

2023 北京广渠门中学高二 3 月月考

数 学

一、单选题（本大题共 12 小题，共 60 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 下列求导运算中错误的是（ ）

A. $(3^x)' = 3^x \ln 3$

B. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

C. $\left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$

D. $(\sin x \cdot \cos x)' = \cos 2x$

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，公比 $q = 2$ ，且满足 $a_2 a_6 = 16$ ，则 $a_5 =$ （ ）

A. 8

B. 4

C. 2

D. 1

3. 已知函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为 1，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} =$ （ ）

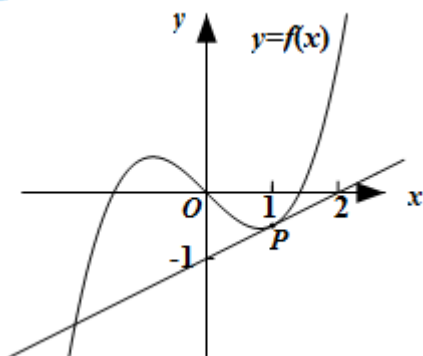
A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

4. 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线如图所示，则 $f'(1) - f(1) =$ （ ）



A. 0

B. -1

C. 1

D. $-\frac{1}{2}$

5. 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $f(x)$ 的极小值为 -2

B. $f(x)$ 的极大值为 $-\frac{23}{27}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 上单调递增

D. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 4n^2 - 10n$ ，则 $a_2 a_6 =$ （ ）

A. 52

B. 68

C. 96

D. 108

7. 若曲线 $y = x^2 + ax$ 在点 $(1, a+1)$ 处的切线与直线 $y = 7x$ 平行，则 $a =$ （ ）

A. 3

B. 4

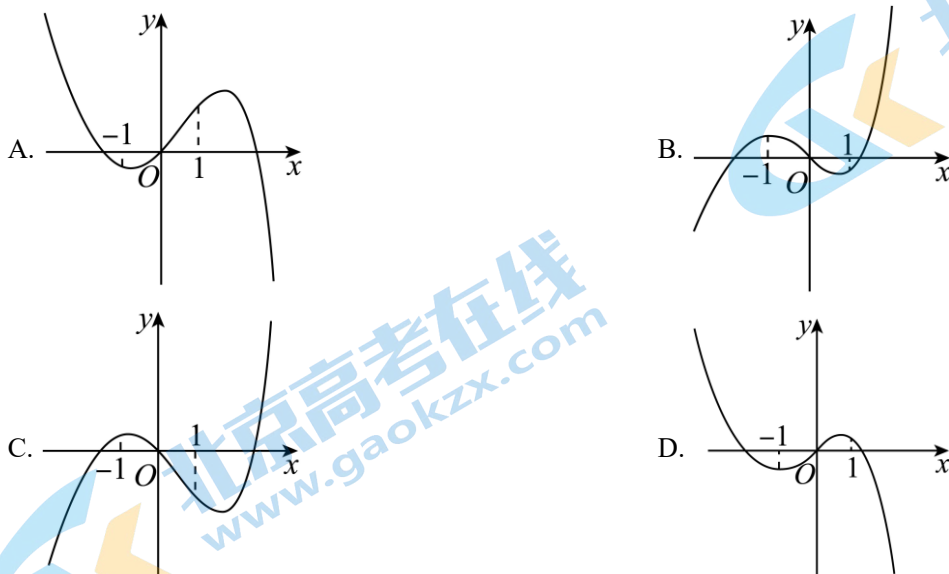
C. 5

D. 6

8. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x) = e^x - (x+1)^2$, 则 $f(x)$ 的大致图像为 ()



10. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, $a_1 = 8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = 2(n+1)^2$
B. $a_n = 4(n+1)$
C. $a_n = 8n^2$
D. $a_n = 4n(n+1)$

