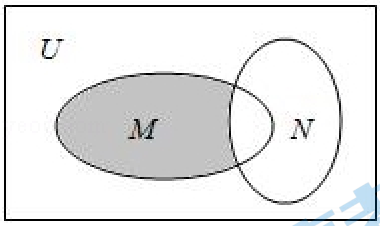
2019 北京五中高三（上）期中

数　学

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. （5 分）集合 $M=\{x|x^2-1=0\}$，集合 $N=\{x|x^2-3x+2=0\}$，全集为 U，则图中阴影部分表示的集合是（　　）

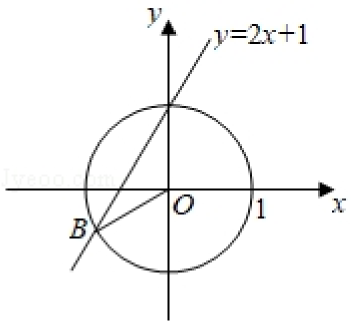


A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\varnothing$

2. （5 分）已知函数 $f(x)=|x-2|$，$g(x)=kx$，若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(0,1)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(1,+\infty)$

3. （5 分）直线 $y=2x+1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 交于 A，B 两点，以 x 轴的正方向为始边，OA 为终边（O 是坐标原点）的角为 α，OB 为终边的角为 β，则 $\sin(\alpha+\beta)=$（　　）



A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

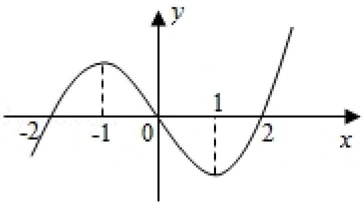
4. （5 分）若 A、B 是锐角△ABC 的两个内角，则点 $P(\cos B-\sin A,\ \sin B-\cos A)$ 在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

5. （5 分）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$，a，$b\in R_+$，$A=f(\frac{a+b}{2})$，$B=f(\sqrt{ab})$，$C=f(\frac{2ab}{a+b})$，则 A、B、C 的大小关系为（　　）

A. $A\leqslant B\leqslant C$　　B. $A\leqslant C\leqslant B$　　C. $B\leqslant C\leqslant A$　　D. $C\leqslant B\leqslant A$

6. （5 分）已知 R 上可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $(x^2-2x-3)f'(x)>0$ 的解集为（　　）



A. $(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$

B. $(-\infty, -2)\cup(1, 2)$

C. $(-\infty, -1)\cup(-1, 0)\cup(2, +\infty)$

D. $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(3, +\infty)$

7. （5 分）设点 A，B，C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. （5 分）设 l_1，l_2，l_3 为空间中三条互相平行且两两间的距离分别为 4，5，6 的直线．给出下列三个结论：

①$\exists A_i\in l_i$ $(i=1, 2, 3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是直角三角形；

②①$\exists A_i\in l_i$ $(i=1, 2, 3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是等边三角形；

③三条直线上存在四点 A_i $(i=1, 2, 3, 4)$，使得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为在一个顶点处的三条棱两两互相垂直的四面体．

其中，所有正确结论的序号是（　　）

A. ①　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9. （5 分）函数 $f(x)=1-2\sin^2 2x$ 的最小正周期是_______．

10. （5 分）曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_______．

11. （5 分）已知正方体的外接球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的体积为_______．

12. （5 分）设$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个非零向量，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，则向量$\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角为_______．

13. （5 分）设函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{2\pi}{3})(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在$[0, 2\pi]$有且仅有 5 个零点，下述四个结论：

①$f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可能有 3 个极大值点；

②$f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可能有 3 个极小值点；

③$f(x)$ 在$(0, \frac{5\pi}{18})$单调递减；

其中所有正确结论的编号是_______.

14. （5 分）设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足 $f(x+1)=3f(x)$，且当 $x\in(0, 1]$时，$f(x)=x(x-1)$．若对任意 $x\in(-\infty, m]$，都有 $f(x)\geqslant-2$，则 m 的取值范围是_______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. （13 分）设锐角三角形 ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a=2b\sin A$.

