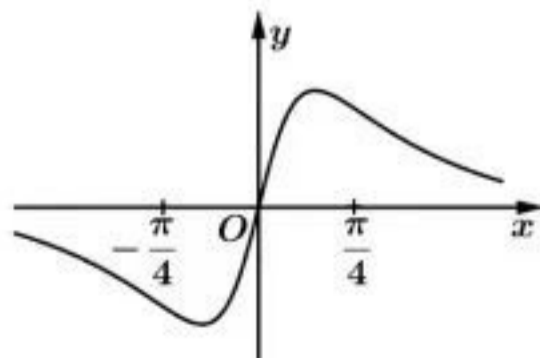


本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。微信搜《高三答案公众号》

## 第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{N}\}$ , 则  $A \cap B$  为 ( )
- A.  $\{2 \leq x \leq 4\}$       B.  $\{x | x \geq 1\}$       C.  $\{1, 3, 4\}$       D.  $\{3, 4\}$
2. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ( )
- A. 若  $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 则  $m \perp n$       B. 若  $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 则  $m // n$
- C. 若  $m \perp \alpha, m // n, n // \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$       D. 若  $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$
3. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} (n \geq 2), a_2 + a_4 + a_6 = 12, a_1 + a_3 + a_5 = 9$ , 则  $a_2 + a_5$  等于 ( )
- A. 6      B. 7      C. 8      D. 9
4. 已知向量  $\vec{a} = (2, x), \vec{b} = (x, 8)$ , 若  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ , 则  $x$  的值是 ( )
- A. 4      B. -4      C. 0      D. 4 或 -4
5. " $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ " 是 " $\sin \alpha = \cos \beta$ " 的 ( )
- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件
6. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ . 椭圆  $C$  的一顶点为  $A$ , 两个焦点为  $F_1, F_2$ ,  $\triangle AF_1F_2$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 焦距为 2, 过  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与椭圆  $C$  交于  $D, E$  两点, 则  $\triangle ADE$  的周长是 ( )
- A.  $4\sqrt{2}$       B. 8      C.  $2\sqrt{19}$       D. 16
7. 已知函数  $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}, g(x) = \sin x$ , 则图象为如图的函数可能是 ( )
- A.  $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$       B.  $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$
- C.  $y = f(x)g(x)$       D.  $y = \frac{g(x)}{f(x)}$



8. 在平面直角坐标系中,  $A, B$  是直线  $x+y=m$  上的两点, 且  $|AB|=10$ . 若对于任意点

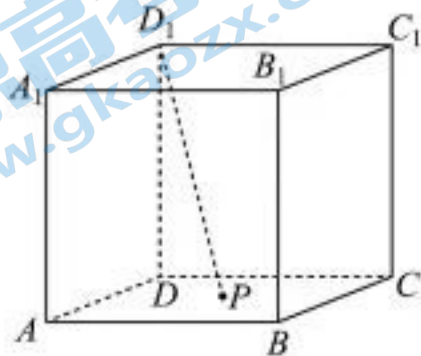
$P(\cos\theta, \sin\theta) (0 \leq \theta < 2\pi)$ , 存在  $A, B$  使  $\angle APB = 90^\circ$  成立, 则  $m$  的最大值为 ( )

- A.  $3\sqrt{2}$                       B.  $4\sqrt{2}$                       C.  $5\sqrt{2}$                       D.  $6\sqrt{2}$

9. 如图, 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $P$  为正方形底面  $ABCD$

内的一动点, 则下列结论不正确的有 ( )

- A. 三棱锥  $B_1-A_1D_1P$  的体积为定值  
 B. 若  $D_1P \perp B_1D$ , 则  $P$  点在正方形底面  $ABCD$  内的运动轨迹是线段  $AC$   
 C. 若点  $P$  是  $AD$  的中点, 点  $Q$  是  $BB_1$  的中点, 过  $P, Q$  作平面  $\alpha \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 则平面  $\alpha$  截正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的截面周长为  $6\sqrt{2}$   
 D. 存在点  $P$ , 使得  $D_1P \perp AD_1$



10. 法国数学家加斯帕尔·蒙日发现: 与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆. 我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的蒙日圆方程为  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ,

现有椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$  的蒙日圆上一个动点  $M$ , 过点  $M$  作椭圆  $C$  的两条切线, 与该蒙日圆分别交于  $P, Q$  两点, 若  $\triangle MPQ$  面积的最大值为 34, 则椭圆  $C$  的长轴长为 ( )

- A.  $3\sqrt{2}$                       B.  $4\sqrt{2}$                       C.  $6\sqrt{2}$                       D.  $8\sqrt{2}$

### 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

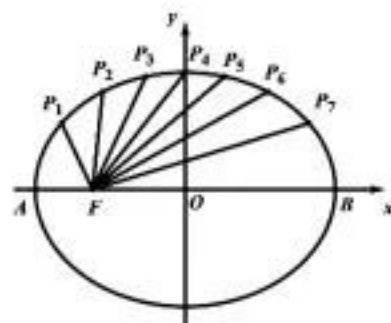
11. 若  $z = (m-2) + (m+1)i$  为纯虚数 ( $i$  为虚数单位),  $m \in \mathbb{R}$ , 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.