11. 某企业拟建造一个容器(不计厚度, 长度单位: 米), 该容器的底部为圆柱形, 高为 l , 底面半径为 r ,

上部为半径为 r 的半球形, 按照设计要求容器的体积为 $\frac{28}{3}\pi$ 立方米. 假设该容器的建造费用仅与其表面积

有关, 已知圆柱形部分每平方米建造费用为 3 万元, 半球形部分每平方米建造费用为 4 万元, 则该容器的建造费用最小时, 半径 r 的值为 ()

- A. 1
B. $\sqrt[3]{2}$
C. $\sqrt[3]{4}$
D. 2

12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$, $g'(x)$, 则下面结论正确的是

- ①若 $f'(x) > g'(x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象上方;
②若函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称, 则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 对称;
③函数 $f(x) = f(a-x)$, 则 $f'(x) = -f'(a-x)$;
④若 $f'(x)$ 是增函数, 则 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

- A. ①②
B. ①②③
C. ③④
D. ②③④

二、填空题(本大题共 5 小题, 共 25.0 分)

13. 函数 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(\frac{\pi}{6}) =$ _____.

14. 曲线 $f(x) = e^{1-x}$ 过原点的切线方程是_____.

15. 朱载堉(1536-1611), 明太祖九世孙, 音乐家、数学家、天文历算家, 在他多达百万字的著述中以《乐律全书》最为著名, 在西方人眼中他是大百科全书式的学者王子. 他对文艺的最大贡献是他创建了“十二平均律”, 此理论被广泛应用在世界各国的键盘乐器上, 包括钢琴, 故朱载堉被誉为“钢琴理论的鼻祖”. “十二平均律”是指一个八度有 13 个音, 相邻两个音之间的频率之比相等, 且最后一个音频率是最初

那个音频率的 2 倍, 设第二个音的频率为 f_2 , 第八个音频率为 f_8 , 则 $\frac{f_8}{f_2}$ 等于_____.

16. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有极值点, 实数 a 的取值范围是_____.

17. 给定集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 对于 $x \in S$, 如果 $x+1 \notin S, x-1 \notin S$, 那么 x 是 S 的一个“好元素”, 由 S 的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“好元素”的集合共有_____个.

三、解答题(每题 13 分, 共 65 分)

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4$, 且 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值和最小值.

19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 1, d > 0$, 且 a_1, a_2, S_3 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = a_n + 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. 已知函数 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a < 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值;

(III) 请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.

21. 已知函数 $f(x) = e^x + me^{-x} + (m-1)x, m \leq 0$

(1) 当 $m = 0$ 时, 求证 $f(x) \geq 1$ 恒成立;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $-e \leq m \leq -1$ 时, 求证: $\forall x \in (0, +\infty), f(x) \geq -2$ 恒成立.

22. 已知 n 为正整数, 数列 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$, 记 $S(X) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. 对于数列 X , 总有

$x_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n$, 则称数列 X 为 n 项 0-1 数列. 若数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n, B: b_1, b_2, \dots, b_n$, 均为 n 项 0-1 数列, 定义数列 $A*B: m_1, m_2, \dots, m_n$, 其中 $m_k = 1 - |a_k - b_k|, k = 1, 2, \dots, n$.

(1) 已知数列 $A: 1, 0, 1, B: 0, 1, 1$, 直接写出 $S(A*A)$ 和 $S(A*B)$ 的值;

(2) 若数列 A, B 均为 n 项 0-1 数列, 证明: $S((A*B)*A) = S(B)$;

(3) 对于任意给定的正整数 n , 是否存在 n 项 0-1 数列 A, B, C , 使得 $S(A*B) + S(A*C) + S(B*C) = 2n$, 并说明理由

参考答案

一、单选题（本大题共 12 小题，共 60 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】

依据求导公式及法则一一判断即可.

