2024 届高三一轮复习联考(四)

数 学 试 题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{2,3\}$，$B=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $B\cap\complement_U A=$

A.$\{4\}$　　B.$\{2,4\}$　　C.$\{1,2\}$　　D.$\{1,3,5\}$

2.已知复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2$，则 $|z|=$

A.$\sqrt{13}$　　B.$\sqrt{10}$　　C.3　　D.2

3.已知 $a=\cos\frac{1}{2}$，$b=3^{\frac{1}{2}}$，$c=\log_3\frac{1}{2}$，则

A.$c>a>b$　　B.$b>c>a$

C.$b>a>c$　　D.$a>b>c$

4.“$a\leqslant-\sqrt{5}$ 或 $a\geqslant\sqrt{5}$”是“圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:(x+a)^2+(y-2a)^2=36$ 存在公切线”的

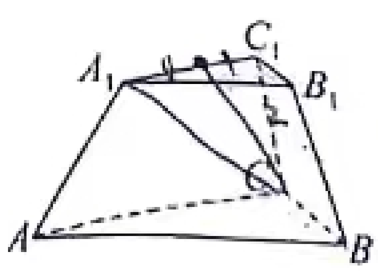
A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.已知 $3\tan\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}$，则 $\cos 2\alpha=$

A.$-\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$-\frac{2}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

6.如图，$ABC-A_1B_1C_1$ 是一个正三棱台，而且下底面边长为 4，上底面边长和侧棱长都为 2，则异面直线 A_1C 与 BB_1 夹角的余弦值为



A.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{6}$

7.已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+1)+2^{|x|}+1$，则不等式 $f(x+1)<4$ 的解集为

A.$(-2,0)$　　B.$(-\infty,-2)$

C.$(2,+\infty)$　　D.$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

8.已知函数 $f(x)=m(x-1)e^x-x^2+x$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right]$ 上有两个极值点，则实数 m 的取值范围为

A.$\left(0,\frac{3}{2e^2}\right)$　　B.$\left(\frac{3}{2e^2},\frac{1}{e}\right)$

C.$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D.$\left(0,\frac{3}{2e^2}\right)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.已知曲线 $C:\frac{x^2}{2m-4}+\frac{y^2}{m}=1$，点 $P(x,y)$ 为曲线 C 上一动点，则下列叙述正确的是

A.若 $m=10$，则曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

B.若 $m=1$，则曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$

C.若曲线 C 是双曲线，则曲线 C 的焦点一定在 y 轴上

D.若曲线 C 是圆，则 $x-y$ 的最大值为 4

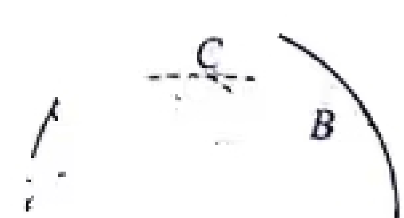
10.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{a_n+1}$，则下列说法正确的是

A.$a_2=\frac{5}{3}$　　B.数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

C.数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 为等差数列　　D.$a_n=\frac{n+3}{n+1}$

11.如图，球 O 的半径为 $\sqrt{3}$，球面上的三个点 A,B,C 的外接圆为圆 O_1，且 $\angle CAB=\frac{\pi}{4}$，则下列说法正确的是

A.球 O 的表面积为 12π



B.若 $AO_1=\sqrt{2}$，$\triangle CO_1B$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.若 $BC=2OO_1$，则三棱锥 $O-O_1BC$ 的体积是 $\frac{1}{3}$

D.三棱锥 $O-O_1BC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}$

已知函数 $f(x)=x^2-\ln x$，下列说法正确的是

A. $f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程为 $x-y=0$

B. $f(x)$的最小值为$\frac{1}{2}(1+\ln 2)$

C. $f(x)$的最小值为$\frac{1}{2}-\ln 2$

D. 若 $ax\leqslant ef(x)+e^{x}$ 恒成立，则 $a\leqslant 2e$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，则$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

14. 在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2\sin B=3\sin C$，若 $b-c=1$，$\cos A=\frac{2}{3}$，则 $a=$________.

15. 已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，则 $a_6+\frac{1}{a_7}+a_8$ 的最小值为________.