（Ⅰ）求 B 的大小；

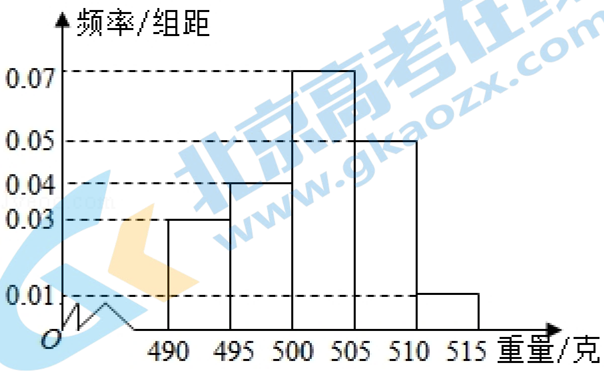
（Ⅱ）求$\frac{\sin C}{\cos A}$的取值范围．

16. （14 分）某食品厂为了检查一条自动自装流水线的生产情况，随机抽取该流水线上 40 件产品作为样本，称出它们的重量（单位：克）重量的分组区间为（490，495]，（495，500]，…，（510，515]．由此得到样本的频率分布直方图，如图所示．

（Ⅰ）根据频率分布直方图，求重量超过 505 克的产品数量；

（Ⅱ）从流水线上（可视为独立重复试验）抽取 5 件产品，求恰有 2 件产品的重量超过 505 克的概率；

（Ⅲ）在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件，设 X 为重量超过 505 克的产品数量，求 X 的分布列和期望．

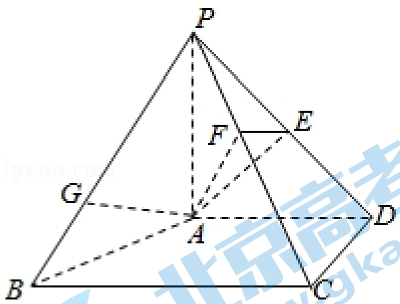


17. （13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD// BC$，$PA=AD=CD=3$，$BC=4$，E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$；

（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面 PAD；

（Ⅱ）求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值

（Ⅲ）设点 G 在 PB 上，且 $\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$．判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由．



18. （13 分）已知函数 $f(x)=6\ln x$（$x>0$）和 $g(x)=ax^2+8x-b$（a，b 为常数）的图象在 $x=3$ 处有公切线．

（1）求实数 a 的值；

（2）求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的极大值和极小值；

（3）关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有几个不同的实数解？

19. （14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的上顶点为 A，左右焦点分别为 F_1、F_2，直线 AF_2 与圆 M：$x^2+y^2-6x-2y+7=0$ 相切．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若椭圆 C 内的动点 P，使 $|PF_1|$，$|PO|$，$|PF_2|$ 成等比数列（O 为坐标原点，）求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围．

20．（13 分）已知集合 $A_n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in\{-1, 1\}(i=1, 2, \cdots, n)\}$．$x$，$y\in A_n$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，其中 x_i，$y_i\in\{-1, 1\}(i=1, 2, \cdots, n)$．定义 $x\odot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$．若 $x\odot y=0$，则称 x 与 y 正交．

（Ⅰ）若 $x=(1, 1, 1, 1)$，写出 A_4 中与 x 正交的所有元素；

（Ⅱ）令 $B=\{x\odot y\mid x, y\in A_n\}$．若 $m\in B$，证明：$m+n$ 为偶数；

（Ⅲ）若 $A\subseteq A_n$，且 A 中任意两个元素均正交，分别求出 $n=8$，14 时，A 中最多可以有多少个元素．

2019 北京五中高三（上）期中数学

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【分析】由题意分别求方程 $x^2-1=0$ 和 $x^2-3x+2=0$ 的解，从而求出集合 M、N；再根据图形阴影部分表示的集合是 $C_U^N\cap M$.

【解答】解：由 $x^2-1=0$，解得 $x=-1$ 或 1，

则 $M=\{1,\ -1\}$；由 $x^2-3x+2=0$，

解得 $x=1$ 或 2，则 $N=\{1,\ 2\}$，

则图中阴影部分表示的集合是 $C_U^N\cap M=\{-1\}$.

故选：B.

