天一大联考
2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(五)

文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　$B=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,所以$\complement_{\mathbf{R}}B=(-1,3)$,所以$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=[1,3)$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查复数的运算和几何意义.

解析　$z=-\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(\mathrm{i}-1)}{2}=-2+\mathrm{i}$,对应的点为$(-2,1)$,位于第二象限.

3. 答案　A

命题意图　本题考查函数的奇偶性.

解析　因为函数$f(x)=x^3-x$为奇函数,所以$f(x-1)$的图象关于$(1,0)$对称,又因为$y=\sin\pi x$的图象也关于$(1,0)$对称,所以$f(x-1)+\sin\pi x$的图象关于$(1,0)$对称.

4. 答案　C

命题意图　本题考查频率与概率的概念.

解析　根据统计表,误差范围在$[-12,12)$内的频率为 0.8,所以$m=12$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的性质.

解析　根据题意$y=2\cos x\to y=2\cos 2x\to y=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,即$f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,由$2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,可得$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,令$k=-1$,得$x=-\dfrac{5\pi}{12}$.

6. 答案　A

命题意图　本题考查对数函数的性质.

解析　因为$\ln 10>1$,所以$a>b,a>c=\dfrac{1}{2}\ln 10$. $b-c=\sqrt{\ln 10}-\dfrac{1}{2}\ln 10=\sqrt{\ln 10}\left(1-\dfrac{1}{2}\sqrt{\ln 10}\right)$,因为$2<\ln 10<3,0.5<\dfrac{1}{2}\sqrt{\ln 10}<1$,所以$b>c$,所以$a>b>c$.

7. 答案　A

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　每层瓷砖的数目从里到外分别是 1,3,5,7,9,…,构成一个等差数列,共 10 层,最外面一层为浅色,其中深色瓷砖的数目构成一个首项为 1,公差为 4 的等差数列,共 5 层,所以深色瓷砖有$1+5+9+13+17=45$块,所以浅色瓷砖有 55 块,故深色瓷砖比浅色瓷砖少 10 块.

8. 答案　B

命题意图　本题考查导数与函数图象.

解析　设切点坐标为(x_0,y_0),则切线方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$,将$(a,1)$代入可得$a=2x_0-x_0\ln x_0$,设$h(x)=2x-x\ln x$,则$h'(x)=1-\ln x$,当$x\in(0,\mathrm{e})$时,$h'(x)>0$,当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$h'(x)<0$,所以$h(x)_{\max}=\mathrm{e}$,

又当 $x \to 0$ 时，$h(x) \to 0$，$h(e^3) < 0$，所以 $y = a$ 与 $h(x)$ 的图象有两个不同的交点时，$a \in (0, e)$.

9. **答案** C

命题意图 本题考查古典概型的概率计算.

解析 甲 5 天一个循环，乙 3 天一个循环，按照次序列举甲、乙前 15 天的作息状态（○表示工作、×表示休息）：

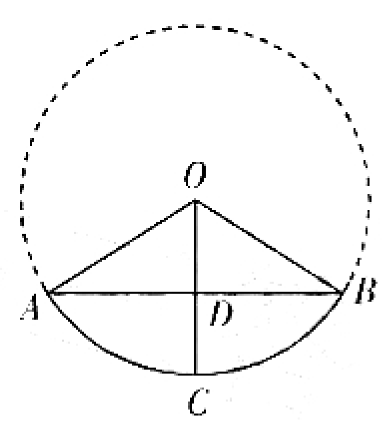
甲	×	○	○	○	○	×	○	○	○	○	×	○	○	○	○
乙	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○

从表中可知，前 15 天内甲、乙都在工作的有 8 天，因为 120 是 15 的整数倍，故在整个学期内，甲、乙在同一天工作的概率为 $\frac{8}{15}$.

10. **答案** D

命题意图 本题考查空间几何体的结构特征.

解析 根据题意，圆台下底面的直径为 $60 - 2 \times \frac{25\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 10$，如图所示，则 $AB = 10$，由条件可知 $\angle AOB = 120^\circ$，所以小球的半径为 $OA = OB = OC = \frac{10}{\sqrt{3}}$，且 $OD = CD = \frac{1}{2}OC = \frac{5}{\sqrt{3}}$，所以所求的球冠的面积为 $S = 2\pi Rh = 2\pi \times \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{100}{3}\pi$.