【详解】A 选项: $(3^x)' = 3^x \ln 3$, A 正确;

B 选项: $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, B 正确;

C 选项: $\left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$, C 错误;

D 选项: $(\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, D 正确

故选: C

2. 【答案】A

【解析】

【分析】根据 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则通项为 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 然后根据条件可解出 $a_1 = \frac{1}{2}$, 进而求得 $a_5 = 8$

【详解】由 $\{a_n\}$ 为等比数列, 不妨设首项为 a_1

由 $a_2 a_6 = 16$, 可得: $a_2 a_6 = a_1^2 \cdot 2^6 = 16$

又 $a_n > 0$, 则有: $a_1 = \frac{1}{2}$

则 $a_5 = \frac{1}{2} \times 2^4 = 8$

故选: A

3. 【答案】B

【解析】

【分析】

由已知结合导数的定义即可直接求解.

【详解】解: 因为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为 1,

则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{2} f'(x_0) = \frac{1}{2}$.

故选: B.

【点睛】本题考查导数的概念, 涉及极限的性质, 属于基础题.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】

由图示求出直线方程，然后求出 $f(1)=-\frac{1}{2}$ ， $f'(1)=\frac{1}{2}$ ，即可求解。

【详解】由直线经过 $(0,-1)$ ， $(2,0)$ ，可求出直线方程为： $x-2y-2=0$

$\therefore y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线

$$\therefore f(1)=\frac{x-2}{2}=-\frac{1}{2}, \quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f'(1)-f(1)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

故选：C

【点睛】用导数求切线方程常见类型：

(1) 在 $P(x_0, y_0)$ 出的切线： $P(x_0, y_0)$ 为切点，直接写出切线方程： $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ ；

(2) 过 $P(x_0, y_0)$ 出的切线： $P(x_0, y_0)$ 不是切点，先设切点，联立方程组，求出切点坐标 (x_1, y_1) ，再写出切线方程： $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$ 。

5. 【答案】B

【解析】

【分析】求导，利用导函数的符号变化得到函数的单调区间，进而求出函数的极值。

【详解】因为 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ ，所以 $f'(x)=3x^2-4x+1$ ，

令 $f'(x)>0$ ，得 $x>1$ 或 $x<\frac{1}{3}$ ；令 $f'(x)<0$ ，得 $\frac{1}{3}<x<1$ ；

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ ， $(-\infty, \frac{1}{3})$ 上单调递增，在区间 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 处有极大值，极大值为 $f(\frac{1}{3})=-\frac{23}{27}$ ；

在 $x=1$ 处有极小值，极小值为 $f(1)=-1$ 。

故选：B。

6. 【答案】B

【解析】

【分析】根据数列的前 n 项和为 S_n ，求得数列的通项公式，即可求得 $a_2 a_6$ 的值，得到答案。

【详解】由题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=4n^2-10n$ ，

可得当 $n \geq 2$ 时，可得 $a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2-10n-[4(n-1)^2-10(n-1)]=8n-14$ ，

所以 $a_2 a_6 = (8 \times 2 - 14) \times (8 \times 6 - 14) = 68$.

故选：B.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】根据导数求出切线的斜率等于 7 即可求解.

【详解】因为 $y' = 2x + a$ ，切点为 $(1, a+1)$ ，

所以 $k = 2 \times 1 + a = 7$ ，

解得 $a = 5$ ，

故选：C

【点睛】本题主要考查了导数的几何意义，曲线的切线方程，属于容易题.

8. 【答案】D

【解析】

【详解】试题分析：当 $q > 1, a_1 < 0$ 时， $\{a_n\}$ 不是递增数列；当 $0 < q < 1$ 且 $a_1 < 0$ 时， $\{a_n\}$ 是递增数列，但是 $q > 1$ 不成立，所以选 D.

考点：等比数列

9. 【答案】C

【解析】

【分析】通过特殊点的函数值，用排除法选择正确选项.

【详解】 $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$ ， $f(1) = e - 4 < 0$ ， $f(2) = e^2 - 3^2 < 0$ ，

排除选项 ABD.

故选：C.