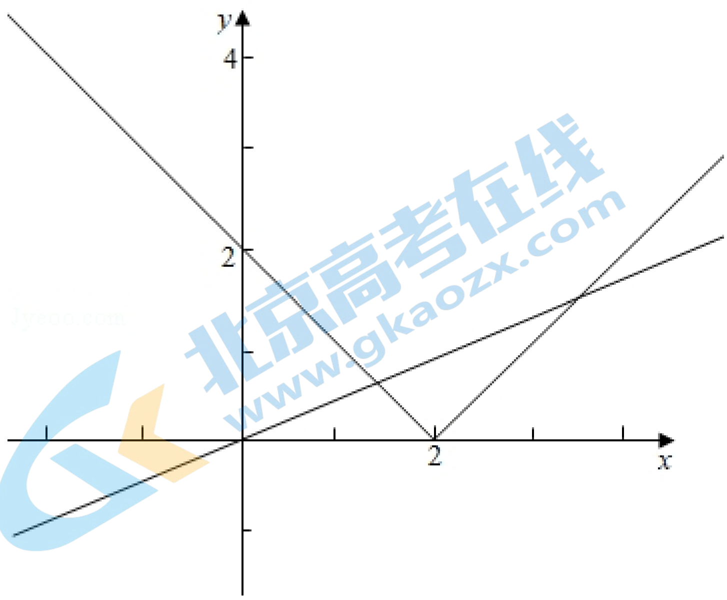
【点评】本题考查了求 *Venn* 图表示得集合，关键是根据图形会判断出阴影部分表示的集合元素特征，再通过集合运算求出.

2. 【分析】本题利用数形结合思想，画出 $f(x)=|x-2|$ 的图象，结合图象分析.

【解答】解：∵ $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实数根，

∴ $f(x)=|x-2|$ 和 $g(x)=kx$ 的图象有两个不同的交点.

画出 $f(x)$，$g(x)$ 的图象如下：



$\therefore 0<k<1$.

故选：B.

【点评】本题考查了数形结合思想，和直观想象的能力，难度较低，属于基础题．

3．【分析】先联立方程得到点 AB 的坐标，进而得到 α 与 β 的正余弦值，再由两角和与差的正弦公式可得答案．

【解答】解：联立 $y=2x+1$ 与 $x^2+y^2=1$，

解得：$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-\dfrac{4}{5}\\y=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$，可得 $A(0,1)$，$B(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5})$，

$\therefore \cos\alpha=0$，$\sin\alpha=1$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=1\times(-\dfrac{4}{5})+0\times(-\dfrac{3}{5})=-\dfrac{4}{5}$，

故选：B.

【点评】本题主要考查三角函数的概念和两角和与差的正弦公式．属基础题．

4．【分析】根据若 A、B 是锐角$\triangle ABC$的两个内角，分析出 $A+B>\dfrac{\pi}{2}$，进而 $A>\dfrac{\pi}{2}-B$，$B>\dfrac{\pi}{2}-A$，运用诱导公式，$\sin A>\cos B$，$\sin B>\cos A$ 得出答案．

【解答】解：$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，

$\therefore A+B>\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore A>\dfrac{\pi}{2}-B$，$B>\dfrac{\pi}{2}-A$.

$\therefore \sin A>\cos B$，$\sin B>\cos A$

$\therefore \cos B-\sin A<0$，$\sin B-\cos A>0$

$\therefore P$ 在第二象限．

故选：B.

【点评】本题考查了三角函数中的诱导公式．做题时应考虑值的正负．

5. 【分析】先明确函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ 是一个减函数，再由基本不等式明确 $\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\frac{2ab}{a+b}$ 三个数的大小，然后利用函数的单调性定义来求解．

【解答】解：$\because \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$，

又 $\because f(x)=(\frac{1}{2})^x$ 在 R 上是单调减函数，

$\therefore f(\frac{a+b}{2})\leqslant f(\sqrt{ab})\leqslant f(\frac{2ab}{a+b})$．

故选：A.

【点评】本题主要考查指数函数的单调性和基本不等式．在比较大小时体现了函数思想．

6. 【分析】根据题意结合图象求出 $f'(x)>0$ 的解集与 $f'(x)<0$ 的解集，因此对原不等式进行化简与转化，进而得到原不等式的答案．

【解答】解：由图象可得：当 $f'(x)>0$ 时，函数 $f(x)$ 是增函数，所以 $f'(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，

当 $f'(x)<0$ 时，函数 $f(x)$ 是减函数，所以 $f'(x)<0$ 的解集为 $(-1,1)$．

所以不等式 $f'(x)<0$ 即与不等式 $(x-1)(x+1)<0$ 的解集相等．

由题意可得：不等式 $(x^2-2x-3)f'(x)>0$ 等价于不等式 $(x-3)(x+1)(x+1)(x-1)>0$，

所以原不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$，

故选：D.

