北京市第三十五中学 2023-2024 学年第一学期 期中测试

高三数学 2023.11

行政班__________教学班________姓名_________学号________

试卷说明：试卷分值 150 分 ，考试时间 120 分钟，考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

I 卷

一．选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分。每小题只有一个正确选项，**请选择正确答案填在机读卡相应的题号处**）

1． 已知集合 $P=\{x|\ x\geqslant 1, x\in N\}, Q=\left\{x|2^x\leqslant 8\right\}$,则 $P\cap Q=$

(A) $\{x|1\leqslant x<4\}$ (B) $\{x|1\leqslant x<3\}$ (C) $\{1,2\}$ (D) $\{1,2,3\}$

2． 下列函数中,既是奇函数又是增函数的为

(A) $y=x+1$ (B) $y=\dfrac{1}{x}$ (C) $y=x\cos x$ (D) $y=x|x|$

3． 已知复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则复数 z 的共轭复数的虚部为

(A) $-\mathrm{i}$ (B) i (C) -1 (D) 1

4． 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\dfrac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，则

(A) $a>b>c$ (B) $a>c>b$ (C) $c>a>b$ (D) $c>b>a$

5． 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB=2CD$, M 为 BC 的中点,则 $\overrightarrow{AM}=$

(A) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (B) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (C) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ (D) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

6． “$a=-1$”是“函数 $f(x)=|\sin x-a|$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上最大值为 2”的

(A)充分不必要条件 (B)必要不充分条件
(C)充要条件 (D)既不充分也不必要条件

7． 已知 $A(4,0)$，点 M 为曲线 $y=x^2$ 上一点，点 M 在 y 轴上的射影为 N，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16

8．把函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后,得到一个偶函数的图象,则 $\varphi=$

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2mx+m+m^2, x\leqslant 2,\\ 2^{x+1}, x>2,\end{cases}$ 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最小值, 则 m 的取值范围为

(A) $[-1,4]$　(B) $[2,4]$　(C) $[-1,2]$　(D) $[-1,1]$

10．十八世纪早期,英国数学家泰勒发现了公式 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$ $+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，(其中 $x\in\mathbf{R},n\in\mathrm{N}^*,n!=1\times2\times3\times\cdots\times n,0!=1$).

现用上述公式求 $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-2)!}+\cdots$ 的值,下列选项中与该值最接近的是

(A) $\sin30^\circ$　(B) $\sin33^\circ$　(C) $\sin36^\circ$　(D) $\sin39^\circ$

II 卷

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．函数 $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ 的定义域为 R，请写出满足题意的一个实数 a 的值_____.

12．二项式 $(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的常数项为_________.

13．已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且当 $x>y$ 时，$f(x)>f(y)$，请写出符合上述条件的一个函数 $f(x)=$________________.

14．已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$.

①若 $f(0)=1$，则 $\varphi=$_______；

②若 $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $f(x+2)-f(x)=4$ 成立，则 ω 的最小值是__________.

15. 已知函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，给出下列 4 个结论：

① 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$

② 存在正数 m，函数 $f(x)$ 在区间 $(m,+\infty)$ 上无零点

③ 函数 $f(x)$ 的周期为 $\frac{1}{2\pi}$

④ 对任意正数 m，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上有无穷多个零点

其中正确的结论序号有____________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\sin(x+\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}$（$0<\varphi<\pi$），$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅰ) 求 φ 的值；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内的所有零点之和.

17. （本小题 14 分）

某校举办知识竞赛，已知学生甲是否做对每个题目相互独立，做对 A,B,C 三道题目的概率以及做对时获得相应的奖金如表所示.

题目	A	B	C
做对的概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
获得的奖金/元	**32**	**64**	**128**

规则如下：按照 A,B,C 的顺序做题，只有做对当前题目才有资格做下一题.

[注：甲最终获得的奖金为答对的题目相对应的奖金总和.]

(Ⅰ) 求甲没有获得奖金的概率；

(Ⅱ) 求甲最终获得的奖金 X 的分布列及期望；

(Ⅲ) 如果改变做题的顺序，最终获得的奖金期望是否相同？

如果不同，你认为哪个顺序最终获得的奖金期望最大？（不需要具体计算过程，只需给出判断）

18. （本小题 13 分）

在 ΔABC 中，AD 为 BC 边上的中线，$AC=\sqrt{5}$，$\cos\angle DAC=\frac{3}{5}$.