16. 已知 $A(0,1)$，$B(1,0)$，点 P 为椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点，当$|PA|+|PB|$取最小值时，点 P 的横坐标的值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明 证明过程或演算步骤。

17. (10 分)已知函数 $f(x)=-4\sin(\pi+x)\cos x+2\sqrt{3}\cos 2x$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期和单调减区间；

(2)求函数 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域.

18. (12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，等比数列$\{b_n\}$的公比为 2，$S_nb_n=n^2 2^n$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)令 $c_n=\begin{cases}a_n, & n\text{ 为奇数},\\ b_n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$求数列$\{c_n\}$的前 10 项和.

19. (12 分)已知$\triangle ABC$ 中，$BC=3$，M 在线段 BC 上，$2BM=MC$，$\angle BAM=\frac{\pi}{6}$.

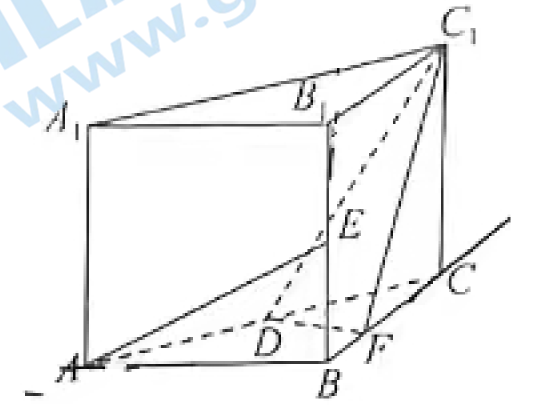
(1)若 $AB=2$，求 AC 的长；

(2)求$\triangle AMC$ 面积的最大值.

20.(12分)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 AC,BB_1 的中点，$BF=\frac{1}{2}CF$.

(1)证明：$AE\parallel$ 平面 C_1DF；

(2)若 $BC=2AB=2BB_1=2$，$AC=\sqrt{5}$，求平面 ABE 与平面 DFC_1 夹角的余弦值.



21.(12分)已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，垂直于 x 轴的直线 l 与圆 $Q:(x-1)^2+y^2=1$ 相切，且与 C 交于不同的两点 A,B，$|AB|=4\sqrt{2}$.

(1)求 p；

(2)已知 $P(-1,2)$，过 P 的直线与抛物线 C 交于 M,N 两点，过 P 作直线 MQ,NQ 的垂线，与直线 MQ,NQ 分别交于 S,T 两点，求证：$|SQ|=|TQ|$.

22.(12分)已知函数 $f(x)=ae^x-x-1$ 有两个零点.

(1)求 a 的取值范围；

(2)设两零点分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_2-x_1>\frac{7}{2}(1-a)$.

2024届高三一轮复习联考(四)

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$\because \complement_U A=\{1,4,5\}$，$\therefore B\cap \complement_U A=\{4\}$.故选 A.

2.B 【解析】$\because z=\dfrac{2}{1-i}+2i=\dfrac{4+2i}{1-i}=1+3i$，$\therefore |z|=\sqrt{10}$.故选 B.

3.C 【解析】$\because 0<a<1,b>1,c<0$，$\therefore b>a>c$.故选 C.

4.C 【解析】圆 C_1 的圆心为$(0,0)$，半径 $r_1=1$，圆 C_2 的圆心为$(-a,2a)$，半径 $r_2=6$，所以两圆的圆心距为 $d=|C_1C_2|=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5a^2}$，两圆内含时，即$\sqrt{5a^2}<|6-1|$，解得$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$，所以当两圆有公切线时，$a\geqslant\sqrt{5}$或 $a\leqslant-\sqrt{5}$，所以"$a\leqslant-\sqrt{5}$或 $a\geqslant\sqrt{5}$"是"圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:(x+a)^2+(y-2a)^2=36$ 存在公切线"的充要条件.故选 C.

5.D 【解析】由题意得$\dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$，$\therefore 6\sin^2\alpha=1$，$\therefore 3-3\cos 2\alpha=1$，$\therefore \cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$.故选 D.

6.D 【解析】作 AB 的中点 D，连接 A_1D.$\therefore A_1D/\!/BB_1$，则$\angle CA_1D$ 或其补角($\angle CA_1D$ 为钝角时)的余弦值即为所求.$A_1C=CD=2\sqrt{3}$，$A_1D=2$，$\therefore \cos\angle CA_1D=\dfrac{2^2+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，则异面直线 A_1C 与 BB_1 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.故选 D.