10. 【答案】A

【解析】

【分析】由已知可得 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，公差为 $\sqrt{2}$ 的等差数列，从而先利用等差数列的通项公式求出 $\sqrt{a_n}$ ，进而可求出 a_n

【详解】解：因为 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$ ，

所以 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{2}$ ，

所以 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，公差为 $\sqrt{2}$ 的等差数列，

所以 $\sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}(n+1)$ ，

所以 $a_n = 2(n+1)^2$.

故选：A.

【点睛】此题考查等差数列的判定和基本量的计算，属于基础题。

11. 【答案】C

【解析】

【分析】

根据体积公式用 r 表示出 l ，得出费用关于 r 的函数，利用导数求出函数的极小值点即可。

【详解】解：由题意知 $V = \pi r^2 l + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi r^2 l + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{28}{3} \pi$ ，

$$\text{故 } l = \frac{V - \frac{2}{3} \pi r^3}{\pi r^2} = \frac{\frac{28}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi r^3}{\pi r^2} = \frac{28}{3r^2} - \frac{2}{3} r = \frac{28 - 2r^3}{3r^2},$$

由 $l > 0$ 可知 $r < \sqrt[3]{14}$ 。

$$\therefore \text{建造费用 } y = (2\pi r l + \pi r^2) \times 3 + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \times 4 = 6\pi r \times \frac{28 - 2r^3}{3r^2} + 11\pi r^2 = \frac{56\pi}{r} + 7\pi r^2,$$

($0 < r < \sqrt[3]{14}$),

$$\text{则 } y' = 14\pi r - \frac{56\pi}{r^2} = \frac{14\pi(r^3 - 4)}{r^2}.$$

当 $r \in (0, \sqrt[3]{4})$ 时， $y' < 0$ ， $r \in (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{14})$ 时， $y' > 0$ 。

当 $r = \sqrt[3]{4}$ 时，该容器的建造费用最小。

故选：C。

【点睛】本题考查数学建模能力，利用导数求解最值问题，考查运算能力，是中档题。

12. 【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：① $f'(x) > g'(x)$ 时，说明函数 $f(x)$ 比函数 $g(x)$ 增加的快，但函数 $f(x)$ 的图像不一定在函数 $g(x)$ 图像的上方，故①不正确；

② 若函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称，则 $f'(x) = g'(2a - x)$ 。

若 $f(x) = g(2a - x) + m$ ，(m 为常数)，此时满足 $f'(x) = g'(2a - x)$ ，所以②不正确；

③ 因为 $f(x) = f(a - x)$ ，所以 $f'(x) = f'(a - x) = f'(a - x)(a - x)' = -f'(a - x)$ ，故③正确。

④ 由导数的几何意义可知 $f'(x)$ 是增函数即函数 $f(x)$ 切线的斜率单调递增，所以函数 $f(x)$ 是“凹型函数”，则必有 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 。故④正确。

综上可得结论正确的是③④。

故选：C。

考点：函数的简单性质。

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

13. 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【详解】由题意可得： $f'(x) = -\sin x$ ， $\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

14. 【答案】 $y = -e^2 x$

【解析】

【分析】设出切点坐标，利用导数求切线斜率，表示出切线方程，代入原点，求出切点坐标，从而得到切线方程.

【详解】 $f(x) = e^{1-x}$ ， $f'(x) = -e^{1-x}$ ，

设切点是 (x_0, y_0) ， $f'(x_0) = -e^{1-x_0}$ ， $y_0 = e^{1-x_0}$ ，

故切线的斜率 $k = -e^{1-x_0}$ ，切点 (x_0, e^{1-x_0}) ，

切线方程是： $y - e^{1-x_0} = -e^{1-x_0}(x - x_0)$ ，

将 $(0, 0)$ 代入切线方程得： $-e^{1-x_0} = x_0 e^{1-x_0}$ ，

解得： $x_0 = -1$ ，故过原点的切线方程是 $y = -e^2 x$.