从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 ΔABC 存在且唯一确定，并完成下面问题.

条件①：$\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$；　条件②：$\cos C=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　条件③：ΔADC 的面积为 2.

(Ⅰ) 求 AD 的长；

(Ⅱ) 求 AB 的长.

注：如果选择的条件不符合要求，本题得 **0** 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

19. （本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线为 l.

(Ⅰ) 求 l 的方程；

(Ⅱ) 判断曲线 $y=f(x)$ 与直线 l 的公共点个数，并证明；

(Ⅲ) 若 $a=0$，令 $p(x)=f'(x)$，求证：对任意的 $x_1,x_2,x_3\in[-1,1]$，都有 $p(x_1)+p(x_2)>p(x_3)$ 成立.

20. （本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x-a}{x+1}-\ln(x+1)$ （$a\in R$）.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 已知 m,n 是正整数，且 $1<m<n$，证明 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

21. （本小题 15 分）

在数字 $1,2,\cdots,n$ ($n\geqslant 2$) 的任意一个排列 **A**：a_1，a_2，$\cdots$，a_n 中，如果对于 $i,j\in\mathbf{N}^*$，$i<j$，有 $a_i>a_j$，那么就称 (a_i,a_j) 为一个逆序对. 记排列 **A** 中逆序对的个数为 $S(A)$. 如 $n=4$ 时，在排列 **B**：**3, 2, 4, 1** 中，逆序对有 $(3,2)$，$(3,1)$，$(2,1)$，$(4,1)$，则 $S(B)=4$.

（Ⅰ）设排列 C：a_1,a_2,a_3,a_4，写出两组具体的排列 C，分别满足：

①$S(C)=5$，　②$S(C)=4$；

（Ⅱ）对于数字 **1**，**2**，$\cdots$，$\boldsymbol{n}$ 的一切排列 **A**，求所有 $S(A)$ 的算术平均值；

（Ⅲ）如果把排列 **A**：a_1，a_2，$\cdots$，a_n 中两个数字 $a_i,a_j(i<j)$ 交换位置，而其余数字的位置保持不变，那么就得到一个新的排列 A'：b_1，b_2，$\cdots$，b_n，求证：$S(A)+S(A')$ 为奇数.

北京市第三十五中学2023-2024年度第一学期 期中试卷

高三数学　2023.11

参考答案：

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.

1．D　2．D　3．C　4．C　5．B　6．A　7．A　8．D　9．B　10．B

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11．$(-\infty,0]$　12．60　13．$\lg x$ 或 $\ln x$（答案不唯一）　14．① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{2}$　15．①②④

三、解答题共6小题，共85分.

16．（本小题13分）

解：(Ⅰ) 因为 $f(\frac{\pi}{2})=2\sin\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(Ⅱ) $f(x)=2\sin x\sin(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(\frac{1-\cos 2x}{2})+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

令 $f(x)=0$，即 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=0$，

得 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in Z$，即 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $x_1=\frac{\pi}{6},x_2=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内的所有零点之和为 $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

17．（本小题14分）

解：(Ⅰ) 甲没有获得奖金为事件 M，则 $P(M)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$；

(Ⅱ) 分别用 A,B,C 表示做对题目 A,B,C 的事件，则 A,B,C 相互独立.

由题意，X 的可能取值为0，32，96，224.

$P(X=0)=P(\overline{A})=\frac{1}{4}$；　$P(X=32)=P(A\overline{B})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$；

$P(X=96)=P(AB\overline{C})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$；　$P(X=224)=P(ABC)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$.

所以甲最终获得的奖金 X 的分布列为

X	0	32	96	224
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{32}$

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+32\times\frac{3}{8}+96\times\frac{9}{32}+224\times\frac{3}{32}=60$.

(Ⅲ) 不同，按照 A,B,C 的顺序获得奖金的期望最大.