7.A 【解析】由题意得 $f(x)$为偶函数且在$[0,+\infty)$上单调递增，又 $f(1)=4$，$\therefore f(x+1)<f(1)$，$\therefore |x+1|<1$，$\therefore -2<x<0$.故选 A.

8.B 【解析】因为函数 $f(x)=m(x-1)e^x-x^2+x$ 在 $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$上有两个极值点，所以 $f'(x)$在 $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$上有两个变号零点，$\because f'(x)=mxe^x-2x+1$，$\therefore mxe^x-2x+1=0$，$\therefore m=\dfrac{2x-1}{xe^x}$.令 $h(x)=\dfrac{2x-1}{xe^x}\left(x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)\right)$，$\therefore h'(x)=\dfrac{-(x-1)(2x+1)}{x^2e^x}$，令 $h'(x)>0$，得 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，令 $h'(x)<0$，得 $x\in(1,2)$，$\therefore h(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上递增，在$(1,2)$上递减.$\because h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，$h(1)=\dfrac{1}{e}$，$h(2)=\dfrac{3}{2e^2}$，$\therefore m\in\left(\dfrac{3}{2e^2},\dfrac{1}{e}\right)$.故选 B.

9.AC 【解析】A 选项，$m=10$ 时，曲线 C 为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{10}=1$，曲线 C 的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，故 A 选项正确；B 选项，$m=1$ 时，曲线 C 为 $y^2-\dfrac{x^2}{2}=1$，则曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，故 B 选项错误；C 选项，若曲线 C 是双曲线，则 $m(2m-4)<0$，$\therefore 0<m<2$，则曲线 C 的焦点一定在 y 轴上，故 C 选项正确；D 选项，若曲线 C 是圆，则 $m=2m-4$，即 $m=4$，$\therefore x^2+y^2=4$，令 $x=2\cos\alpha$，$y=2\sin\alpha(\alpha\in[0,2\pi))$，$\therefore x-y=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$，则 $x-y$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$，故 D 选项错误.故选 AC.

10.BCD 【解析】$\because \dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n+1}{2a_n-2}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n-1}{2a_n-2}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{a_n-1}=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{n+3}{n+1}=1+\dfrac{2}{n+1}$，$a_3=\dfrac{3+3}{3+1}=\dfrac{3}{2}$，故 A 错误，BCD 正确.故选 BCD.

11.ACD 【解析】A 选项，$S=4\pi r^2=12\pi$，故 A 正确；B 选项，$\because \angle CAB=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \angle BO_1C=\frac{\pi}{2}$，$\therefore S_{\triangle CO_1B}=\frac{1}{2}BO_1^2=1$，故 B 错误；C 选项，设 $BC=2a$，由 $BC=2OO_1$，可得 $OO_1=a$，因为 $\angle CAB=\frac{\pi}{4}$，$BC=2a$，O_1 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $O_1A=O_1B=O_1C$，$\angle BO_1C=2\angle CAB=\frac{\pi}{2}$，$\therefore O_1B^2+O_1C^2=BC^2$，故 $O_1B=O_1C=\sqrt{2}a$，由已知，$OO_1^2+AO_1^2=OA^2$，$OA=\sqrt{3}$，所以 $a=1$，所以 $O_1B=O_1C=\sqrt{2}$，$\angle BO_1C=\frac{\pi}{2}$，$OO_1=1$，由球的截面性质可得 $OO_1\perp$ 平面 O_1BC，所以三棱锥 $O-O_1BC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle O_1BC}\cdot OO_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{1}{3}$，故 C 正确；D 选项，设 $AO_1=x$，$\therefore OO_1=\sqrt{3-x^2}$，$S_{\triangle O_1BC}=\frac{1}{2}x^2$，$\therefore V_{O-O_1BC}=\frac{1}{6}x^2\sqrt{3-x^2}=\frac{1}{6}\sqrt{-x^6+3x^4}$，令 $x^2=t(0<t<3)$，则 $V_{O-O_1BC}=\frac{1}{6}\sqrt{-t^3+3t^2}$，令 $g(t)=-t^3+3t^2$，$\therefore g'(t)=-3t^2+6t=-3t(t-2)$，$\therefore$ 当 $t=2$ 时，$g(t)_{\max}=4$，V_{O-O_1BC} 的最大值为 $\frac{1}{3}$，故 D 正确.故选 ACD.

