汕头市 2023—2024 学年度普通高中毕业班期中调研测试

数　学

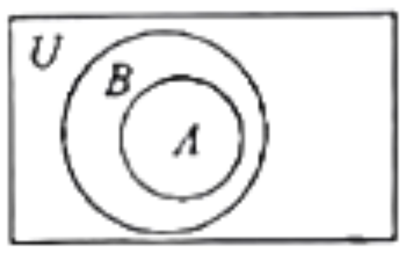
注意事项：

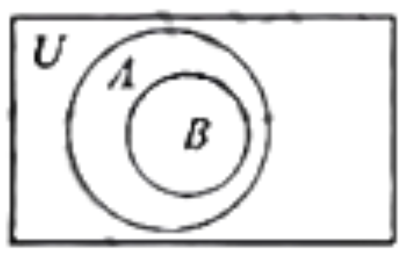
1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡指定位置.
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交.

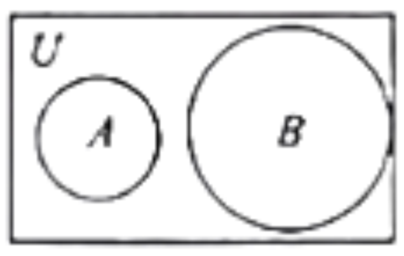
第 I 卷 选择题

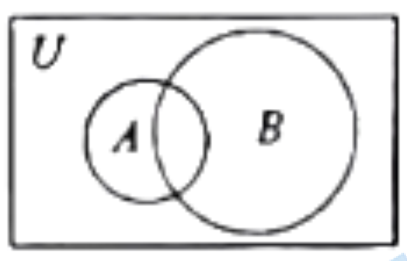
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，能表示集合 $A=\left\{x\mid x^2-x-2\le 0\right\}$ 与 $B=\{x\mid 0<x<5\}$ 关系的 Venn 图是（　）

A．

B．

C．

D．

2．已知复数 $z-1$ 与复数 $(z+1)^2-8\mathrm{i}$ 都是纯虚数，则 $z=$（　）

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$1+2\mathrm{i}$　　C．$1\pm 2\mathrm{i}$　　D．$1-2\mathrm{i}$

3．设 $a=\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$，$b=2\sin 13^\circ\cos 13^\circ$，$c=\sqrt{\dfrac{1-\cos 50^\circ}{2}}$，则有（　）

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$　　C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

4．为了进一步学习贯彻党的二十大精神，推进科普宣传教育，激发学生的学习热情，营造良好的学习氛围，不断提高学生对科学、法律、健康等知识的了解，某学校组织全校班级开展“红色百年路·科普万里行”知识竞赛．现抽取 10 个班级的平均成绩：70、71、73、76、78、78、81、85、89、90，据此估计该校各个班级平均成绩的第 40 百分位数为（　）

A．77　　B．78　　C．76　　D．80

5．已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上（不包括端点），向量 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}+2$　　C．$2\sqrt{2}+3$　　D．$2\sqrt{3}+2$

6．图 1 是一个水平放置且高为 6 的直三棱柱容器 $ABC-A_1B_1C_1$，现往内灌进一些水，设水深为 h．将容器底面的一边 AB 固定于地面上，再将容器倾斜，当倾斜到某一位置时，水面形状恰好为 $\triangle A_1B_1C$，如图 2，则 $h=$（　　）

