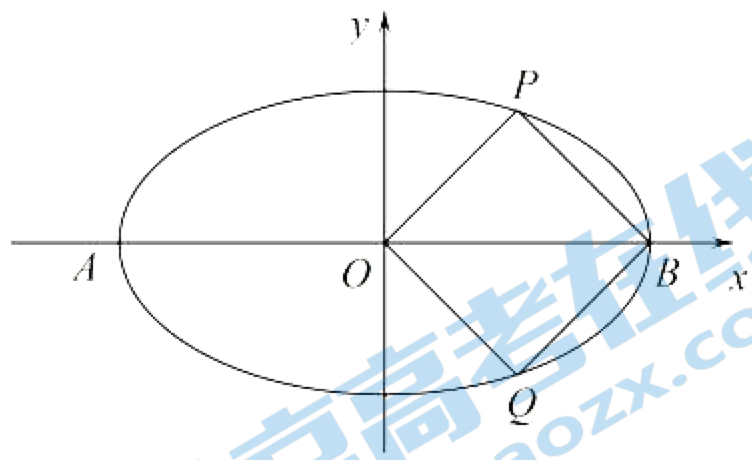
根据题意，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(AD)=\frac{5}{100}$， ……………………………………2 分

利用条件概率公式，得 $P(D|A)=\frac{P(AD)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{10}$． ……………………………3 分

（2）下同解法一． ………………………………………………………………12 分

21．本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分 12 分．

解法一：（1）以 OB 为对角线的正方形 $OPBQ$ 的顶点



坐标分别为 $B(a,0)$，$P(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$，$Q(\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$． ……1 分

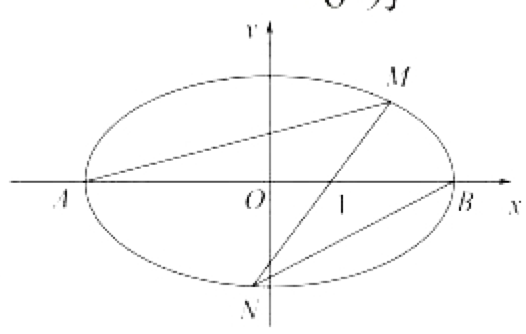
因为 P,Q 在椭圆上，所以 $\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2}+\frac{\frac{a^2}{4}}{b^2}=1$， ……2 分

所以 $\frac{a^2}{b^2}=3$， ……………………………………3 分

所以 $c^2=a^2-b^2=2b^2$， ……………………………………………………4 分

所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$； ……………………………………………5 分

（2）当 $a=2$ 时，$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以椭圆的方程为 $x^2+3y^2=4$． ……………………6 分



$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1}{3}$，理由如下：

①当直线 l 的斜率不存在时，l 的方程为 $x=1$，则 $M(1,1),N(1,-1)$，

所以 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}$，$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{-1}{1-2}=1$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$． ……………7 分

②当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $x=my+1$，$m\neq 0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

不妨设 $y_2<0<y_1$，且 $y_1+y_2\neq 0$．

由 $\begin{cases}x=my+1\\x^2+3y^2=4\end{cases}$ 可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$， ……………………………………………8 分

$\Delta=16m^2+36>0$， $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$， $y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+3}$． ……………………………9 分

要证 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{3}$，只要证明：$\dfrac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\dfrac{1}{3}$，

只要证：$3y_1(x_2-2)=y_2(x_1+2)$，

只要证：$3y_1(my_2-1)=y_2(my_1+3)$，

只要证：$2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

因为 $y_1+y_2\neq 0$， $m\neq 0$，即证 $\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{3}{2m}$， …………………………………10 分

因为 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$， $y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+3}$，所以 $\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{3}{2m}$．

所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{3}$ 成立， ……………………………………………………………………11 分

综上所述：$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{3}$． ……………………………………………………………………12 分