12.ABD 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$，则 $f'(1)=1$，$f(1)=1$，故切线方程为 $y-1=x-1$，即 $x-y=0$，故 A 正确.由 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}=0$ 得，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 单调递减，在区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\ln 2)$，故 B 正确，C 错误.$ax\leqslant ex^2-e\ln x+e^x$ 恒成立，其中 $x>0$，所以 $a\leqslant\frac{ex^2-e\ln x+e^x}{x}$，记 $F(x)=\frac{ex^2-e\ln x+e^x}{x}(x>0)$，则 $F'(x)=\frac{\left(2ex-\frac{e}{x}+e^x\right)\cdot x-(ex^2-e\ln x+e^x)}{x^2}=\frac{e(x^2-1)+(x-1)e^x+e\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $F(x)_{\min}=F(1)=2e$，则实数 a 的取值范围为 $a\leqslant 2e$，D 正确.故选 ABD.

13.$\sqrt{34}$ 【解析】$\because(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1$，$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-4=-3$，$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{36+4-6}=\sqrt{34}$.

14.$\sqrt{5}$ 【解析】由 $2\sin B=3\sin C$，得 $2b=3c$，因为 $b-c=1$ 解得 $c=2$，$b=3$，又 $\cos A=\frac{2}{3}$，由余弦定理得 $a^2=4+9-2\times2\times3\times\frac{2}{3}=5$，解得 $a=\sqrt{5}$.

15.$2\sqrt{2}$ 【解析】$\because q>0$，$\therefore a_6+a_8\geqslant 2\sqrt{a_6a_8}=2a_7$（当且仅当 $a_6=a_8$ 时等号成立），$\therefore a_6+a_8+\frac{1}{a_7}\geqslant 2a_7+\frac{1}{a_7}$，$\because 2a_7+\frac{1}{a_7}\geqslant 2\sqrt{2}$（当且仅当 $a_7=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立），故 $a_6+\frac{1}{a_7}+a_8$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

16.$\frac{-4+6\sqrt{2}}{7}$ 【解析】因为 $B(1,0)$ 为椭圆的右焦点，设椭圆左焦点为 F，则 $F(-1,0)$，由椭圆的定义，得 $|PA|+|PB|=|PA|+2a-|PF|=4+|PA|-|PF|$，所以 P 为射线 FA 与椭圆交点时，$|PA|+|PB|$ 取最小值，因

为直线 FA 方程为 $y=x+1$，设 $P(x,y)$，联立 $\begin{cases}y=x+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $7x^2+8x-8=0$，$x=\dfrac{-4+6\sqrt{2}}{7}$ 或 $\dfrac{-4-6\sqrt{2}}{7}$(舍).

17.**解**：(1) $f(x)=4\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin 2x+2\sqrt{3}\cos 2x$

$=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………………………………………………… 2 分

$\therefore f(x)$的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………………………… 3 分

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，……………………………… 4 分

得 $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

化简得 $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore f(x)$的单调减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 5 分

(2) $\because 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore \dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{4\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分

令 $t=2x+\dfrac{\pi}{3}$，则 $\dfrac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\dfrac{4\pi}{3}$，

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin t\leqslant 1$，…………………………………………………… 8 分

$\therefore -2\sqrt{3}\leqslant 4\sin t\leqslant 4$，

$\therefore f(x)$在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的值域为 $[-2\sqrt{3},4]$. …………………………………… 10 分

18.**解**：(1) 当 $n=1$ 时，

$\because S_1b_1=2, S_1=2$，

$\therefore b_1=1$，……………………………………………………………… 1 分

$\therefore b_n=2^{n-1}$，…………………………………………………………… 2 分

$\therefore S_n=2n^2$. ……………………………………………………………… 3 分

当 $n\geqslant 2$ 时，

$\because a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2$. ……………………………… 4 分

经检验，当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 满足上式，……………………………………… 5 分

$\therefore a_n=4n-2$. ………………………………………………………………… 6 分

(2) $\because c_n=\begin{cases}4n-2, n \text{ 为奇数,} \\ 2^{n-1}, n \text{ 为偶数.}\end{cases}$ ………………………………………… 7 分