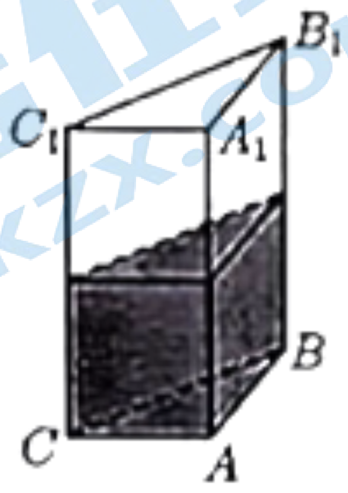


图 1

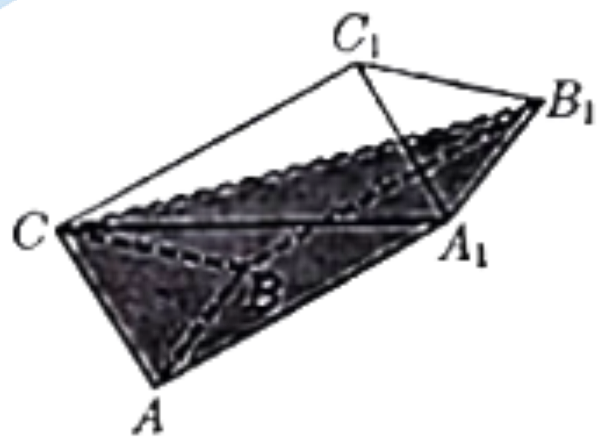


图 2

A．3　　B．4　　C．$4\sqrt{2}$　　D．6

7．已知函数 $f(x)=\sin\pi x$ 的图象的一部分如图 3，则图 4 中的函数图象所对应的函数解析式是（　　）

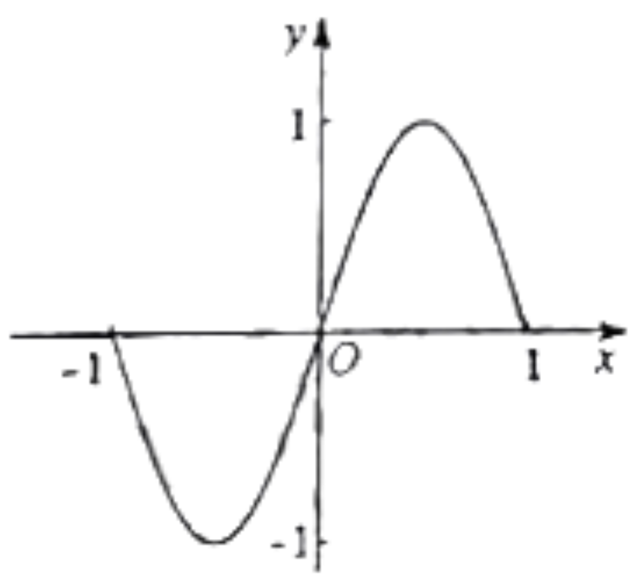


图 3

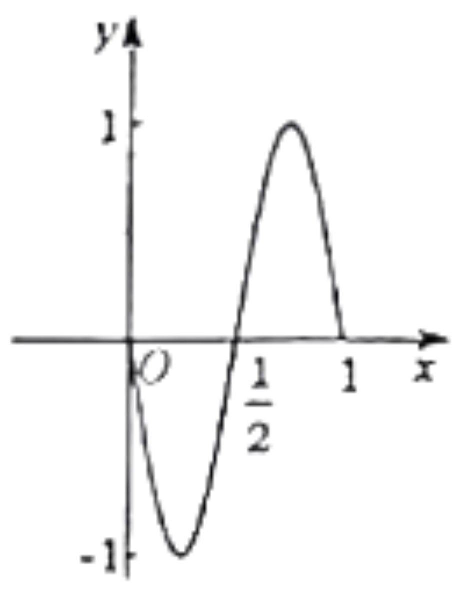


图 4

A．$y=f\left(2x-\frac{1}{2}\right)$　　B．$y=f\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$

C．$y=f\left(\frac{x}{2}-1\right)$　　D．$y=f(2x-1)$

8．设 $a\in(0,1)$，若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$　　B．$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$

C．$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$　　D．$\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．设 A、B 为两个互斥的事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$ ，则（　）

A．$P(AB)=0$

B．$P(AB)=P(A)P(B)$

C．$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

D．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

10．已知圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$，点 P 是直线 $l:x+y=0$ 上一动点，过点 P 作直线 PA、PB 分别与圆 C 相切于点 A、B，则（　）

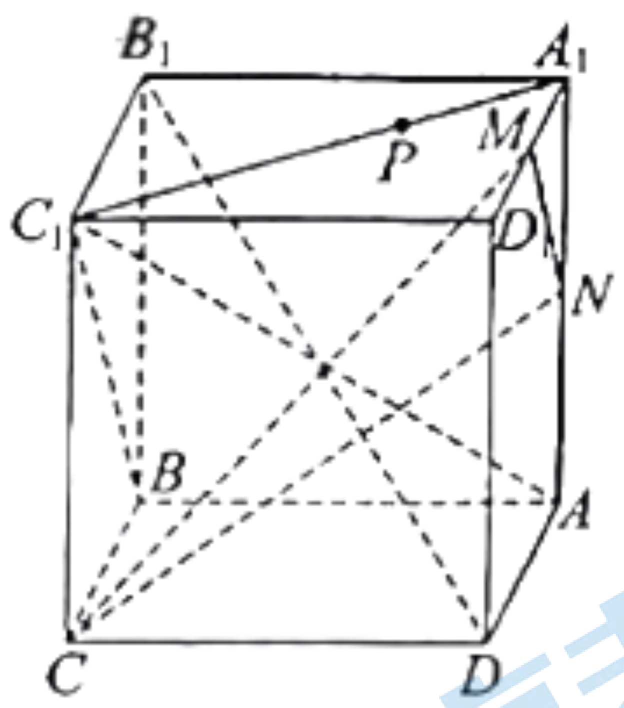
A．圆 C 上恰有一个点到 l 的距离为 $\frac{1}{2}$

B．直线 AB 恒过定点 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

C．$|AB|$ 的最小值是 $\sqrt{2}$

D．四边形 $ACBP$ 面积的最小值为 2

11．如图，在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BB_1=2BC=4$，M、N 分别为棱 A_1D_1、AA_1 的中点，则（　）



