

2019 北京中关村中学高一（上）期中

数 学

卷 (I)

一. 选择题: (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 集合 $M = \{1, 2, 3\}$, 则下列关系正确的是 ()

- A. $1 \in M$ B. $1 \notin M$ C. $1 \subseteq M$ D. $1 \subsetneq M$

2. 已知 $a > b > 0, c > d$, 下列不等式中恒成立的一个是 ()

- A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ B. $ad > bc$ C. $a+c > b+d$ D. $a-c > b-d$

3. 下列函数中与 $y = x$ 具有相同图象的一个函数是 ()

- A. $y = (\sqrt{x})^2$ B. $y = \sqrt{x^2}$ C. $y = \frac{x^2}{x}$ D. $y = \sqrt[3]{x^3}$

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $[2, +\infty)$

5. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的是 ()

- A. $y = x + 1$ B. $y = x^3$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = |x|$

6. 已知命题: $p: \exists x_0 > 0, x_0^2 - x_0 - 1 < 0$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\neg p: \exists x > 0, x^2 - x - 1 \geq 0$ B. $\neg p: \exists x \leq 0, x^2 - x - 1 \geq 0$
C. $\neg p: \forall x > 0, x^2 - x - 1 \geq 0$ D. $\neg p: \exists x \leq 0, x^2 - x - 1 \geq 0$

7. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (x \in \mathbb{R})$ 的最小值为 $f(0)$, 则 $f(-\sqrt{2}), f(\frac{3}{2}), f(\sqrt{3})$ 大小关系是 ()

- A. $f(-\sqrt{2}) < f(\frac{3}{2}) < f(\sqrt{3})$ B. $f(\frac{3}{2}) < f(-\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$
C. $f(\sqrt{3}) < f(-\sqrt{2}) < f(\frac{3}{2})$ D. $f(-\sqrt{2}) < f(\sqrt{3}) < f(\frac{3}{2})$

8. “ $a = -1$ ” 是 “函数 $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ 只有一个零点” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 某公司购买一批机器投入生产, 据市场分析每台机器生产的产品可获得的总利润 y (万元) 与机器运转时间 x (年数: $x \in \mathbb{N}^*$) 的关系为 $y = -x^2 + 18x - 25$, 则取得年平均利润最大值时 x 的值是 ()

- A. 9 B. 8 C. 6 D. 5

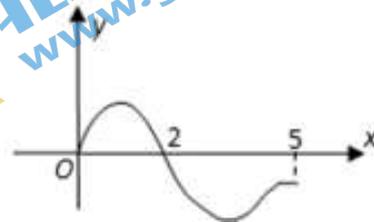
10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ -ax, & x \geq 1 \end{cases}$, 若对任意实数 $x_1, x_2 \in R$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) - f(x_2) > 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{8}, \frac{1}{3})$ B. $(0, \frac{1}{3})$ C. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{3})$ D. $(-\infty, \frac{1}{3}]$

二. 填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

11. 设 $A = \{x \in R / |x - 2| < 3\}$, 则 $A =$ _____.

12. 定义在 $[-6, 6]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 若当 $x \in [0, 6]$ 时, $f(x)$ 的图象如下图, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解是_____.



13. “若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在定义域内均为增函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 是增函数” 为假命题, 例如 $f(x) =$ _____ 且 $g(x) =$ _____ 时, $f(x) \cdot g(x)$ 不是增函数.

14. 已知函数 $f(x), g(x)$ 分别由下表给出: 则 $f[g(1)]$ 的值为_____; 满足 $f[g(x)] > g[f(x)]$ 的 x 的值为_____.

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	2

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

三. 解答题 (本大题共 3 道小题, 每小题 10 分, 共 30 分)

15. 已知全集 $U = R$, $A = \{x / x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$, $B = \{x / \frac{x-1}{x-3} > 0\}$, 求 $A, B, A \cup B, (C_U A) \cap B$.

16. 已知函数 $f(x) = x|x| - 2x, x \in [-3, 3]$, 回答下列问题.

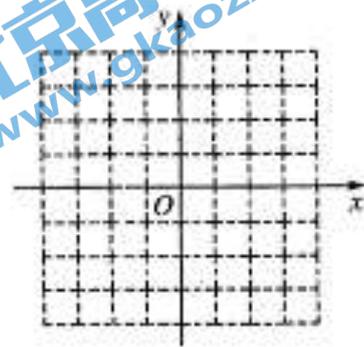
(1) 值域: _____, 零点: _____.

(2) 奇偶性: _____.

(3) 单调减区间 _____, 单调增区间 _____.