【点评】解决此类问题的关键是熟悉函数的单调性与导数的关系，以及掌握读图与识图的技巧再结合不等式的解法即可得到答案．

7. 【分析】“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”⇒“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”，“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”⇒“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”，由此能求出结果．

【解答】解：点 A，B，C 不共线，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，

当$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角时，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2}>0$，

$\therefore$“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”⇒“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”，

"$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$" ⇒ "$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角"，

∴设点 A，B，C 不共线，则"$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角"是"$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$"的充分必要条件．

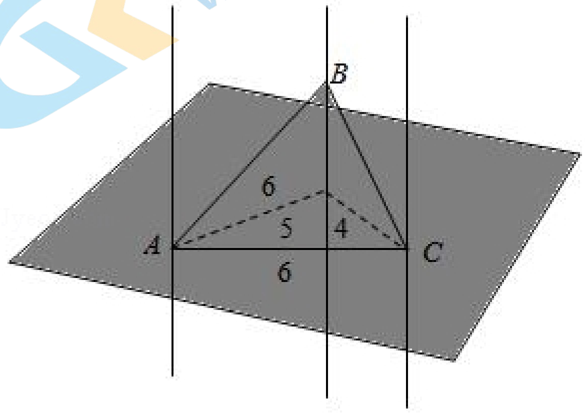
故选：C．

【点评】本题考查充分条件、必要条件、充要条件的判断，考查向量等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于基础题．

8．【分析】本题利用画图结合运动变化的思想进行分析．我们不妨先将 A、B、C 按如图所示放置，容易看出此时 $BC<AB=AC$．

现在，我们将 A 和 B 往上移，并且总保持 $AB=AC$（这是可以做到的，只要 A、B 的速度满足一定关系），而当 A、B 移得很高很高时，就得到①和②都是正确的．至于③，结合条件利用反证法的思想方法进行说明即可．

【解答】解：我们不妨先将 A、B、C 按如图所示放置．



容易看出此时 $BC<AB=AC$．

现在，我们将 A 和 B 往上移，并且总保持 $AB=AC$（这是可以做到的，只要 A、B 的速度满足一定关系），而当 A、B 移得很高很高时，不难想象△ABC 将会变得很扁，也就是会变成顶角 A"非常钝"的一个等腰钝角三角形．于是，在移动过程中，总有一刻，使△ABC 成为等边三角形，亦总有另一刻，使△ABC 成为直角三角形（而且还是等腰的）．

这样，就得到①和②都是正确的．

至于③，如图所示．

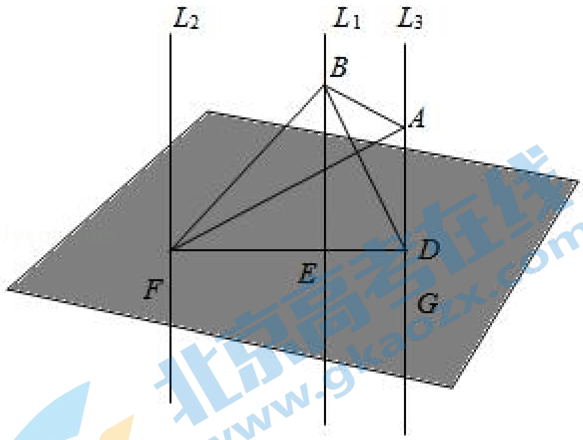
为方便书写，称三条两两垂直的棱所共的顶点为т．

假设 A 是т，那么由 $AD\perp AB$，$AD\perp AC$ 知 $L_3\perp$△ABC，从而△ABC 三边的长就是三条直线的距离 4、5、6，这就与 $AB\perp AC$ 矛盾．同理可知 D 是т时也矛盾；

假设 C 是⊤，那么由 $BC\perp CA$，$BC\perp CD$ 知 $BC\perp\triangle CAD$，而 $l_1/\!/\triangle CAD$，故 $BC\perp l_1$，从而 BC 为 l_1 与 l_2 的距离，于是 $EF/\!/BC$，$EF=BC$，这样就得到 $EF\perp FG$，矛盾．同理可知 B 是⊤时也矛盾．

综上，不存在四点 A_i（$i=1$，2，3，4），使得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为在一个顶点处的三条棱两两互相垂直的四面体．

故选：B.



【点评】本小题主要考查命题的真假判断与应用，考查空间想象能力、化归与转化思想．属于难题．

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9.【分析】由题意利用二倍角公式，余弦函数的周期性，求得答案．

【解答】解：函数 $f(x)=1-2\sin^2 2x=\cos 4x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

故答案为：$\frac{\pi}{2}$．

【点评】本题主要考查二倍角公式，余弦函数的周期性，属于基础题．

10.【分析】对 $y=3(x^2+x)e^x$ 求导，可将 $x=0$ 代入导函数，求得斜率，即可得到切线方程．

【解答】解：∵ $y=3(x^2+x)e^x$，

∴ $y'=3e^x(x^2+3x+1)$，

∴当 $x=0$ 时，$y'=3$，

∴ $y=3(x^2+x)e^x$ 在点（0，0）处的切线斜率 $k=3$，

∴切线方程为：$y=3x$．

故答案为：$y=3x$．

【点评】本题考查了利用导数研究函数上某点的切线方程，切点处的导数值为斜率是解题关键，属基础题．

11. 【分析】设正方体的棱长为 a，用 a 表示正方体外接球的半径 R，

利用外接球的体积求出 a^3，即可得出正方体的体积.