故答案为： $y = -e^2 x$.

15. 【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】依题意 13 个音的频率成等比数列，记为 $\{a_n\}$ ，设公比为 q ，推导可得.

【详解】依题意 13 个音的频率成等比数列，记为 $\{a_n\}$ ，设公比为 q ，

则 $a_{13} = a_1 q^{12}$ 且 $a_{13} = 2a_1$ ， $\therefore q = 2^{\frac{1}{12}}$ ，

所以 $\frac{f_8}{f_2} = q^6 = (2^{\frac{1}{12}})^6 = \sqrt{2}$.

故答案为： $\sqrt{2}$

16. 【答案】 $(0, 4)$

【解析】

【分析】在 $(0, 2)$ 上， $f(x)$ 有极值点表示 $f'(x)$ 有零点，即可得 $x^2 = a$ ，从而求得 a 的范围

【详解】 $f'(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x}$

由于函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有极值点

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,2)$ 上有零点,

即 $\frac{x^2-a}{x}=0$ 时, 有 $x^2=a$, 可知 $a \in (0,4)$

故答案为: $(0,4)$

【点睛】本题考查了利用导数与极值点的关系求参数范围, 原函数在区间内有极值点转化为其导函数的存在零点, 进而求得参数范围

17. 【答案】6

【解析】

【分析】根据题意, 要使 S 的三个元素构成的集合中不含好元素, 只要这三个元素相连即可, 所以找出相连的三个数构成的集合即可.

【详解】若不含好元素, 则集合 S 中的 3 个元素必须为连续的三个数,

故不含好元素的集合共有 $\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6\}, \{5,6,7\}, \{6,7,8\}$,

共有 6 个.

故答案为: 6.

三、解答题 (每题 13 分, 共 65 分)

18. 【答案】(1) 1; (2) 最大值 4, 有最小值 $\frac{8}{3}$.

【解析】

【分析】

(1) 求出 $f(x)$ 的导数, 由题可知 $f'(2)=0$, 即可求出 a ;

(2) 令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=2$, 判断出 $f(x)$ 的单调性, 即可求出最值.

【详解】(1) $f'(x)=x^2-2ax$.

$\because x=2$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点, $\therefore f'(2)=0$.

即 $4-4a=0$, 解得 $a=1$.

经检验, 当 $a=1$ 时, $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点.

$\therefore$ 实数 a 的值为 1.

(2) 由 (1) 知, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$, $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=2$.

当 x 在 $[-1,3]$ 上变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下:

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3
-----	----	----------	---	---------	---	---------	---

$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	4

当 $x = -1$ 或 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有最小值 $\frac{8}{3}$;

当 $x = 0$ 或 $x = 3$ 时, $f(x)$ 有最大值 4.

【点睛】本题考查利用极值点求参数, 考查利用导数求函数的最值, 属于中档题.

19. 【答案】(1) $a_n = 2n - 1$

$$(2) T_n = n^2 + \frac{2^{2n+1}}{3} - \frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 根据等比中项以及等差数列基本量的计算可求解公差, 进而可求通项.

(2) 根据分组求和以及等差等比数列的求和公式即可求解.

【小问 1 详解】

a_1, a_2, S_3 成等比数列, 故 $a_2^2 = a_1 S_3 \Rightarrow (1+d)^2 = 3+3d$, 化简得: $d^2 - d - 2 = 0$, 因为 $d > 0$, 所

以 $d = 2$, 因此 $a_n = 2n - 1$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + 2^{a_n} = 2n - 1 + 2^{2n-1}, \text{ 因此 } T_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{2n-1}) = \frac{(1+2n-1)n}{2} + \frac{2 \times (1-4^n)}{1-4} \\ &= n^2 + \frac{2^{2n+1}}{3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

20. 【答案】(1) $y = 0$; (2) 证明见解析; (3) 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点; 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

【解析】

【分析】(1) 求出函数 $f(x)$ 的导数, 可得切线的斜率和切点, 可得切线的方程; (2)

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$, 说明 $f'(x)$ 有可变零点即可; (3) 由题意可得函数 $f(x)$ 的零点个数.