12. 过四点  $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$  中的三点的圆的方程为 \_\_\_\_\_ . (写出一个即可)

13. 如图把椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的长轴  $AB$  分成 8 等分, 过每个分点作  $x$  轴的垂线交

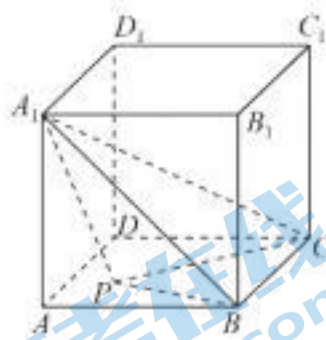
椭圆的上半部分于  $P_1, P_2, \dots, P_7$  七个点,  $F$  是椭圆的左焦点, 则

$|P_1F| + |P_2F| + \dots + |P_7F| =$  \_\_\_\_\_.



关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息.

14. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 4, 点  $P$  在正方形  $ABCD$  的边界及其内部运动. 平面区域  $W$  由所有满足  $4 \leq |A_1P| \leq 2\sqrt{5}$  的点  $P$  组成, 则四面体  $P-A_1BC$  的体积的取值范围\_\_\_\_\_.



15. 已知函数  $f(x) = x$ ,  $g(x) = ax^2 - x$ , 其中  $a > 0$ . 若  $\forall x_1 \in [1, 2], \exists x_2 \in [1, 2]$ , 使得  $f(x_1) f(x_2) = g(x_1) g(x_2)$  成立, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. (本小题 14 分)

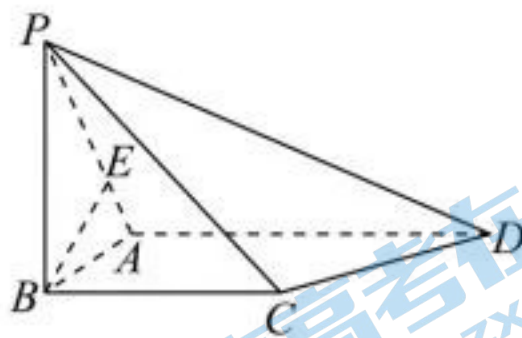
已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$ .

(I) 求函数  $f(x)$  取最大值时  $x$  的取值集合;

(II) 设函数  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{2}, m]$  是减函数, 求实数  $m$  的最大值.

17. (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = 3$ ,  
 $PA = BC = 2$ ,  $AB = 2$ ,  $PB = \sqrt{3}$ .



(I) 求证:  $BC \perp PB$ ;

(II) 求平面  $PCD$  与平面  $ABCD$  夹角的余弦值;

(III) 若点  $E$  在棱  $PA$  上, 且  $BE \parallel$  平面  $PCD$ , 求线段  $BE$  的长.

18. (本小题 14 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : \sqrt{7}$ .

(I) 求  $\angle C$ ;

(II) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使  $\triangle ABC$  存在且唯一确定, 求  $BC$  边上中线的长.

条件①:  $a+b=5$ ;

条件②:  $c = \frac{\sqrt{7}}{3}b$ ;

条件③:  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

19. (本小题 14 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点为  $P(0, 1)$ , 且离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 直线  $l: y = x + m$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且  $|PA| = |PB|$ , 求  $m$  的值.

20. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = (ax - 1)e^x (a \in \mathbf{R})$ .

(I) 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 若直线  $y = ax + a$  与曲线  $y = f(x)$  相切, 求证:  $a \in (-1, -\frac{2}{3})$ .

21. (本小题 14 分)

已知数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_N (N \geq 4)$ , 其中  $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbf{Z}$ , 且  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ .

若数列  $\tilde{A}: \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N$  满足  $\tilde{a}_1 = a_1, \tilde{a}_N = a_N$ , 当  $i = 2, 3, \dots, N-1$  时,  $\tilde{a}_i = a_{i-1} + 1$  或  $a_{i+1} - 1$ ,

则称  $\tilde{A}: \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N$  为数列  $A$  的“紧数列”.

例如, 数列  $A: 2, 4, 6, 8$  的所有“紧数列”为  $2, 3, 5, 8$ ;  $2, 3, 7, 8$ ;  $2, 5, 5, 8$ ;  $2, 5, 7, 8$ .

(I) 直接写出数列  $A: 1, 3, 6, 7, 8$  的所有“紧数列”  $\tilde{A}$ ;

(II) 已知数列  $A$  满足:  $a_1 = 1, a_N = 2N$ , 若数列  $A$  的所有“紧数列”  $\tilde{A}$  均为递增数列, 求证: 所有符合条件的数列  $A$  的个数为  $N+1$ ;

(III) 已知数列  $A$  满足:  $a_1 = 0, a_2 = 2$ , 对于数列  $A$  的一个“紧数列”  $\tilde{A}$ , 定义集合  $S(\tilde{A}) = \{a_i - \tilde{a}_i \mid i = 2, 3, \dots, N-1\}$ , 如果对任意  $x \in S(\tilde{A})$ , 都有  $-x \notin S(\tilde{A})$ , 那么称  $\tilde{A}$  为数列  $A$  的“强紧数列”. 若数列  $A$  存在“强紧数列”, 求  $a_N$  的最小值. (用关于  $N$  的代数式表示)

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkzxx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。