【解答】解：设正方体的棱长为 a，且正方体外接球的直径为 $2R$，

则 $(2R)^2=3a^2$，

解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$；

所以外接球的体积为

$V_{球}=\frac{4\pi}{3}\cdot R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3=4\sqrt{3}\pi$，

解得 $a^3=8$，

所以该正方体的体积为

$V_{正方体}=a^3=8$.

故答案为：8.

【点评】本题考查了正方体与它的外接球的体积计算问题，是基础题.

12. 【分析】根据 $|a|=|b|=|a+b|$，得到由两个向量为邻边组成的四边形是菱形，且一条对角线等于边长，得到特殊的关系.

【解答】解：∵ $|a|=|b|=|a+b|$，

由向量加法平行四边形法则得到由两个向量为邻边组成的四边形是菱形，

菱形的一条对角线同边相等

∴则向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$

故答案为：$\frac{5\pi}{6}$.

【点评】大小和方向是向量的两个要素，分别是向量的代数特征和几何特征，借助于向量可以实现某些代数问题与几何问题的相互转化.

13. 【分析】求出角 $\omega x+\frac{2\pi}{3}$ 的范围，结合函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，确定 $2\omega\pi+\frac{2\pi}{3}$ 的取值范围，结合三角函数 $f(x)=\sin x$ 的图象，分别进行判断即可.

【解答】解：∵ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，

$\therefore 0 \leqslant \omega x \leqslant 2\omega\pi$，$\frac{2\pi}{3} \leqslant \omega x + \frac{2\pi}{3} \leqslant 2\omega\pi + \frac{2\pi}{3}$，

若 $f(x)$ 在$[0, 2\pi]$有且仅有 5 个零点，则 $5\pi \leqslant 2\omega\pi + \frac{2\pi}{3} < 6\pi$，得$\frac{13}{6} \leqslant \omega < \frac{8}{3}$，

则此时 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上只有 2 个极大值点，故①错误，

当$\frac{11\pi}{2} < 2\omega\pi + \frac{2\pi}{3} < 6\pi$ 时，$f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可能有 3 个极小值点，

故②正确，

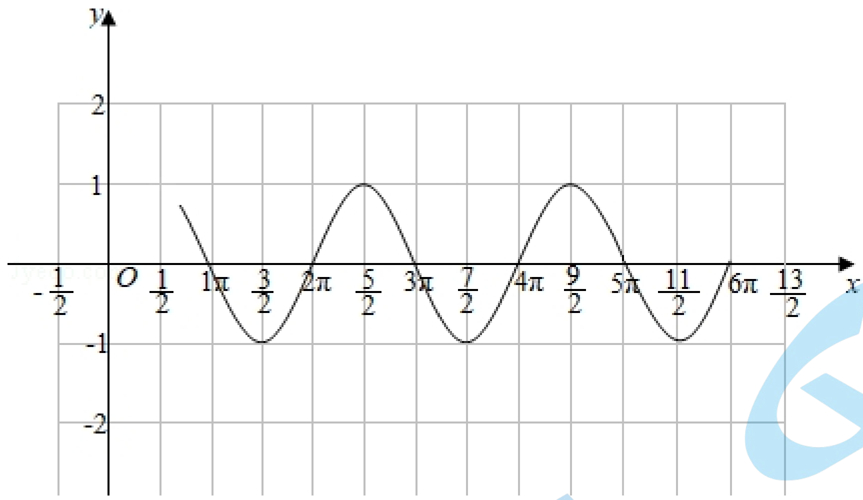
当 $0 < x < \frac{5\pi}{18}$，$\therefore 0 < \omega x \leqslant \frac{5\omega\pi}{18}$，$\frac{2\pi}{3} < \omega x + \frac{2\pi}{3} \leqslant \frac{5\omega\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}$，

当 $\omega = \frac{8}{3}$时，$\frac{5\omega\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$，此时$\frac{2\pi}{3} < \omega x + \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$，