11. **答案** A

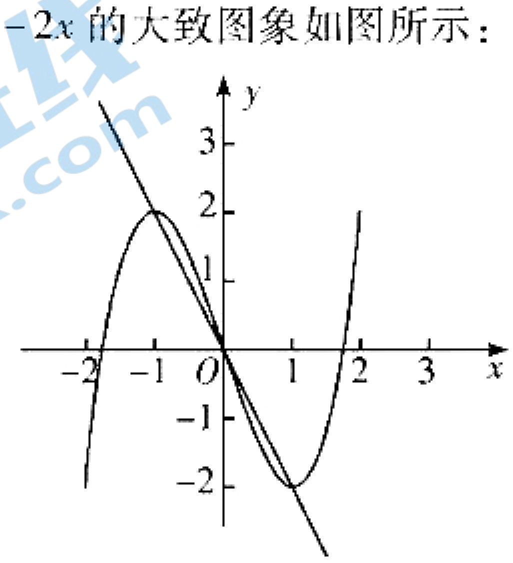
命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 设双曲线的半焦距为 $c(c > 0)$，$\triangle MF_1F_2$ 的内切圆圆心为 (m, n)，则半径为 $|n|$，由题意 $|MF_1| - |MF_2| = (c + m) - (c - m) = 8$，所以 $m = 4$，所以内切圆方程为 $(x - 4)^2 + (y - n)^2 = n^2$，以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 25$，两式相减可得相交弦所在直线的方程为 $8x + 2ny - 41 = 0$，所以 $n = 1$，故 $\triangle F_1MF_2$ 的内切圆的半径为 1.

12. **答案** D

命题意图 本题考查分段函数的性质.

解析 根据题意，函数 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -2x$ 的大致图象如图所示：



若 $f(x)$ 无最大值，由图象可知 $-2a > 2$，即 $a < -1$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 1

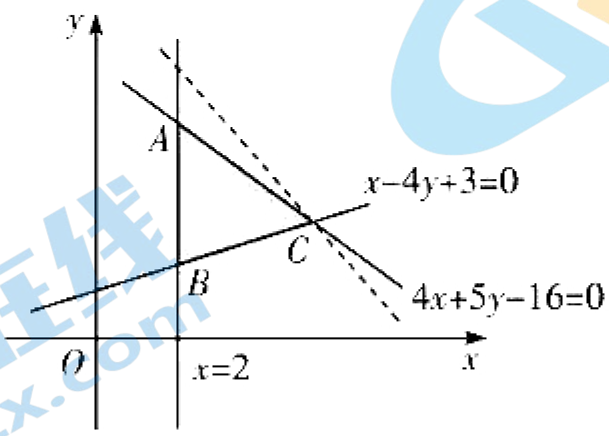
命题意图　本题考查平面向量的坐标运算.

解析　由题意得 $-m+m^2=0$,解得 $m=0$ 或 1,因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,所以 $m=1$.

14. 答案　$\frac{11}{3}$

命题意图　本题考查简单的线性规划.

解析　由约束条件作出可行域如图,联立方程组解得 $A\left(2,\frac{8}{5}\right)$,$B\left(2,\frac{5}{4}\right)$,$C\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$,设直线 $l:y=-x+z$,当直线 l 经过 C 点时,z 值最大,最大值为 $\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$.



15. 答案　$\frac{4}{3}$

命题意图　本题考查数列的递推关系.

解析　当 n 为偶数时,$a_{n-1}=n-1$,$a_n=2^{1+a_{n-1}}=2^n$,$\frac{a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{2^{n+2}}{(n+1)\cdot 2^n}\leqslant\frac{4}{3}$;当 n 为奇数时,$a_n=n$,$a_{n+1}=2^{1+a_n}=2^{1+n}$,$\frac{a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{n+2}{n\cdot 2^{n+1}}\leqslant\frac{3}{4}$. 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_na_{n+1}}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

16. 答案　$\frac{\sqrt{5}}{5}$

命题意图　本题考查空间几何体的结构特征.

解析　由题意知 $A_1C\perp BP$,$A_1B_1\perp BP$,则 $BP\perp$ 平面 A_1B_1C,故 $BP\perp B_1C$. 在棱 CC_1 上取一点 E,满足 $CE=\frac{1}{4}CC_1$,易得 $BE\perp B_1C$,则 P 点轨迹为线段 BE,且 $BE=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 因为点 P 到 CD 的距离即为点 P 到 C 的距离,最小距离为 C 点到 BE 的距离,由平面几何的知识可得 C 点到 BE 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查正弦定理、余弦定理的应用.