A．MN// 平面 ABC_1

B．$B_1D\perp$ 平面 CMN

C．异面直线 CN 和 AB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D．若 P 为线段 A_1C_1 上的动点，则点 P 到平面 CMN 的距离不是定值

12．已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，则（　）

A．2π 是 $f(x)$ 的一个周期

B．$f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点

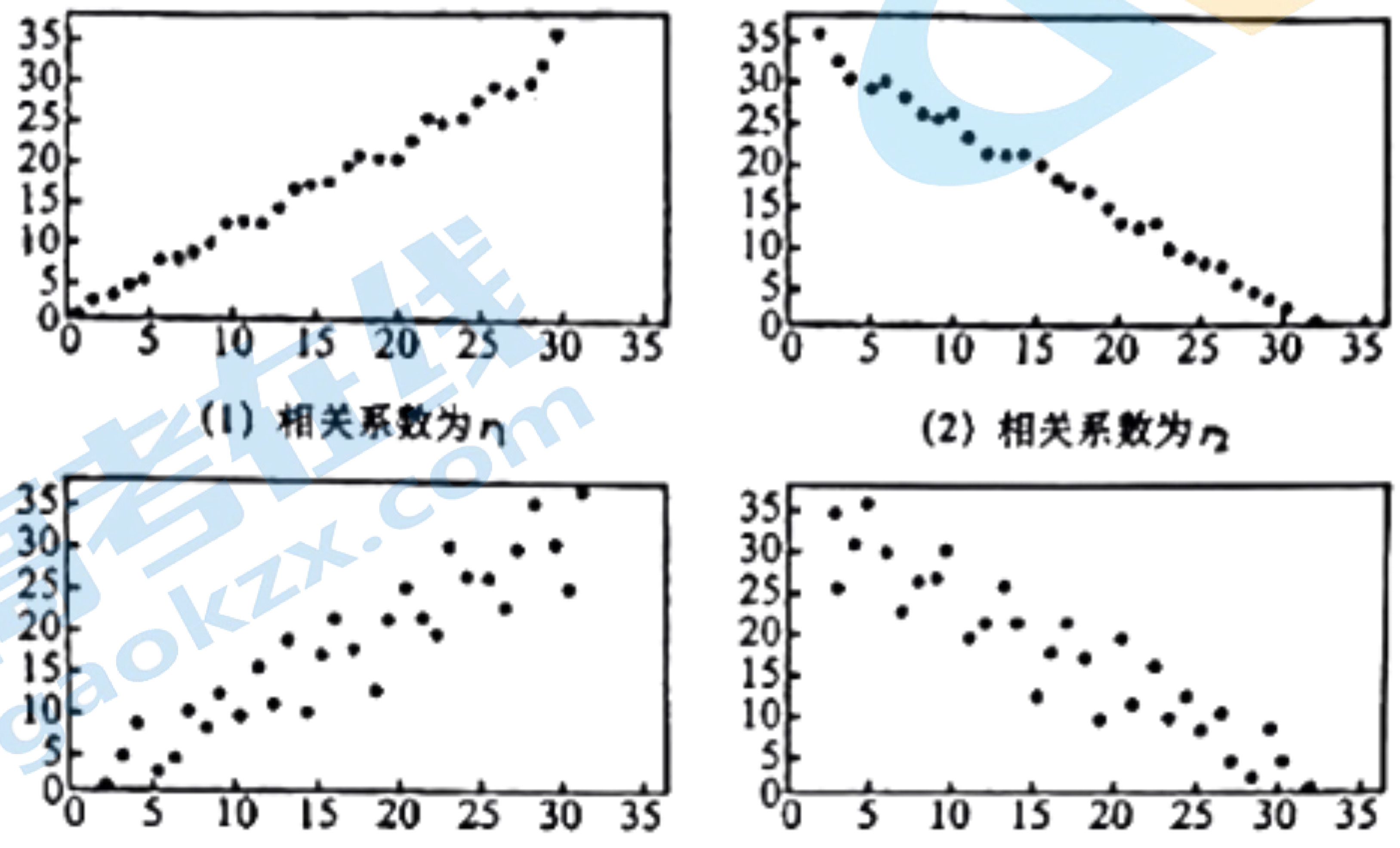
C．$f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D．$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

第Ⅱ卷 非选择题

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.