此时函数 $f(x)$ 为减函数，故③正确，

故正确的命题是②③，

故答案为：②③



【点评】本题主要考查命题的真假判断，涉及三角函数的图象和性质，结合函数零点个数确定角的范围是解决本题的关键．综合性较强，有一定的难度．

14. 【分析】分别求得 $x\in(0, 1]$时，$x\in(1, 2]$时，$x\in(2, 3]$时，对应函数 $f(x)$ 的值域，

列方程求得 m 的最大值，从而求得取值范围．

【解答】解：$\because f(x+1) = 3f(x)$，

$\therefore f(x) = 3f(x-1)$，

∵$x\in(0,1]$时，$f(x)=x(x-1)\in[-\frac{1}{4},0]$，

∴$x\in(1,2]$时，$x-1\in(0,1]$，$f(x)=3f(x-1)=3(x-1)(x-2)\in[-\frac{3}{4},0]$；

∴$x\in(2,3]$时，$x-1\in(1,2]$，$f(x)=3f(x-1)=9(x-2)(x-3)\in[-\frac{9}{4},0]$；

当$x\in(2,3]$时，由$9(x-2)(x-3)=-2$，解得$x=\frac{7}{3}$或$x=\frac{8}{3}$；

若对任意$x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\geqslant-2$，则$m\leqslant\frac{7}{3}$.

故答案为：$m\leqslant\frac{7}{3}$.

【点评】本题考查了函数与方程的应用问题，也考查了运算与求解能力，以及分类讨论的解题思想，是中档题.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．【分析】（*I*）由已知结合正弦定理化简可求 sin*B*，然后结合 *B* 为锐角，可求.

（*II*）由（1）可知$C=\frac{5\pi}{6}-A$，然后结合 *A*，*C* 为锐角可求 *A* 的范围，而$\frac{\sin C}{\cos A}=\frac{\sin(\frac{5\pi}{6}-A)}{\cos A}$，展开后结合已知 *A* 的范围及正切函数的性质可求.

【解答】解：（*I*）∵$a=2b\sin A$，

由正弦定理可得，$\sin A=2\sin B\sin A$，

∵$\sin A\neq0$，

∴$\sin B=\frac{1}{2}$，

∵*B* 为锐角，

∴$B=\frac{\pi}{6}$，

（*II*）由（1）可知$C=\frac{5\pi}{6}-A$，

$\because \begin{cases} 0<A<\frac{1}{2}\pi \\ 0<\frac{5\pi}{6}-A<\frac{1}{2}\pi \end{cases}$,

$\therefore \frac{1}{3}\pi<A<\frac{1}{2}\pi$,

$\therefore \tan A>\sqrt{3}$,

$\therefore \frac{\sin C}{\cos A}=\frac{\sin(\frac{5\pi}{6}-A)}{\cos A}=\frac{\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A}{\cos A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan A>2$.

【点评】本题主要考查了正弦定理，两角差的正弦公式及正切函数的性质的综合应用，属于中档试题.

16. 【分析】（1）根据频率分布直方图计算出重量超过 505 克的产品频率，与样本容量相乘即可；

（2）频率作为概率的近似值，再结合二项分布的知识即可求出 5 次试验成功两次的概率；

（3）列出随机变量 X 的所有可能的取值，分别计算出对应概率，列出分布列求期望即可.

【解答】解：（1）依题意，重量超过 505 克的产品的频率为：（0.05+0.01）×5=0.3，

所以重量超过 505 克的产品数量为 40×0.3=12 件；

（2）由（1）知，抽到的产品重量超过 505 克的概率为 0.3，

所以抽取 5 件产品，求恰有 2 件产品的重量超过 505 克的概率 $P=C_5^2(0.3)^2\times(0.7)^3=0.3087$；

（3）依题意 40 件产品中重量超过 505 克的产品数量为 12 件，重量不超过 505 克的产品数量为 28 件，

随机变量 X 的所有可能的取值为 0，1，2，对应概率如下：

$P(X=0)=\frac{C_{28}^2}{C_{40}^2}=\frac{63}{130}$，$P(X=1)=\frac{C_{12}^1C_{28}^1}{C_{40}^2}=\frac{28}{65}$，$P(X=2)=\frac{C_{12}^2}{C_{40}^2}=\frac{11}{130}$，

所以随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{63}{130}$	$\frac{28}{65}$	$\frac{11}{130}$

所以 $E(X)=0\times\frac{63}{130}+1\times\frac{28}{65}+2\times\frac{11}{130}=\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查了频率分布直方图的应用，考查了二项分布，考查了超几何分布，考查分析解决问题的能力，逻辑思维能力和计算能力，属于中档题.