解析　(Ⅰ)由题设及正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin\frac{B+C}{2}=\sin A\sin B$,

因为 $\sin B\neq 0$,所以 $\sqrt{3}\sin\frac{B+C}{2}=\sin A$. ………………………………（2 分）

由 $A+B+C=180°$,可得 $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$, ………………………………（3 分）

故 $\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. ………………………………（4 分）

因为 $\cos\frac{A}{2}\neq 0$,故 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………………（5 分）

因此 $A=120°$. ………………………………（6 分）

(Ⅱ)因为 $BD^2=c^2+\frac{1}{4}b^2-2\times\frac{1}{2}bc\cos 120°$, ………………………………（7 分）

又因为 $BD=AC$，

所以 $b^2=c^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}bc$，即 $3b^2-2bc-4c^2=0$．…………（8 分）

解之得 $\frac{b}{c}=\frac{1+\sqrt{13}}{3}$ 或 $\frac{1-\sqrt{13}}{3}$（舍去）．…………（9 分）

因为 AE 为 $\angle BAC$ 的角平分线，所以 $\frac{b}{c}=\frac{CE}{BE}$，…………（11 分）

所以 $\frac{CE}{BE}=\frac{1+\sqrt{13}}{3}$．…………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查概率的意义以及线性回归分析的应用．

解析 （Ⅰ）由题意 $6\times20\%+5\times50\%+4\times30\%=4.9$，

因此估计这批西红柿的批发单价的平均值为 4.9 元/kg．…………（5 分）

（Ⅱ）由表知，$\bar{x}=\frac{1}{5}(5+6+7+8+9)=7$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times565=113$，…………（7 分）

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{3\ 765-5\times7\times113}{255-5\times7^2}=-19$，…………（9 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=113-(-19)\times7=246$，…………（10 分）

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-19x+246$．…………（11 分）

当 $x=12$ 时，$\hat{y}=-19\times12+246=18$（kg），

即当西红柿单价为 12 元/kg 时，预测该超市西红柿的日销量为 18 kg．…………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查空间位置关系的证明，以及空间中的有关计算．

解析 （Ⅰ）$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，$BC\perp AB$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABE=AB$，

$\therefore BC\perp$ 平面 ABE，…………（1 分）

又 $\because AE\subset$ 平面 ABE，$\therefore BC\perp AE$．…………（2 分）

在 $\triangle ABE$ 中，根据勾股定理可得 $AE\perp BE$，又 $BC\cap BE=B$，

$\therefore AE\perp$ 平面 BCE，即 $AE\perp BF$，…………（4 分）

在 $\triangle BCE$ 中，$BE=CB$，F 为 CE 的中点，$\therefore BF\perp CE$，

又 $\because AE\cap CE=E$，$\therefore BF\perp$ 平面 ACE．…………（6 分）

（Ⅱ）根据题意，$CE=4\sqrt{2}$，$\because AE\perp$ 平面 BCE，$\therefore AE\perp CE$，…………（7 分）

$\therefore S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times3\times4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，…………（8 分）

$\therefore V_{P-ACE}=\frac{1}{3}\times\frac{8\sqrt{2}}{5}\times6\sqrt{2}=\frac{32}{5}$．…………（9 分）

$\because V_{P-ACE}=V_{C-AEP}$，

$\therefore V_{C-AEP}=\frac{1}{3}\times4\times\frac{1}{2}\times3\cdot AP\sin\angle BAE=\frac{8}{5}AP=\frac{32}{5}$，…………（11 分）

$\therefore AP=4$．…………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查椭圆与直线的位置关系．

解析 （Ⅰ）设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$．根据题意，$a=2$，因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$b=1$，…………（2 分）

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．…………（3 分）

当 $m=0$ 时，$l:x=1$，代入 C 的方程可得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $|MN|=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4},\\ y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4},\end{cases}$ ……………………………………（6 分）

因为 $k_{AN}=\frac{y_2}{x_2+2}$，$k_{BM}=\frac{y_1}{x_1-2}$，所以直线 AN 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

直线 BM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$. ……………………………………………………（8 分）

令 $\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

解之得 $x=\frac{2y_2(x_1-2)+2y_1(x_2+2)}{y_1(x_2+2)-y_2(x_1-2)}=\frac{4my_1y_2-2y_2+6y_1}{3y_1+y_2}$

$=\frac{4my_1y_2-2(y_2+y_1)+8y_1}{2y_1+(y_1+y_2)}=\frac{4m\left(\frac{-3}{m^2+4}\right)-2\left(-\frac{2m}{m^2+4}\right)+8y_1}{2y_1+\left(-\frac{2m}{m^2+4}\right)}=4$，……………………（11 分）

所以点 D 恒在定直线 $x=4$ 上. ……………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质，证明不等式.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=e^x+xe^x-ax-a=e^x(x+1)-a(x+1)=(x+1)(e^x-a)$. ……………（1 分）

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点. ……………………………………………………（2 分）

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=\ln a$.