(4) 画出 $f(x)$ 的草图 (直接画在答题纸相应处, 尽量规范精准). 并结合图像写出 $f(x) = m$ 有三个不同实根时,

实数 m 的取值范围是_____.



17. 设函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x \in R)$

(1) 利用单调性定义证明: $f(x)$ 在区间 $(0, 2]$ 上是单调递减函数;

(2) 当 $a > 1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上的最大值.

一. 填空题: (本大题共 6 道小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

18. 下列不等式: ① $0 < x < 2$; ② $x < 1$; ③ $-2 < x < 0$; ④ $-2 < x < 2$; ⑤ $-1 < x < 1$.

其中可以作为“ $x^2 < 4$ ”的一个充分不必要条件的所有序号是_____.

19. 已知 $A = \{x/x^2 + px + 1 = 0, x \in R\}$, 若 $A \subseteq R^+$, 则实数 p 的取值范围是_____.

20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & -2 \leq x \leq c \\ \frac{1}{x}, & c < x \leq 3 \end{cases}$ 若 $c = 0$, 则 $f(x)$ 的值域是_____, 若 $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{1}{4}, 2]$, 则实数 c

的取值范围是_____.

21. 关于函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{|x-1| - 1}$ 的性质描述: 所有正确的序号是_____.

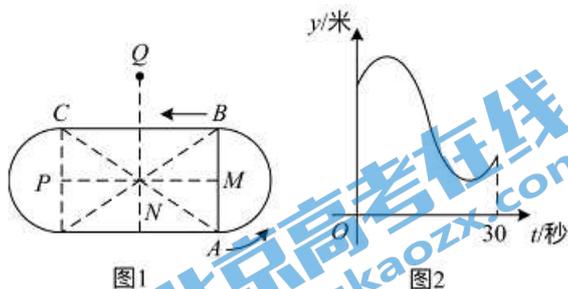
① 函数 $f(x)$ 过点 $(-1, 0)$, $(1, 0)$; ② 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$;

③ 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$; ④ 函数 $f(x)$ 的定义域上是增函数;

⑤ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称.

22. 小明在如图 1 所示的场地上匀速跑步, 他从点 A 出发, 沿箭头所示方向经过点 B 跑到点 C , 共用时 30(s). 他的教练选择了一个固定的位置观察小明的跑步过程. 设小明跑步的时间为 t (s), 他与教练的距离为 y (m), 表示 y 与 t 的函数关系的图象大致如图 2 所示, 则这个固定位置可能是图 1 中的点_____ (点

M, N, P, Q)



23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$, 函数 $g(x) = ax^2 - x + 1$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 2 个不同的零点,

则实数 a 的取值范围是_____.

二. 解答题: (本大题共 3 道小题, 共 30 分. 解答题应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

24. 解关于 x 的不等式 $x^2 + (m-1)x - m \geq 0$.

25. 已知二次函数 $f(x)$ 的最小值为1, 且 $f(0) = f(2) = 3$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $[2a, a+1]$ 上不单调, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 在区间 $[-\frac{1}{2}, 2]$ 上, 函数 $f(x)$ 的图象恒在函数 $y = 4mx + 1$ 的图象上方, 求实数 m 的取值范围.

26. 已知 M 是满足下列性质的所有函数 $f(x)$ 组成的集合: 对任何 $x_1, x_2 \in D_f$ (其中 D_f 为函数 $f(x)$ 的定义域), 均有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ 成立.

- (1) 已知函数 $f(x) = x^2 + 1, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 判断 $f(x)$ 与集合 M 的关系, 并说明理由;
- (2) 是否存在实数 a , 使得 $p(x) = \frac{a}{x+2}, x \in [-1, +\infty)$ 属于集合 M ? 若存在, 求 a 的取值范围, 若不存在, 请说明理由.
- (3) 对于实数 $a, b(a < b)$, 用 $M_{[a, b]}$ 表示集合 M 中定义域为区间 $[a, b]$ 的函数的集合.

定义: 已知 $h(x)$ 定义在 $[p, q]$ 上的函数, 如果存在常数 $T > 0$, 对区间 $[p, q]$ 的任意划分:

$p = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = q$ 和式 $\sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| \leq T$ 恒成立, 则称 $h(x)$ 为 $[p, q]$ 上的“绝对差有界函数”, 其中常数 T 称为 $h(x)$ 的“绝对差上界”, T 的最小值称为 $h(x)$ 的“绝对差上确界”, 符号

$\sum_{i=1}^n t_i = t_1 + t_2 + \dots + t_n$; 求证: 集合 $M_{[-1010, 1009]}$ 中的函数 $h(x)$ 是“绝对差有界函数”, 并求 $h(x)$ 的“绝对差上确界”.