17. 【分析】（Ⅰ）推导出 $PA\perp CD$，$AD\perp CD$，由此能证明 $CD\perp$ 平面 PAD.

（Ⅱ）以 A 为原点，在平面 $ABCD$ 内过 A 作 CD 的平行线为 x 轴，AD 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出二面角 $F-AE-P$ 的余弦值.

（Ⅲ）求出 $\overrightarrow{AG}=(2,\ -1,\ 1)$，平面 AEF 的法向量 $\overrightarrow{m}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0$，从而直线 AG 在平面 AEF 内.

【解答】证明：（Ⅰ）∵$PA\perp$ 平面 $ABCD$，∴$PA\perp CD$，

∵$AD\perp CD$，$PA\cap AD=A$，

∴$CD\perp$ 平面 PAD.

解：（Ⅱ）以 A 为原点，在平面 $ABCD$ 内过 A 作 CD 的平行线为 x 轴，

AD 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$A(0,\ 0,\ 0)$，$E(0,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2})$，$F(1,\ 1,\ 2)$，

$P(0,\ 0,\ 3)$，$B(3,\ -1,\ 0)$，

$\overrightarrow{AE}=(0,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2})$，$\overrightarrow{AF}=(1,\ 1,\ 2)$，

平面 AEP 的法向量 $\overrightarrow{n}=(1,\ 0,\ 0)$，

设平面 AEF 的法向量 $\overrightarrow{m}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y+z=0\\ x+y+2z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\overrightarrow{m}=(1,\ 1,\ -1)$，

设二面角 $F-AE-P$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\,|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴二面角 $F-AE-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）直线 AG 在平面 AEF 内，理由如下：

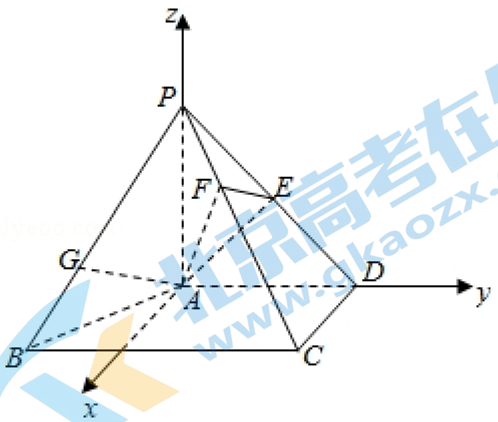
∵点 G 在 PB 上，且$\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$. ∴$G$（2，﹣1，1），

∴$\overrightarrow{AG}$=（2，﹣1，1），

∵平面 AEF 的法向量$\overrightarrow{n}$=（1，1，﹣1），

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AG}=2-1-1=0$，

故直线 AG 在平面 AEF 内.



【点评】本题考查线面垂直的证明，考查二面角的余弦值的求法，考查直线是否在已知平面内的判断与求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于中档题.

18. 【分析】（1）先对两个函数求导，再由题目条件知，$f'(3)=g'(3)$ 从而建立关于 a 的方程，可求得 a 的值.

（2）由（1）确定了函数及其导数的解析式，通过探讨导数的符号得函数的单调性，即可的函数的极大值和极小值.

（3）由（2）可得结论.

【解答】解：（1）$f'(x)=\frac{6}{x}$，$g'(x)=2ax+8$，

根据题意，得 $f'(3)=g'(3)$

解得 $a=-1$；

（2）$F(x)=f(x)-g(x)=6\ln x+x^2-8x+b$.

令 $F'(x)=\frac{6}{x}+2x-8$，得 $x=1$，3.

∵$0<x<1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；

$1<x<3$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

$x>3$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增.

∴$F(x)$ 的极大值为 $F(1)=-7+b$，$F(x)$ 的极小值为 $F(3)=-15+6\ln 3+b$；

（3）∵$F(x)$ 的极大值为 $F(1)=-7+b<0$，$F(x)$ 的极小值为 $F(3)=-15+6\ln 3+b<0$，

∴$b\geq 7$，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 无解；$15-6\ln 3<b<7$，有 1 个不同的实数解；$b\geq 15-6\ln 3$ 无解.

【点评】本题主要考查了利用导数研究函数的极值，同时考查了导数的几何意义，以及学生灵活转化题目条件的能力，是个中档题.

