

绵阳市高中 2021 级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BBCAD BACBC BC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 7

14. $\sqrt{5}$

15. $[-1, +\infty)$

16. 1

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 由 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列，则 $4S_2 = S_1 + 3S_3$ ，得 $3a_3 = a_2$ ，…………… 3 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{1}{3}$ ，…………… 4 分

由 $a_1 = 27$ ，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3^{4-n}$ ；…………… 6 分

(2) 令 $b_n = \log_3 a_n$ ，则 $b_n = \log_3 3^{4-n} = 4 - n$ ，…………… 8 分

$\therefore$ 当 $n \leq 4$ 时， $b_n \geq 0$ ，…………… 9 分

$\therefore$ 当 $n = 3$ 或 4 时， T_n 取得最大值： $T_3 = T_4 = 3 + 2 + 1 = 6$ 。…………… 12 分

18. 解：(1) $\because f(\frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{8} + \varphi) = 1$ ，

$\therefore \varphi + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ，而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，…………… 2 分

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{8}$ ，即 $f(x) = \tan(\frac{3}{8}x + \frac{\pi}{8})$ ，…………… 3 分

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为： $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{8\pi}{3}$ ；…………… 4 分

(2) 由题意， $g(x) = \tan(\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\lambda + \frac{\pi}{8})$ ，…………… 5 分

$\because -f(0) = -\tan \frac{\pi}{8} = \tan(-\frac{\pi}{8})$ ，

$\therefore$ 由 $g(\frac{\pi}{4}) = -f(0)$ ，得 $\tan(\frac{3\pi}{32} + \frac{3}{8}\lambda + \frac{\pi}{8}) = \tan(-\frac{\pi}{8})$ ，…………… 7 分

$\therefore \frac{3}{8}\lambda + \frac{7\pi}{32} = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，…………… 9 分

$\therefore \lambda = -\frac{11}{12}\pi + \frac{8k\pi}{3}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，又 $\lambda > 0$ ，…………… 10 分

$\therefore \lambda$ 的最小值为 $\frac{7\pi}{4}$12 分

19. 解: (1) $\because f(x) = (2x^2 + m)(x - m + 2) = 2x^3 - 2(m-2)x^2 + mx - m(m-2)$ 为奇函数,

$\therefore \begin{cases} -2(m-2) = 0 \\ -m(m-2) = 0 \end{cases}$, 解得: $m=2$ 5 分

(2) 当 $m > 0$ 时, $2x^2 + m > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = (2x^2 + m)(x - m + 2)$ 不可能有两个零点.6 分

当 $m < 0$ 时, 由 $f(x) = 0$, 解得: $x = \pm \sqrt{-\frac{m}{2}}$ 或 $m-2$,7 分

要使得 $f(x)$ 仅有两个零点, 则 $m-2 = -\sqrt{-\frac{m}{2}}$,8 分

即 $2m^2 - 7m + 8 = 0$, 此方程无解.

故 $m=0$, 即 $f(x) = 2x^3 + 4x^2$, 9 分

令 $h(x) = f(x) - 3 = 2x^3 + 4x^2 - 3$, 则 $h'(x) = 6x^2 + 8x = 2x(3x + 4)$,

$h'(x) > 0$, 解得: $x > 0$ 或 $x < -\frac{4}{3}$, $h'(x) < 0$ 解得: $-\frac{4}{3} < x < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{4}{3})$, $(0, +\infty)$ 上递增, 在 $(-\frac{4}{3}, 0)$ 上递减, 10 分

又 $h(-\frac{4}{3}) = -\frac{17}{27} < 0$,

故函数 $y = f(x) - 3$ 仅有一个零点.12 分

20. 解: (1) $\because \cos(C-B)\sin A = \cos(C-A)\sin B$

$\therefore (\cos C \cos B + \sin C \sin B) \sin A = (\cos C \cos A + \sin C \sin A) \sin B$ 2 分

$\therefore \cos C \cos B \sin A = \cos C \cos A \sin B$ 3 分

又 $\because \triangle ABC$ 为斜三角形, 则 $\cos C \neq 0$,

$\therefore \cos B \sin A = \cos A \sin B$,5 分

$\therefore \sin(A-B) = 0$, 又 A, B 为 $\triangle ABC$ 的内角,

$\therefore A=B$; 6 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 (1) 知, $a=b$,