【详解】(1) $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2$ 的定义域为 $\{x | x > -1\}$

因为 $f(0) = 0 \ln(0+1) - a \cdot 0^2 = 0$

所以切点的坐标为 $(0, 0)$

$$\text{因为 } f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$$

$$f'(0) = \ln(0+1) + \frac{0}{0+1} - 2a \cdot 0 = 0$$

所以切线的斜率 $k = 0$,

所以切线的方程为 $y = 0$

(2) 方法一:

$$\text{令 } g(x) = f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2a$$

因为 $x > -1$ 且 $a < 0$,

$$\text{所以 } \frac{1}{x+1} > 0, \frac{1}{(x+1)^2} > 0, -2a > 0$$

从而得到 $g'(x) > 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立

所以 $f'(x) > 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增且 $f'(0) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 递增;

所以 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 问题得证

方法二:

$$\text{因为 } f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - 2ax$$

当 $a < 0$ 时,

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } \ln(x+1) < 0, \frac{x}{x+1} < 0, -2ax < 0, \text{ 所以 } f'(x) < 0$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } \ln(x+1) > 0, \frac{x}{x+1} > 0, -2ax > 0, \text{ 所以 } f'(x) > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 递增;

所以 $x = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 问题得证.

(3) 当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

【点睛】本题考查函数的导数的运用: 求切线的方程, 确定函数的极值, 考查函数的零点个数判断, 以及分类讨论思想方法, 属于中档题.

21. 【答案】(1) 证明见解析

(2) 答案见解析 (3) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 代入 $m=0$ ，求出 $f(x)$ 导数，判断函数单调性，求解最小值即可证明；

(2) 求出 $f(x)$ 导数，求出导数零点，分类讨论 m 的取值范围与对应零点的位置关系即可判断单调性；

(3) 根据 (2) 中单调性判断出 $f(x)$ 的最小值，代入最小值即可得出结论。

【小问 1 详解】

当 $m=0$ 时， $f(x)=e^x-x$ ， $f'(x)=e^x-1$

令 $f'(x)>0 \Rightarrow x>0$ ，令 $f'(x)<0 \Rightarrow x<0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增，

故 $f(x) \geq f(0)=1$ 。

【小问 2 详解】

$$f'(x)=e^x-me^{-x}+(m-1)=\frac{(e^x-1)(e^x+m)}{e^x}, \quad m \leq 0$$

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=0$ 或 $x=\ln(-m)$ ，

①当 $m=0$ 时， $f'(x)=e^x-1$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增；

②当 $m \in (-1, 0)$ 时， $\ln(-m)<0$ ， $x \in (-\infty, \ln(-m))$ 和 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增；

$x \in (\ln(-m), 0)$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减；

③当 $m=-1$ 时， $f'(x) \geq 0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

④当 $m \in (-\infty, -1)$ 时 $\ln(-m)>0$ ， $x \in (-\infty, 0)$ 和 $x \in (\ln(-m), +\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增；

$x \in (0, \ln(-m))$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减；

【小问 3 详解】

当 $-e \leq m \leq -1$ 时，即 $1 \leq -m \leq e$ ，也就是 $0 \leq \ln(-m) \leq 1$ ，

由 (2) 可知， $f(x)$ 在 $(0, \ln(-m))$ 单调递减，在 $(\ln(-m), +\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x) \geq f(\ln(-m)) = e^{\ln(-m)} + me^{-\ln(-m)} + (m-1)\ln(-m)$

化简可得 $f(x) \geq -m-1+(m-1) \times \ln(-m) \geq -m-1+(m-1) \times 1 = -2$ ，

故 $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) \geq -2$ 恒成立。

【点睛】方法点睛：确定单调区间的步骤：(1) 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域；(2) 求导数 $y'=f'(x)$ ，令