13．以下 4 幅散点图所对应的样本相关系数 r_1、r_2、r_3、r_4 的大小关系为________.



(1) 相关系数为 r_1　(2) 相关系数为 r_2

(3) 相关系数为 r_3　(4) 相关系数为 r_4

14．高中数学教材含必修类课本 2 册，选择性必修类课本 3 册，现从中选择 3 册，要求两类课本中各至少选一册，则不同的选法共有________种.（用数字作答）

15．如图 5，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=AB=BC=1$，$SA\perp AB$，$BC\perp AB$，若 $SC=2$，则直线 SA 与 BC 所成角的大小是________.

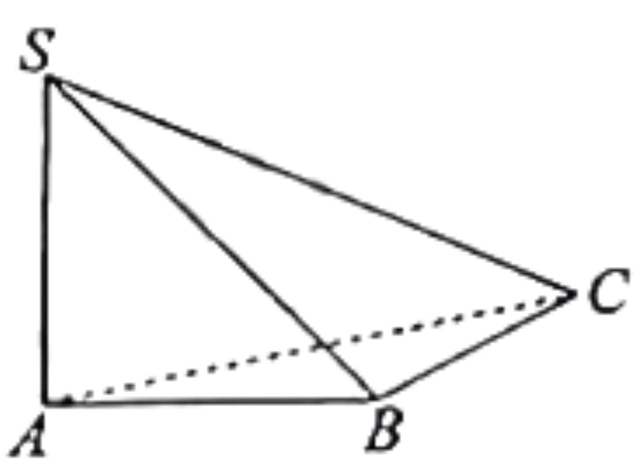


图 5

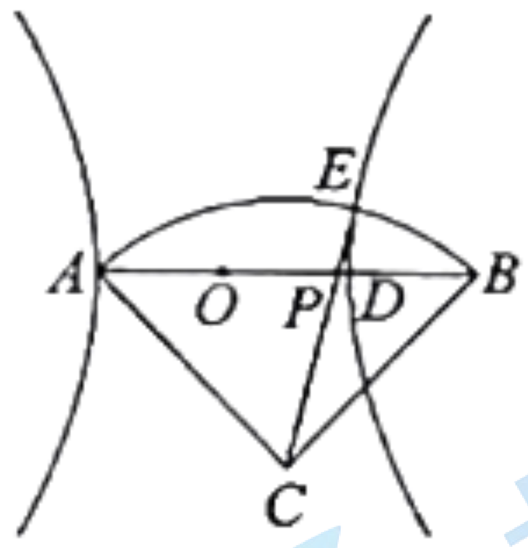


图 6

16．“三等分角”是三大尺规作图不能问题之一．现借助圆弧和双曲线给出一种三等分角的方法：如图 6，以角 C 的顶点为圆心作圆交角的两边于 A、B 两点；取线段 AB 的三等分点 O、D；以 B 为焦点，A、D 为顶点作双曲线 H．记双曲线 H 与弧 AB 的交点为 E，连接 CE，则 $\angle BCE=\frac{1}{3}\angle ACB$.

①双曲线 H 的离心率为________；

②若 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，$|AC|=3\sqrt{2}$，CE 交 AB 于点 P，则 $|OP|=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本小题满分 10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ （$a_n>0$，$n\in\mathbf{N}^*$）的前 n 项和，已知 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 $\sqrt{a_1}$ 的等差数列．

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

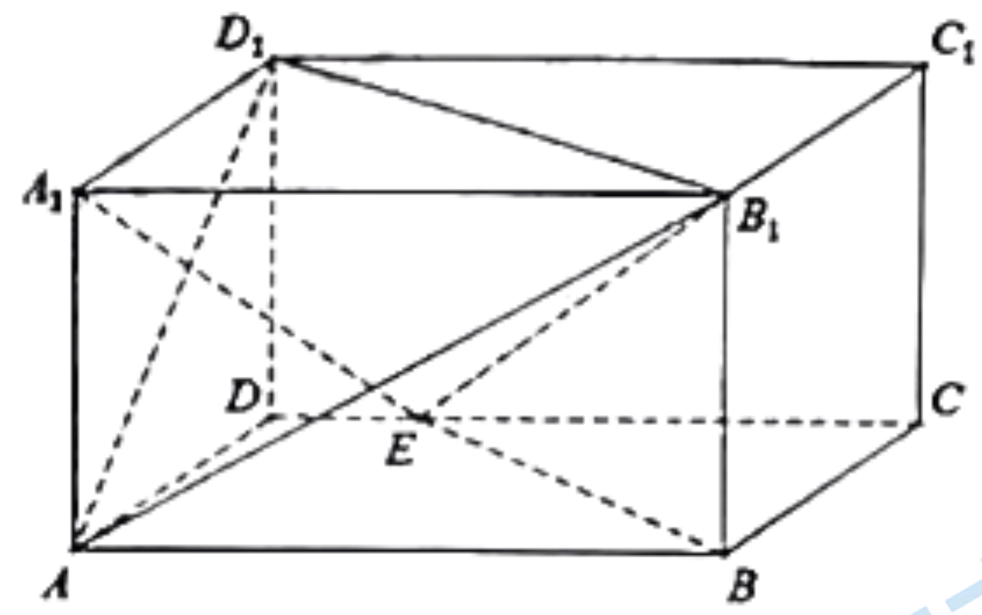
(2) 设 $a_1=1$，证明：$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$