解法二：（1）同解法一； ……………………………………………………………………5 分

（2）当 $a=2$ 时，$b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以椭圆的方程为 $x^2+3y^2=4$． ……………………6 分

设 l 的方程为 $x=my+1$， $m\neq 0$，

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，不妨设 $y_2<0<y_1$．

由 $\begin{cases}x=my+1\\x^2+3y^2=4\end{cases}$ 可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+36>0$， $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$， $y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+3}$． ……………………………7 分

所以 $\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\dfrac{2m}{3}$，即 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$． ……………………………………8 分

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}$$ ……9 分

$$=\frac{y_1}{x_1+2}\frac{x_2-2}{y_2}$$

$$=\frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$$ ……10 分

$$=\frac{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}{\dfrac{3}{2}y_1+\dfrac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}.$$ ……11 分

综上所述：$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{3}$. ……12 分

解法三：（1）同解法一； ……5 分

（2）当 $a=2$ 时，$b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以椭圆的方程为 $x^2+3y^2=4$． ……6 分

设 l 的方程为 $x=my+1$，$m\neq 0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，不妨设 $y_2<0<y_1$．

由 $\begin{cases}x=my+1\\ x^2+3y^2=4\end{cases}$ 可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+36>0$，$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+3}$． ……7 分

因为 N 在椭圆上，所以 $x_2^2+3y_2^2=4$，即 $x_2^2-4+3y_2^2=0$，

所以 $\dfrac{y_2}{x_2-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=-\dfrac{1}{3}$． ……8 分

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{-3y_2}{x_2+2},$$ ……9 分

$$=\frac{-3y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}$$

$$=\frac{-3y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$$ ……10 分

$$=\frac{-3(-\frac{3}{m^2+3})}{m^2(-\frac{3}{m^2+3})+3m(-\frac{2m}{m^2+3})+9}=\frac{\frac{9}{m^2+3}}{\frac{27}{m^2+3}}=\frac{1}{3}.$$

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………… 11 分

综上所述：$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

解法四：（1）同解法一；……………………………………………………………5 分

（2）当 $a=2$ 时，$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以椭圆的方程为 $x^2+3y^2=4$. ……………………6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

因为 M 在椭圆上，所以 $x_1^2+3y_1^2=4$，所以 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=-\frac{1}{3}$. …………………7 分

所以 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x_1-2}{y_1}$，……………………………………………………8 分

同理 $k_2=\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x_2+2}{y_2}$. ……………………………………………………9 分

设 $t=\frac{k_1}{k_2}$，则 $t=\frac{(x_2-2)y_1}{(x_1+2)y_2}=\frac{(x_1-2)y_2}{(x_2+2)y_1}$，

所以 $tx_1y_2+2ty_2=x_2y_1-2y_1$，①

$x_1y_2-2y_2=tx_2y_1+2ty_1$，②

①+②得 $(t+1)x_1y_2+2(t-1)y_2=(t+1)x_2y_1+2(t-1)y_1$，……………………… 10 分

当 $t=-1$ 时得 $y_2=y_1$，不合题意，舍去.

当 $t\neq-1$ 时，$\left(x_1-\frac{2(1-t)}{t+1}\right)y_2=\left(x_2-\frac{2(1-t)}{t+1}\right)y_1$，

所以直线 MN 经过点 $\left(\frac{2(1-t)}{t+1},0\right)$，

又 MN 过定点 $(1,0)$，故 $\frac{2(1-t)}{t+1}=1$，解得 $t=\frac{1}{3}$. …………………………… 11 分

综上所述：$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

22．本小题主要考查导数，函数的单调性，不等式等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力和创新能力；考查函数与方程思想，化归与转化思想，数形结合思想；考查逻辑推理，直观想象，数学运算等核心素养；体现综合性和创新性．满分 12 分．