$f'(x)=0$ ，解此方程，求出在定义区间内的一切实根；(3) 利用 $f(x)$ 的定义域和实根把函数 $f(x)$ 的定义

区间分成若干个子区间；(4) 确定 $f'(x)$ 在各个区间内的符号，根据符号判定函数在每个相应区间内的单调性

22. 【答案】(1) $S(A^*A)=3$, $S(A^*B)=1$

(2) 见解析 (3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据数列 A^*B 的定义分别求出 A^*A , A^*B , 即可得出答案;

(2) 记数列 A^*B : $c_1, c_2, \dots, c_n$, 数列 $(A^*B)^*A$: $d_1, d_2, \dots, d_n$, 分 $a_k=1$ 和 $a_k=0$ 两种情况讨论, 从而可得出结论;

(3) 分 n 是奇数和偶数两种情况讨论, 根据定义分析运算, 从而可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 因为数列 A : 1, 0, 1, B : 0, 1, 1,

所以数列 A^*A : 1, 1, 1, 数列 A^*B : 0, 0, 1,

所以 $S(A^*A)=3$, $S(A^*B)=1$;

【小问 2 详解】

证明: 对于两个 0-1 数列 A : $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 B : $b_1, b_2, \dots, b_n$,

记数列 A^*B : $c_1, c_2, \dots, c_n$, 对于 c_k , ($k=1, 2, \dots, n$),

若 $a_k=1$, 则此时 $|a_k - b_k| = 1 - b_k, c_k = 1 - |a_k - b_k| = b_k$;

若 $a_k=0$, 则此时 $|a_k - b_k| = b_k, c_k = 1 - |a_k - b_k| = 1 - b_k$,

故对于数列 $(A^*B)^*A$: $d_1, d_2, \dots, d_n$, 考虑 d_k 的值 ($k=1, 2, \dots, n$):

若 $a_k=1$, 则 $d_k = c_k = b_k$;

若 $a_k=0$, 则 $d_k = 1 - c_k = 1 - (1 - b_k) = b_k$,

所以 $(A^*B)^*A$ 与 B 是同一数列,

所以 $S((A^*B)^*A) = S(B)$;

【小问 3 详解】

解: 若 n 是奇数, 则不存在满足条件的 n 项 0-1 数列 A, B, C , 证明如下:

对于 3 个 n 项 0-1 数列 A, B, C ,

记 $x_i = 3 - |a_i - b_i| - |b_i - c_i| - |c_i - a_i|$, ($i=1, 2, \dots, n$),

则 $S(A^*B) + S(A^*C) + S(B^*C) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$,

当 $a_i = b_i = c_i$ 时, $x_i = 3 - |a_i - b_i| - |b_i - c_i| - |c_i - a_i| = 3$,

当 a_i, b_i, c_i 中有一个不同于其他两个时, $x_i = 3 - |a_i - b_i| - |b_i - c_i| - |c_i - a_i| = 1$,

所以 x_i 是奇数,

则 $S(A*B) + S(A*C) + S(B*C) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 为奇数个奇数之和，仍为奇数，不可能为 $2n$ ；

若 n 为偶数，即 $n = 2k (k \in \mathbb{N}_+)$ ，

可构造： $A: \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ 个}}, B: \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ 个}}, C: \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ 个}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ 个}},$

此时数列 $A*B$ 为 $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ 个}}$ ，数列 $A*C$ ， $B*C$ 相同，都是 $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ 个}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ 个}},$

所以有 $S(A*B) + S(A*C) + S(B*C) = n + k + k = 2n$ ，

综上所述，当 n 为偶数时， $S(A*B) + S(A*C) + S(B*C)$ 有可能为 $2n$ ，

当 n 为奇数时，不可能成立。

【点睛】本题考查了数列的新定义，考查了学生的逻辑思维能力，解题的关键在于对新定义的理解，有一定的难度。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