19. 【分析】（Ⅰ）先求出圆的标准方程以及直线 AF_2 与的方程，利用圆心到直线的距离等于半径即可求出对应的椭圆的方程；

（Ⅱ）先利用 $|PF_1|$，$|PO|$，$|PF_2|$ 成等比数列求出点 P 的坐标满足的等量关系，再代入 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 借助于点 P 在椭圆内就可求出 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围.

【解答】解：（1）将圆 M：$x^2+y^2-6x-2y+7=0$ 化为标准方程 $(x-3)^2+(y-1)^2=3$，

圆 M 的圆心为 $M(3,1)$，半径为 $r=\sqrt{3}$，（2 分）

由 $A(0,1)$，$F_2(c,0)$，$(c=\sqrt{a^2-1})$ 得直线 AF_2：$\frac{x}{c}+y=1$，即 $x+cy-c=0$（3 分）

直线 AF_2 与圆 M：相切得 $\frac{|3+c-c|}{\sqrt{c^2+1}}=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{2}$，$c=-\sqrt{2}$（舍去）（5 分）

当 $c=\sqrt{2}$ 时，$a^2=c^2+1=3$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$（6 分）

（2）由（1）得，$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，设 $P(x,y)$，

由题意得 $|PO|^2=|PF_1||PF_2|$，即 $(\sqrt{x^2+y^2})^2=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}$

化简得：$x^2-y^2=1$　（9 分）

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x^2-2+y^2=2x^2-3$（10 分）

∵点 P 为椭圆内的动点，∴$1\leq x^2<\frac{3}{2}$（12 分）

∴$-1\leq\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}<0$（13 分）

【点评】本题是对圆与椭圆知识的综合考查．当直线与圆相切时，可以利用圆心到直线的距离等于半径求解．，也可以把直线与圆的方程联立让对应方程的判别式为 0 求解．

20．【分析】（Ⅰ）由子集定义直接写出答案；

（Ⅱ）根据题意分别表示出 m，n 即可；

（Ⅲ）根据两个元素均正交的定义，分别求出 $n=8$，14 时，A 中最多可以有多少个元素即可．

【解答】解：（Ⅰ）A_4 中所有与 x 正交的元素为（－1，－1，1，1）（1，1，－1，－1），（－1，1，－1，1），（－1，1，1，－1），（1，－1，－1，1），（1，－1，1，－1）．…（3 分）

（Ⅱ）对于 $m\in B$，存在 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$x_i\in\{-1, 1\}$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，其中 x_i，$y_i\in\{-1, 1\}$；

使得 $x\odot y=m$．

令 $\lambda_1=\begin{cases}1(x_i=y_i)\\0(x_i\neq y_i)\end{cases}$，$k=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$；当 $x_i=y_i$ 时，$x_iy_i=1$，当 $x_i\neq y_i$ 时，$x_iy_i=-1$．

那么 $x\odot y=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=k-(n-k)=2k-n$．

所以 $m+n=2k-n+n=2k$ 为偶数．…（8 分）

（Ⅲ）8 个，2 个

$n=8$ 时，不妨设 $x_1=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$，$x_2=(-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)$．

在考虑 $n=4$ 时，共有四种互相正交的情况即：（1，1，1，1），（－1，1，－1，1），（－1，－1，1，1），（1，－1，－1，1）分别与 x_1，x_2 搭配，可形成 8 种情况．

所以 $n=8$ 时，A 中最多可以有 8 个元素．…（10 分）

$N=14$ 时，

不妨设 $y_1=(1, 1\cdots1, 1)$，（14 个 1），$y_2=(-1, -1\cdots-1, 1, 1\cdots1)$（7 个 1，7 个－1），则 y_1 与 y_2 正交．

令 $a=(a_1, a_2, \cdots a_{14})$，$b=(b_1, b_2, \cdots b_{14})$，$c=(c_1, c_2, \cdots c_{14})$ 且它们互相正交．

设 a、b、c 相应位置数字都相同的共有 k 个，除去这 k 列外

a、b 相应位置数字都相同的共有 m 个，

c、b 相应位置数字都相同的共有 n 个．

则 $a\odot b=m+k-(14-m-k)=2m+2k-14$.

所以 $m+k=7$，同理 $n+k=7$.

可得 $m=n$.

由于 $a\odot c=-m-m+k+(14-k-2m)=0$，可得 $2m=7$，$m=\frac{7}{2}\notin N$ 矛盾.

所以任意三个元素都不正交.

综上，$n=14$ 时，A 中最多可以有 2 个元素. …（13 分）

【点评】本题考查了新定义问题，主要考查学生的分析问题，解决问题的能力，属于难题.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。

北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）

扫码关注获取更多