（ⅰ）当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值点；……………………………（3 分）

（ⅱ）当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，在 $(\ln a,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点；……………………………………………………（4 分）

（ⅲ）当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点. ……………………………………………………（5 分）

综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$. ……………………………………………（6 分）

（Ⅱ）根据题意，即证 $xe^x-1\geqslant x+\ln x=\ln(xe^x)$. ………………………………（7 分）

令 $t=xe^x>0$，$H(t)=t-\ln t-1(t>0)$，可得 $H'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$. ……………………（8 分）

令 $H'(t)>0$，得 $t>1$；令 $H'(t)<0$，得 $0<t<1$，

所以 $H(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，……………………………（10 分）

所以 $H(t)\geqslant H(1)=0$，即 $xe^x-1\geqslant x+\ln x$. ……………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查方程的互化，以及极坐标方程的应用.

解析 （Ⅰ）C_1 的参数方程可化为$\begin{cases}x=2(\cos 2\alpha+1),\\ y=2\sin 2\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以消去参数 α 得 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2-4x=0$，……（1 分）

因为$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ……（3 分）

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4\cos\theta}{\cos^2\theta-1}$. ……（5 分）

（Ⅱ）根据题意，令 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$|OM|=\left|4\cos\dfrac{\pi}{6}\right|=2\sqrt{3}$，

$|ON|=\left|\dfrac{4\cos\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{6}-1}\right|=8\sqrt{3}$， ……（6 分）

所以 $|MN|=|OM|+|ON|=10\sqrt{3}$. ……（7 分）

同理令 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，可得 $|PQ|=|OP|+|OQ|=\dfrac{14}{3}$. ……（8 分）

易知 $MN\perp PQ$，则以 M,N,P,Q 为顶点的四边形面积为$\dfrac{1}{2}\times 10\sqrt{3}\times\dfrac{14}{3}=\dfrac{70\sqrt{3}}{3}$. ……（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法及性质.

解析 （Ⅰ）由题意知，$2|x+1|-|x-1|\geqslant 5$，

当 $x\leqslant -1$ 时，$-2(x+1)+(x-1)\geqslant 5$，得 $x\leqslant -8$； ……（1 分）

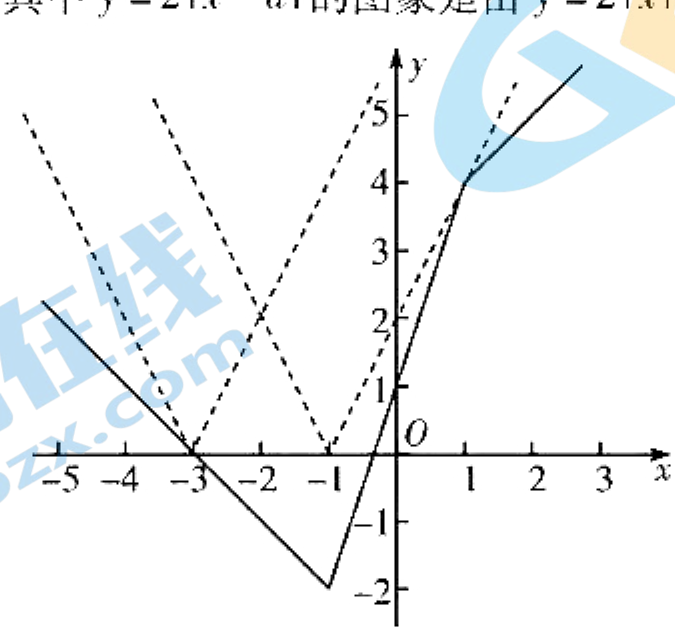
当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$2(x+1)+(x-1)\geqslant 5$，无解； ……（2 分）

当 $x>1$ 时，$2(x+1)-(x-1)\geqslant 5$，得 $x\geqslant 2$. ……（3 分）

综上，不等式 $f(x)\geqslant 5$ 的解集为 $(-\infty,-8]\cup[2,+\infty)$. ……（4 分）

（Ⅱ）$f(x)=\begin{cases}-x-3, & x\leqslant -1,\\ 3x+1, & -1<x\leqslant 1,\\ x+3, & x>1,\end{cases}$ ……（5 分）

作出 $y=f(x)$ 和 $y=2|x-a|$ 的图象，其中 $y=2|x-a|$ 的图象是由 $y=2|x|$ 的图象平移得到的.



……（8 分）

当 $a=-3$ 时，两图象交于点 $(-3,0)$；当 $a=-1$ 时，两图象交于点 $(1,4)$； ……（9 分）

当 $-3<a<-1$ 时，$y=2|x-a|$ 的图象恒在 $y=f(x)$ 图象的上方.

所以 a 的取值范围是 $[-3,-1]$. ……（10 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。