解法一：（1）因为 $f(x)=a\sin(1-x)+\ln x$，

所以 $f'(x)=-a\cos(1-x)+\dfrac{1}{x}$．……1 分

因为 $0<x<1$，所以 $0<1-x<1$，则 $0<\cos(1-x)<1$．……2 分

又 $0<a\leqslant 1$，知 $0<a\cos(1-x)<1$，且 $0<x<1$ 时 $\dfrac{1}{x}>1$，……3 分

故 $f'(x)=-a\cos(1-x)+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增．……4 分

（2）由（1）知，当 $a=1$ 时，$f(x)<f(1)$，即 $\sin(1-x)+\ln x<0$，

所以 $\sin(1-x)<\ln\dfrac{1}{x}$．……5 分

令 $1-x=\dfrac{1}{n^2+1}$，所以 $x=1-\dfrac{1}{n^2+1}=\dfrac{n^2}{n^2+1}$，从而 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{n^2+1}{n^2}$，

所以 $\sin\dfrac{1}{n^2+1}<\ln\dfrac{n^2+1}{n^2}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$，……6 分

因为 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\dfrac{1}{n^2+1}\in(0,1)$，所以 $0<\sin\dfrac{1}{n^2+1}<1$，

所以 $\sin^2\dfrac{1}{n^2+1}<\sin\dfrac{1}{n^2+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$，……7 分

所以 $\sin^2\dfrac{1}{5}+\sin^2\dfrac{1}{10}+\cdots+\sin^2\dfrac{1}{n^2+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$，

即 $\sin^2\dfrac{1}{5}+\sin^2\dfrac{1}{10}+\cdots+\sin^2\dfrac{1}{n^2+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$．……8 分

因为 $\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^4}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}$ ……9 分

$$=\frac{\left(1-\dfrac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^4}\right)}{\dfrac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\dfrac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}}=\frac{\left(1-\dfrac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^4}\right)}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}}$$

………………………………………………………………………………………10 分

$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n+1}\right)<2$， ……………………………… 11 分

所以 $\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\ln 2$，

所以 $\sin^2\frac{1}{5}+\sin^2\frac{1}{10}+\cdots+\sin^2\frac{1}{n^2+1}<\ln 2$． ……………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一； ……………………………………………………4 分

（2）由（1）知，当 $a=1$ 时，$f(x)<f(1)$，即 $\sin(1-x)+\ln x<0$，

所以 $\sin(1-x)<\ln\frac{1}{x}$． ……………………………………………………5 分

令 $1-x=\frac{1}{n^2+1}$，所以 $x=1-\frac{1}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}$，从而 $\frac{1}{x}=\frac{n^2+1}{n^2}$，

所以 $0<\sin\frac{1}{n^2+1}<\ln\frac{n^2+1}{n^2}=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\ln 2$（$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$）， ………………6 分

构造函数 $\varphi(x)=\ln(1+x)-x$，$x>0$，

$\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x(x>0)$， ……………………………………7 分

所以 $0<\ln(1+\frac{1}{k^2})<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}(k>1)$， ………………………………8 分

所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，$0<\sin\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n(n-1)}$，故 $\sin^2\frac{1}{n^2+1}<\frac{\ln 2}{n(n-1)}$，……9 分

所以 $\sin^2\frac{1}{5}+\sin^2\frac{1}{10}+\cdots+\sin^2\frac{1}{n^2+1}$

$<(\ln 2)\cdot\frac{1}{1\times 2}+(\ln 2)\cdot\frac{1}{2\times 3}+\cdots+(\ln 2)\cdot\frac{1}{(n-1)\times n}$

$=\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]\cdot\ln 2$

$=\left\{(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right]\right\}\cdot\ln 2$ ……………………………… 10 分

$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ln 2<\ln 2$． ……………………………………………… 11 分

所以 $\sin^2\frac{1}{5}+\sin^2\frac{1}{10}+\cdots+\sin^2\frac{1}{n^2+1}<\ln 2$． ……………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。