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 则 $\frac{1}{b} = \frac{\sin C}{c \sin B}$, 7 分

又 $\frac{1}{c} = \sin B$, 即 $c \sin B = 1$,

$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \sin C = \sin(A+B) = \sin 2B$,

$\therefore \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = \sin^2 B - \sin^2 2B$, 9 分

$\therefore \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = \sin^2 B - \sin^2 2B = \sin^2 B - 4\cos^2 B \sin^2 B = \sin^2 B - 4(1 - \sin^2 B)\sin^2 B$, 10 分

令 $\sin^2 B = t$, 令 $f(t) = t - 4(1-t)t = 4t^2 - 3t$, 11 分

又因为 $0 < \sin^2 B < 1$, 即 $0 < t < 1$,

$\therefore$ 当 $t = \frac{3}{8}$ 时, $f(t)$ 取最小值, 且 $f(t)_{\min} = -\frac{9}{16}$,

综上所述: $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$ 的最小值为 $-\frac{9}{16}$ 12 分

21. 解: (1) 方法一: $f'(x) = e^{x-1} - x^2 + ax - a$, 1 分

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f'(x) \geq 0$ 恒成立,

故: 当 $x > 1$ 时, $a \geq \frac{x^2 - e^{x-1}}{x-1}$ 恒成立. 3 分

设 $g(x) = \frac{x^2 - e^{x-1}}{x-1} (x > 1)$, 则 $a \geq g_{\max}(x)$,

则 $g'(x) = \frac{-(x-2)(e^{x-1} - x)}{(x-1)^2}$,

易知 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x-1} \geq x$,

故令 $g'(x) > 0$ 得到: $1 < x < 2$; 令 $g'(x) < 0$ 得到: $x > 2$.

$\therefore g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上递减; 在 $(1, 2)$ 上递增. 5 分

故: 当 $x > 1$ 时, $g_{\max}(x) = g(2) = 4 - e$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围: $a \geq 4 - e$ 6 分

方法二: $f'(x) = e^{x-1} - x^2 + ax - a$,

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) \geq 0$ 恒成立,

等价于: $\frac{x^2 - ax + a}{e^{x-1}} - 1 \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 2 分

设 $g(x) = \frac{x^2 - ax + a}{e^{x-1}} - 1 (x > 1)$, 则 $g_{\max}(x) \leq 0$,

$$g'(x) = \frac{-(x-a)(x-2)}{e^{x-1}},$$

当 $a = 2$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递减, $g_{\max}(x) = g(1) = 0$, 符合题意. 3 分

当 $a > 2$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上递减, 在 $(2, a)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减,

因为 $g(1) = 0$,

故只需满足 $g(a) = \frac{a}{e^{a-1}} - 1 \leq 0$ (由 $e^x \geq x + 1$ 易得), 符合题意. 4 分

当 $1 < a < 2$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(1, a)$ 上递减, 在 $(a, 2)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减,

因为 $g(1) = 0$, 故只需满足 $g(2) = \frac{4-a}{e} - 1 \leq 0$, 即 $4 - e \leq a < 2$,

当 $a \leq 1$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减, 5 分

$g_{\max}(x) = g(2) = \frac{4-a}{e} - 1 > 0$, 不符合题意.

综上: 实数 a 的取值范围: $a \geq 4 - e$ 6 分

(2) $f(x)$ 的极值点个数等价于 $f'(x)$ 的变号零点个数,

令 $g(x) = \frac{x^2 - ax + a}{e^{x-1}} - 1$, 则等价于 $g(x)$ 的变号零点个数, 7 分

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -1$,

由 (1) 可知 $g'(x) = \frac{-(x-a)(x-2)}{e^{x-1}}$, $g(1) = 0$,

当 $a = 2$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减, 故 $g(x)$ 有唯一变号零点 1; 8 分

当 $a > 2$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上递减, 在 $(2, a)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减,

因为 $g(2) < g(1) = 0$, $g(a) = \frac{a}{e^{a-1}} - 1 \leq 0$, 故 $g(x)$ 有唯一变号零点 1;