设$\{c_n\}$的前 10 项和为 T_{10},

$\therefore T_{10}=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(b_2+b_4+\cdots+b_{10})$ ………………………………………… 8 分

$=\dfrac{5\times(2+34)}{2}+\dfrac{2\times(1-4^5)}{1-4}$ ………………………………………… 10 分

$=772.$ ………………………………………… 12 分

19.解:(1)在$\triangle ABM$中,$\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$,

$\therefore \dfrac{2}{\sin\angle AMB}=\dfrac{1}{\sin 30^\circ}$,

$\therefore \sin\angle AMB=1$,

$\therefore \angle AMB=90^\circ$, ………………………………………… 2 分

$\therefore \angle ABC=60^\circ$. ………………………………………… 3 分

$\because$在$\triangle ABC$中,$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$, ………………………………………… 4 分

$\therefore AC^2=4+9-2\times2\times3\times\dfrac{1}{2}=7$, ………………………………………… 5 分

$\therefore AC=\sqrt{7}$. ………………………………………… 6 分

另解:$\because \angle AMC=\angle AMB=90^\circ$,

$\therefore AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, ………………………………………… 4 分

$\therefore AC=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$. ………………………………………… 6 分

(2)$\because$在$\triangle ABM$中,$BM^2=AB^2+AM^2-2AB\times AM\times\cos\angle BAM$,

$\therefore 1=AB^2+AM^2-\sqrt{3}AB\times AM\geqslant(2-\sqrt{3})AB\times AM$, ………………………………………… 7 分

$\therefore AB\times AM\leqslant\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$,当且仅当$AB=AM$时,等号成立. ………………………………………… 8 分

$\because S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}AB\times AM\times\sin\dfrac{\pi}{6}$,

$\therefore S_{\triangle ABM}$的最大值为$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………… 10 分

$\because S_{\triangle AMC}=2S_{\triangle ABM}$,

$\therefore S_{\triangle AMC}$的最大值为$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 12 分

20.(1)证明:连接CE交C_1F于点G,连接DG,延长C_1F与B_1B延长线交于点H.

因为$\triangle C_1CF\backsim\triangle HBF$,$BF=\dfrac{1}{2}CF$,所以$BH=\dfrac{1}{2}CC_1$,所以$EH=CC_1$,所以$\triangle HEG\cong\triangle C_1CG$,则$EG=CG$.

………………………………………… 3 分

又因为$AD=CD$,所以DG为$\triangle CEA$的中位线,则$AE\parallel DG$. ………………………………………… 4 分

因为$DG\subset$平面C_1DF,$AE\not\subset$平面C_1DF,所以$AE\parallel$平面C_1DF. ………………………………………… 5 分

(2)**解**:因为 $AB=1,BC=2,AC=\sqrt{5},AC^2=AB^2+BC^2$,所以 $AB\perp BC$.

如图,以 B 为坐标原点,BC 为 x 轴,BA 为 y 轴,BB_1 为 z 轴建立空间直角坐标系,

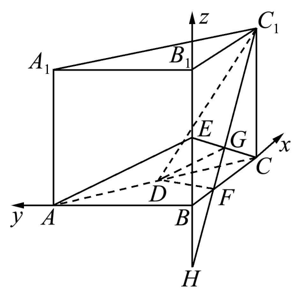
则 $F\left(\frac{2}{3},0,0\right),D\left(1,\frac{1}{2},0\right),C_1(2,0,1)$,

则 $\overrightarrow{FD}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{FC_1}=\left(\frac{4}{3},0,1\right)$. ………………………………………………………… 8 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 DFC_1 的一个法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=0,\\ \frac{4}{3}x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,解得 $\boldsymbol{m}=\left(1,-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$. ………………………… 9 分

又平面 ABE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$, ………………………………………………………… 10 分



设所求夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{29}}{29}$. ………………………………………………… 12 分

21.(1)**解**:由题意得 l 的方程为 $x=2$.又 $|AB|=4\sqrt{2}$,

不妨设 $A(2,2\sqrt{2})$,代入抛物线 C,解得 $p=2$. ………………………………………………… 2 分

(2)**证明**:①当直线 MQ,NQ 中有一条直线斜率存在时,

不妨设直线 MQ 的斜率不存在,则 $M(1,-2),N(0,0)$,此时直线 NQ 的斜率为 0.