18．(本小题满分 12 分)

如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=CC_1=1$．若在线段 CD 上存在点 E，使得 $A_1E\perp$ 平面 AB_1D_1．

(1) 求 DE 的长；

(2) 求平面 AB_1D_1 与平面 BB_1E 夹角的余弦值．



19．(本小题满分 12 分)

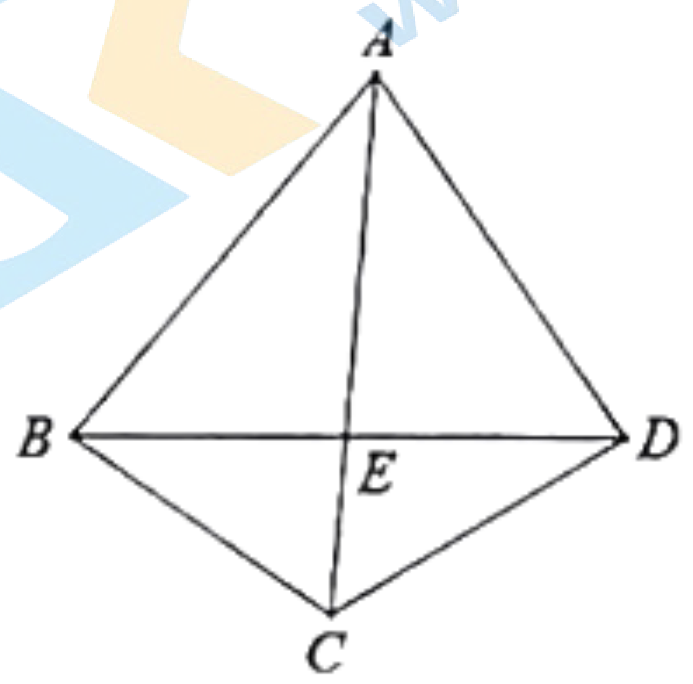
某种疾病的历史资料显示，这种疾病的自然痊愈率为 20%．为试验一种新药，在有关部门批准后，某医院把此药给 10 个病人服用，试验方案为：若这 10 个病人中至少有 5 人痊愈，则认为这种药有效，提高了治愈率；否则认为这种药无效．假设每个病人是否痊愈是相互独立的．

(1) 如果新药有效，把治愈率提高到了 80%，求经试验认定该药无效的概率 p；(精确到 0.001，参考数据：$1+C_{10}^{1}\times2^2+C_{10}^{2}\times2^4+C_{10}^{3}\times2^6+C_{10}^{4}\times2^8=62201$)

(2) 根据（1）中 p 值的大小解释试验方案是否合理．

20．(本小题满分 12 分)

在凸四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 交于点 E，且 $BE=ED$，$AE=2EC$，$AB=4$，$AD=2\sqrt{2}$．



(1) 若 $EC=1$，求 $\angle BAD$ 的余弦值；

(2) 若 $\angle ABD=\frac{\pi}{4}$，求边 BC 的长．

21．(本小题满分 12 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，上、下顶点分别为 A、B，$|AB|=4$．过点 $E(0,1)$，且斜率为 k 的直线 l 与 x 轴相交于点 G，与椭圆相交于 C、D 两点．

(1) 若 $|GC|=|DE|$，求 k 的值；

(2) 是否存在实数 k，使得直线 AC 平行于直线 BD？证明你的结论．

22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ae^x$，$a\in\mathbf{R}$．

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线过点 $(3,3)$，求函数 $y=xf(x)$ 的单调区间；

(2) 设 $g(x)=x^2$，且 $a>0$，若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 存在唯一的公切线，求实数 a 的值．