当 $a < 2$ 且 $a \neq 1$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上递减, 在 $(a, 2)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减,

$$g(a) = \frac{a}{e^{a-1}} - 1 < 0, \quad g(2) = \frac{4-a}{e} - 1,$$

若 $g(2) \leq 0$, 即 $4 - e \leq a < 2$ 时, 有唯一变号零点 1; 9 分

若 $g(2) > 0$, 即 $a < 4 - e$ 且 $a \neq 1$ 时, $g(x)$ 有三个变号零点 1, x_2 , x_3 ,

且 $1 < x_2 < 2 < x_3$ 。

当 $a = 1$ 时, 易知 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递减,

在 $(1, 2)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减, 11 分

由于 $g(1) = 0$, $g(2) = \frac{3}{e} - 1 > 0$, $g(x)$ 有唯一变号零点 x_0 , 且 $x_0 > 2$ 。

综上: 当 $a < 4 - e$ 且 $a \neq 1$ 时, $f(x)$ 有三个极值点;

当 $a = 1$ 或 $a \geq 4 - e$ 时, $f(x)$ 有唯一极值点。..... 12 分

22. 解: (1) 曲线 C_1 的参数方程为 $C_1: \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \text{ ①} \\ y = t - \frac{1}{t} \text{ ②} \end{cases} (t \text{ 为参数}),$

由 ①² - ②² 得 C_1 的普通方程为: $x^2 - y^2 = 4$; 2 分

曲线 C_2 的参数方程为 $C_2: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}),$

所以 C_2 的普通方程为: $(x-2)^2 + y^2 = 4$; 4 分

(2) 曲线 C_1 的极坐标方程为: $\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 4 \quad (\theta \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}),$ 5 分

$\therefore \rho^2 = \frac{4}{\cos 2\theta},$ 6 分

由 $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho^2 = \frac{4}{\cos 2\theta} \end{cases}$ 得: $\rho_A = 2\sqrt{2},$

$\therefore$ 射线: $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho > 0)$ 与曲线 C_1 交于 $A(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}),$ 7 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 4\rho \cos \theta = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos \theta,$

$$\text{由} \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6}, \\ \rho = 4 \cos \theta, \end{cases} \text{得: } \rho_B = 2\sqrt{3},$$

∴射线: $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho > 0)$ 与曲线 C_2 交于 $B(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$, 9 分

$$\text{则 } S_{\triangle PAB} = S_{\triangle POB} - S_{\triangle POA} = \frac{1}{2} \times |OP| \times (\rho_B - \rho_A) \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \text{ 10 分}$$

$$23. \text{解: (1) } f(x) = |3x+3| - |x-5| = \begin{cases} 2x+8, & x \geq 5, \\ 4x-2, & -1 < x < 5, \\ -2x-8, & x \leq -1, \end{cases} \text{ 1 分}$$

$$\therefore f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 2x+8 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -1 < x < 5 \\ 4x-2 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \leq -1 \\ -2x-8 > 0 \end{cases}, \text{ 2 分}$$

$$\text{解得 } x \geq 5 \text{ 或 } \frac{1}{2} < x < 5 \text{ 或 } x < -4, \text{ 4 分}$$

$$\therefore \text{不等式的解集为 } (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, +\infty); \text{ 5 分}$$

$$(2) \text{证明: 由 } f(x) = \begin{cases} 2x+8, & x \geq 5 \\ 4x-2, & -1 < x < 5 \\ -2x-8, & x \leq -1 \end{cases} \text{ 可得 } f(x) \text{ 的最小值为 } -6, \text{ 6 分}$$

$$\text{则 } m = -6, \quad a+b+c = 6,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{1}{12} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(3 + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{c+a} \right) \text{ 7 分} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{12} (3 + 2\sqrt{\frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{b+c}} + 2\sqrt{\frac{c+a}{a+b} \cdot \frac{a+b}{c+a}} + 2\sqrt{\frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a}}) \text{ 8 分}$$

$$= \frac{1}{12} (3 + 2 + 2 + 2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \text{ 当且仅当 } a=b=c=2 \text{ 时, 等号成立, 9 分}$$

$$\therefore \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{4}. \text{ 10 分}$$