2021 北京十三中高三（上）期中

数　学

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷第 1 页至第 2 页；第II卷第 3 页至第 4 页，答题纸第 1 页至第 4 页．共 150 分，考试时间 120 分钟.请在答题纸第 1 页上侧密封线内书写班级、姓名、准考证号．考试结束后，将本试卷的答题纸交回.

第I卷（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）已知 $A=\{x\mid x^2-2x<0\}$，$B=\{x\mid \ln x<1\}$，则集合 $A\cup B=$（　　）

（A）$(-\infty,e)$　　（B）$(0,e)$　　（C）$(-\infty,1)$　　（D）$(0,2)$

（2）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=\mathrm{e}^{-x}$　　（C）$y=-x^2+1$　　（D）$y=\lg|x|$

（3）在 $(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为（　　）

（A）-10　　（B）10　　（C）-5　　（D）5

（4）在下列各函数中，最小值等于 2 的函数是(　　)

（A）$y=x+\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}(0<x<\dfrac{\pi}{2})$

（C）$y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$　　（D）$y=e^x+\dfrac{4}{e^x}-2$

（5）双曲线 $x^2-y^2=1$ 的焦点到其渐近线的距离为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）1　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）　2

（6）从长度分别为 $1,2,3,4,5$ 的 5 根细木棒中选择三根围成一个三角形，则最大内角（　　）

（A）可能是锐角　　（B）一定是直角　　（C）可能大于 $\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）一定小于 $\dfrac{5\pi}{6}$

（7）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，“$a_2>a_1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的（　　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

（8）已知函数 $f(x)=1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$，则（　　）

（A）$f(x)$ 是偶函数　　（B）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

（C）$f(1)>f(2)$　　（D）曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称

（9）给定集合 A，若对于任意 $a,b\in A$，有 $a+b\in A$，且 $a-b\in A$，则称集合 A 为闭集合，下列结论正确的个数是

（　　）

①集合 $A=\{-4,-2,0,2,4\}$ 为闭集合；　②集合 $A=\{n\mid n=3k,k\in Z\}$ 为闭集合；

③若集合 A_1,A_2 为闭集合，则 $A_1\cup A_2$ 为闭集合；

④若集合 A_1,A_2 为闭集合，且 $A_1\subseteq R,A_2\subseteq R$，则存在 $c\in R$，使得 $c\notin(A_1\cup A_2)$．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（10）在长方形 $ABCD$ 中，$AD=4AB=1$，点 E 是边 BC 上任意一点，设 $BE=x$，$y=\sin\angle AED$，y 与 x 的函数关系式记为 $y=f(x)$，则（　　）

（A）函数 $f(x)$ 有一个极大值，无极小值　　（B）$x=2$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴

（C）函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)$　　（D）函数 $f(x)$ 的增区间为 $[0,2]$

第II卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）在复平面内，复数 z 所对应的点的坐标为 $(1,-1)$，则 $z\cdot\bar{z}=$__________.

（12）在 2 和 30 之间插入两个正数，使前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，则插入的两个数依次为______、________.

（13）地震里氏震级是地震强度大小的一种度量.地震释放的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$.已知两次地震的里氏震级分别为 8.0 级和 7.5 级，若它们释放的能量分别为 E_1 和 E_2，则 $\frac{E_1}{E_2}=$__________.

（14）若点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 x 轴对称点为 $B(\cos(\theta+\frac{\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{\pi}{3}))$，则 θ 的一个取值为_____.

（15）已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$，$g(x)=2^x-2$．若同时满足条件：① $\forall x\in\mathrm{R}$，$f(x)<0$ 或

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

$g(x)<0$；② $\exists x\in(-\infty,-4)$，$f(x)g(x)<0$，则 m 的取值范围是__________.

三、解题题（共 6 小题，共 85 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

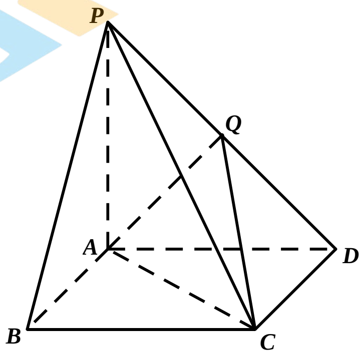
（16）（本小题共 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， Q 为棱 PD 的中点， $PA=AB$.

（I）求证： $AQ\perp CD$；

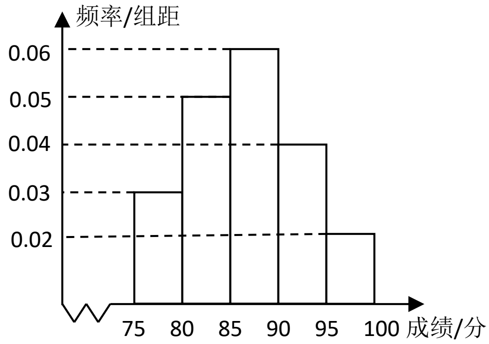
（II）求直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值；

（III）求二面角 $C-AQ-D$ 的余弦值.



（17）（本小题 13 分）

某学校组织高一、高二年级学生进行了"纪念建国 70 周年"的知识竞赛．从这两个年级各随机抽取了 40 名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表．（规定成绩不低于 90 分为"优秀"）



高一

成绩分组	频数
[75，80)	2
[80，85)	6
[85，90)	16
[90，95)	14
[95，100]	2

高二

（I）估计高一年级知识竞赛的优秀率；

（II）将成绩位于某区间的频率作为成绩位于该区间的概率．在高一、高二年级学生中各选出 1 名学生，记这 2 名学生中成绩优秀的人数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列；

（III）在高一、高二年级各随机选取 1 名学生，用 X,Y 分别表示所选高一、高二年级学生成绩优秀的人数．写出方差 DX , DY 的大小关系．（只需写出结论）

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（18）（本小题共 14 分）

已知锐角$\triangle ABC$，同时满足下列四个条件中的三个：

① $A=\dfrac{\pi}{3}$；　② $a=13$；　③ $c=15$；　④ $\sin C=\dfrac{1}{3}$.

（I）请指出这三个条件，并说明理由；

（II）求$\triangle ABC$的面积.

（19）（本小题共 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）设直线 l 过点 $M(1,0)$ 且与椭圆 C 相交于 A,B 两点.过点 A 作直线 $x=3$ 的垂线，垂足为 D.证明：直线 BD 过 x 轴上的定点.

（20）（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）当 $a<0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值；

（III）请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（21）（本小题共 15 分）

数列 A_n： $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n \geqslant 4)$ 满足： $a_1 = 1$， $a_n = m$， $a_{k+1} - a_k = 0$ 或 $1\ (k = 1, 2, \cdots, n-1)$．对任意 i, j，都存在 s, t，使得 $a_i + a_j = a_s + a_t$，其中 $i, j, s, t \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 且两两不相等．

（I）若 $m = 2$，写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列的序号；

① $1,1,1,2,2,2$；　② $1,1,1,1,2,2,2,2$；　③ $1,1,1,1,1,2,2,2,2$

（II）记 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$．若 $m = 3$，证明： $S \geqslant 20$；

（III）若 $m = 2018$，求 n 的最小值．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。