18. （本小题 13 分）

解：选条件①：$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

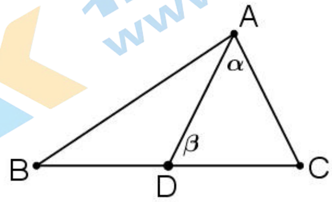
(Ⅰ)记 $\angle DAC=\alpha$，$\angle ADC=\beta$．

在 ΔADC 中，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\beta=\sin(\pi-\alpha-C)=\sin(\alpha+C)$

$=\sin\alpha\cos C+\cos\alpha\sin C\ \dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$



因为 $\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin\beta}$，所以 $AD=AC=\sqrt{5}$．

(Ⅱ) 在 ΔADC 中，$DC^2=AD^2+AC^2-2AD\times AC\times\cos\alpha=4$，所以 $DC=2$．

【或：$\dfrac{DC}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin C}$，所以 $DC=2$】　　所以 $BC=4$．

在 ABC 中，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos C=13$，

所以 $AB=\sqrt{13}$．

选条件③：ΔADC 的面积为 2

(Ⅰ) 记 $\angle DAC=\alpha$，$\angle ADC=\beta$．

在 ΔADC 中，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，

$S_{\Delta ADC}=\dfrac{1}{2}\times AD\times AC\times\sin\alpha=2$，

又因为 $AC=\sqrt{5}$，所以 $AD=\sqrt{5}$．

(Ⅱ) 在 ΔADC 中，$DC^2=AD^2+AC^2-2AD\times AC\times\cos\alpha=4$，所以 $DC=2$．

所以 $BC=4$．

法一：因为 $AC=AD=\sqrt{5}$，所以 $\beta=C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

$\cos\alpha=\cos(\pi-\beta-C)=-\cos 2C=\dfrac{3}{5}$，即 $1-2\cos^2 C=\dfrac{3}{5}$，解得 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

在 ABC 中，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos C=13$，

所以 $AB=\sqrt{13}$．

法二：取 CD 中点 E，因为 $AC=AD=\sqrt{5}$，所以 $AE\perp CD$．

可求得 $AE=2$，$AB^2=AE^2+BE^2=9+4=13$，所以 $AB=\sqrt{13}$．

19.（本小题 15 分）

(Ⅰ) $f'(x)=e^x-x-a$，$f'(0)=1-a$，$f(0)=1$，

所以切线方程为 $y-1=(1-a)x$，即 $y=(1-a)x+1$；

(Ⅱ)令 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax-(1-a)x-1=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，

$g'(x)=e^x-x-1$，令 $h(x)=g'(x)=e^x-x-1$，$h'(x)=e^x-1$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=0$，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$ ($g'(x)$)	↘		↗

所以 $h(x)\geq h(0)=0$，即 $g'(x)\geq 0$ 恒成立，$g(x)$ 为 R 上的增函数.

又 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 只有唯一零点 0，即曲线 $y=f(x)$ 与直线 l 的公共点个数为 **1** 个.

(Ⅲ)当 $a=0$ 时，函数 $p(x)=e^x-x$，由(Ⅱ)知，$p(x)$ 在 $(-1,0)$ 上减，在 $(0,1)$ 上增，

又 $p(-1)=1+\frac{1}{e},p(1)=e-1,p(0)=1$，

所以 $p(x)$ 的值域为 $[1,e-1]$，

对任意的 $x_1,x_2,x_3\in[-1,1]$，都有 $p(x_1)+p(x_2)\geq 1+1>e-1\geq p(x_3)$，

所以 $p(x_1)+p(x_2)>p(x_3)$.

20.（本小题 15 分）

解:(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a-x}{(x+1)^2}$，

①当 $a\leq -1$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，$f(x)$ 的减区间为 $(-1,+\infty)$，无增区间；

②当 $a>-1$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $-1<x<a$，令 $f'(x)<0$，解得 $x>a$，

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(-1,a)$，减区间为 $(a,+\infty)$.

综上，当 $a\leq -1$ 时，$f(x)$ 的减区间为 $(-1,+\infty)$，无增区间；

当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $(-1,a)$，减区间为 $(a,+\infty)$.