$l_{MQ}:x=1,l_{NQ}:y=0$,

$|SQ|=|TQ|=2$. …………………………………………………………………………………… 4 分

②当直线 MQ,NQ 斜率均存在时,

记直线 MQ 斜率为 k_1,直线 NQ 斜率为 k_2,P 到直线 MQ 的距离为 d_1,到直线 NQ 的距离为 d_2,

设 $l_{MN}:y=k(x+1)+2,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则 $k_1=\frac{y_1}{x_1-1},k_2=\frac{y_2}{x_2-1}$,

$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{y_1y_2}{\frac{y_1^2y_2^2}{16}-\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right)+1}=\frac{16y_1y_2}{y_1^2y_2^2-4(y_1+y_2)^2+8y_1y_2+16}$. ……………… 6 分

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k(x+1)+2,\end{cases}$ 得 $\frac{k}{4}y^2-y+k+2=0$,则 $y_1+y_2=\frac{4}{k},y_1y_2=\frac{4(k+2)}{k}$, ……………… 8 分

$k_1k_2=\frac{\frac{64(k+2)}{k}}{\frac{16(k+2)^2}{k^2}-\frac{64}{k^2}+\frac{32(k+2)}{k}+16}=\frac{4k(k+2)}{4k^2+8k}=1$. ………………………………………… 9 分

因为 $d_1=\dfrac{2|k_1+1|}{\sqrt{1+k_1^2}}$，同理 $d_2=\dfrac{2|k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}$， ………………………………………… 10 分

$d_2=\dfrac{2|k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}=\dfrac{2\left|\dfrac{1}{k_1}+1\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{k_1^2}}}=\dfrac{2|1+k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}}=d_1$，则 $|SQ|=|TQ|$. ………………………… 12 分

22.(1)**解**：令 $f(x)=0$，得 $a=\dfrac{x+1}{e^x}$，令 $g(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，………………………… 1 分

令 $g'(x)>0$，得 $x\in(-\infty,0)$，令 $g'(x)<0$，得 $x\in(0,+\infty)$. 则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 单调递减. ………………………………………………………………………… 2 分

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，$g(0)=1$， ………………………… 4 分

若要 $g(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ 与 $y=a$ 有两个交点，则 $a\in(0,1)$. ………………………………………… 5 分

(2)**证明**：易知 $-1<x_1<0<x_2$，令 $p(x)=x+1$，$q(x)=-\dfrac{2}{5}x+1$.

设 $G(x)=g(x)-p(x)=\dfrac{x+1}{e^x}-x-1(-1<x<0)$，$G'(x)=g'(x)-p'(x)=-\dfrac{x}{e^x}-1=\dfrac{-x-e^x}{e^x}$，…… 6 分

令 $\varphi(x)=-x-e^x$，$\varphi'(x)=-1-e^x<0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，且 $\varphi(-1)>0$，$\varphi(0)<0$，则存在唯一的 $x_0\in(-1,0)$，使 $G(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,0)$ 单调递减.

又 $G(-1)=G(0)=0$，则在 $(-1,0)$ 上 $G(x)>0$，即 $g(x)>p(x)$ 在 $(-1,0)$ 上恒成立. ……………… 7 分

设 $H(x)=g(x)-q(x)=\dfrac{x+1}{e^x}+\dfrac{2}{5}x-1(x>0)$，则 $H'(x)=g'(x)-q'(x)=-\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{2}{5}$，

令 $\tau(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，则 $\tau'(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，则 $\tau(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $\tau(x)\geq\tau(1)=-\dfrac{1}{e}$，

则 $H'(x)>0$，则 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $H(0)=0$，所以 $H(x)>0$，即 $g(x)>q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ………………………………………………………………………… 9 分

令 $p(x)=a$ 得到 $x_1'=a-1$，由 $a=p(x_1')=g(x_1)>p(x_1)$ 且 $p(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，则 $x_1'>x_1$；…

………………………………………………………………………… 10 分

令 $q(x)=a$ 得到 $x_2'=-\dfrac{5}{2}(a-1)$，由 $a=q(x_2')=g(x_2)>q(x_2)$ 且 $q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $x_2'<x_2$.

………………………………………………………………………… 11 分

则 $x_2-x_1>x_2'-x_1'=\dfrac{7}{2}(1-a)$. ………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！