(Ⅱ) 两边同时取对数，证明不等式成立等价于证明 $n\ln(1+m)>m\ln(n+1)$，

即证明 $\frac{\ln(1+m)}{m}>\frac{\ln(1+n)}{n}$，

构造函数 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，$f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$，

令 $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)$，由(Ⅰ)知，当 $a=0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，故 $g(x)<g(0)=0$，

所以 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数，

因为 $1<m<n$，知 $f(m)>f(n)$，即 $\frac{\ln(1+m)}{m}>\frac{\ln(1+n)}{n}$，即 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

21．（本小题 15 分）

（Ⅰ）解：① $C:4,2,3,1$　② $C:2,4,3,1$；　…………………4 分

（Ⅱ）解：考察排列 D：d_1，d_2，$\cdots$，d_{n-1}，d_n 与排列 D_1：d_n，d_{n-1}，$\cdots$，d_2，d_1，

因为数对 (d_i,d_j) 与 (d_j,d_i) 中必有一个为逆序对（其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$），

且排列 $\boldsymbol{D}$ 中数对 (d_i,d_j) 共有 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个，　…………………5 分

所以 $S(D)+S(D_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$．　…………………6 分

所以排列 D 与 D_1 的逆序对的个数的算术平均值为 $\dfrac{n(n-1)}{4}$．　…………………7 分

而对于数字 1，2，$\cdots$，n 的任意一个排列 $\boldsymbol{A}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_n，都可以构造排列 $\boldsymbol{A_1}$：a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_2，a_1，

且这两个排列的逆序对的个数的算术平均值为 $\dfrac{n(n-1)}{4}$．

所以所有 $S(A)$ 的算术平均值为 $\dfrac{n(n-1)}{4}$．　…………………9 分

（Ⅲ）证明：① 当 $j=i+1$，即 a_i,a_j 相邻时，

不妨设 $a_i<a_{i+1}$，则排列 A' 为 a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，a_{i+1}，a_i，a_{i+2}，$\cdots$，a_n，

此时排列 A' 与排列 $\boldsymbol{A}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_n 相比，仅多了一个逆序对 (a_{i+1},a_i)，

所以 $S(A')=S(A)+1$，

所以 $S(A)+S(A')=2S(A)+1$ 为奇数．　…………………11 分

② 当 $j\neq i+1$，即 a_i,a_j 不相邻时，

假设 a_i,a_j 之间有 $\boldsymbol{m}$ 个数字，记排列 $\boldsymbol{A}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_i，k_1，k_2，$,\cdots k_m$，$a_j,\cdots$，a_n，

先将 a_i 向右移动一个位置，得到排列 $\boldsymbol{A_1}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，k_1，a_i，k_2，$,\cdots,k_m$，$a_j,\cdots$，a_n，

由①，知 $S(A_1)$ 与 $S(A)$ 的奇偶性不同，

再将 a_i 向右移动一个位置，得到排列 $\boldsymbol{A_2}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，k_1，k_2，a_i，$k_3,\cdots,k_m$，$a_j,\cdots$，a_n，

由①，知 $S(A_2)$ 与 $S(A_1)$ 的奇偶性不同，

以此类推，a_i 共向右移动 $\boldsymbol{m}$ 次，得到排列 $\boldsymbol{A_m}$：a_1，a_2，$\cdots,k_1$，$k_2,\cdots,k_m$，a_i，$a_j,\cdots$，a_n，

再将 a_j 向左移动一个位置，得到排列 $\boldsymbol{A_{m+1}}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，k_1，$\cdots,k_m,a_j$，$a_i,\cdots$，a_n，

以此类推，a_j 共向左移动 $\boldsymbol{m+1}$ 次，得到排列 $\boldsymbol{A_{2m+1}}$：a_1，a_2，$\cdots$，a_j，$k_1,\cdots$，k_m，$a_i,\cdots,a_n$，

即为排列 A'，

由①，可知仅有相邻两数的位置发生变化时，排列的逆序对个数的奇偶性发生变化，

而排列 $\boldsymbol{A}$ 经过 $2m+1$ 次的前后两数交换位置，可以得到排列 A'，

所以排列 $\boldsymbol{A}$ 与排列 A' 的逆序数的奇偶性不同，

所以 $S(A)+S(A')$ 为奇数．

综上，得 $S(A)+S(A')$ 为奇数．　…………………15 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！