梅州市高三总复习质检试卷（2023.2） 试卷类型：A

数　学

本试卷共 6 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

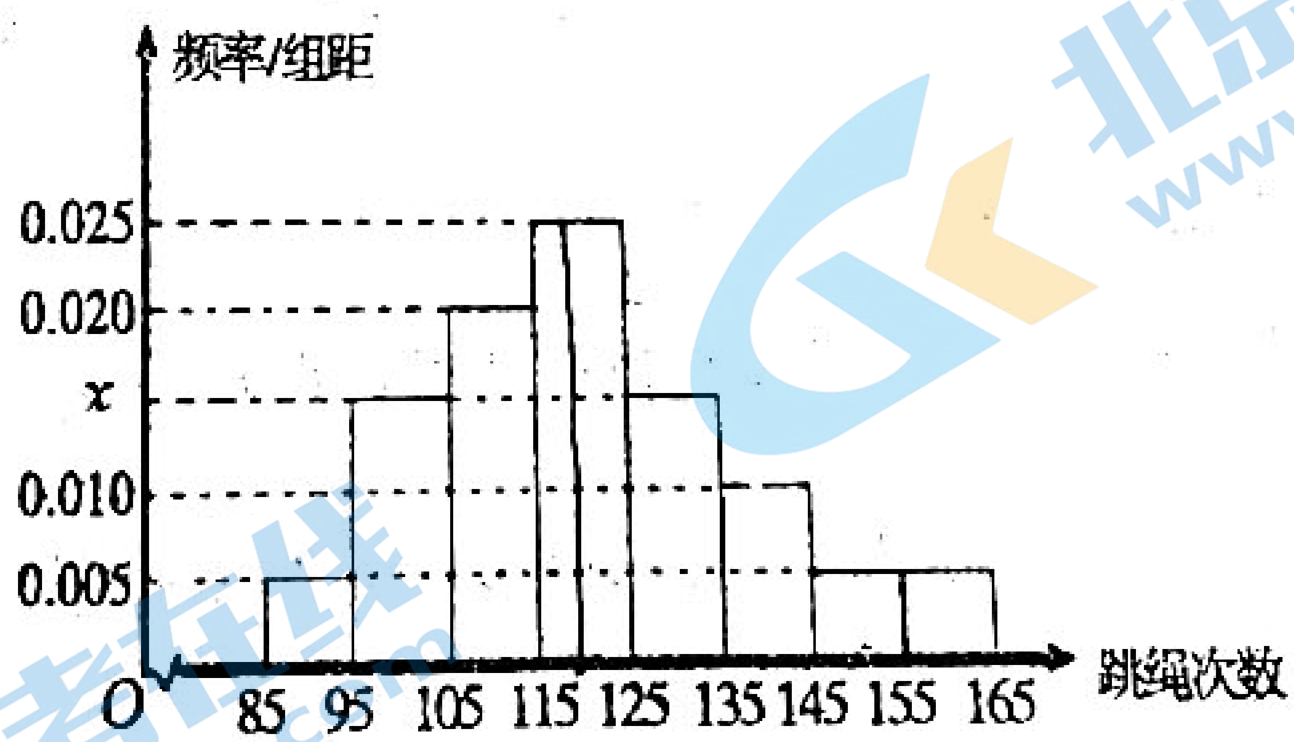
1．已知复数 z 满足 $(1+i)z=-2i$，i 是虚数单位，则 z 在复平面内的对应点落在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知集合 $M=\{x\mid x\cdot(x-4)\le 0\}$，$N=\{x\mid |x-1|<2\}$，则 $M\cap N=$

A．$(-1,4]$　　B．$[0,3)$　　C．$(0,3)$　　D．$[3,4)$

3．为了了解小学生的体能情况，抽取了某小学四年级100名学生进行一分钟跳绳次数测试，将所得数据整理后，绘制如下频率分布直方图。根据此图，下列结论中错误的是



A．$x=0.015$

B．估计该小学四年级学生的一分钟跳绳的平均次数超过125

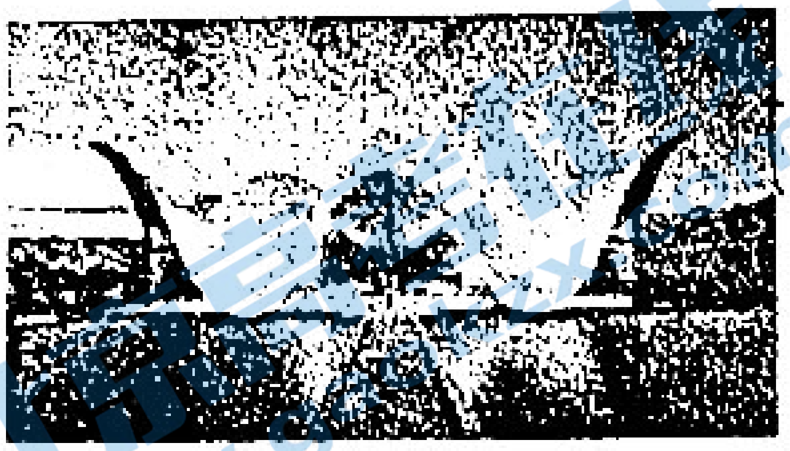
C．估计该小学四年级学生的一分钟跳绳次数的中位数约为119

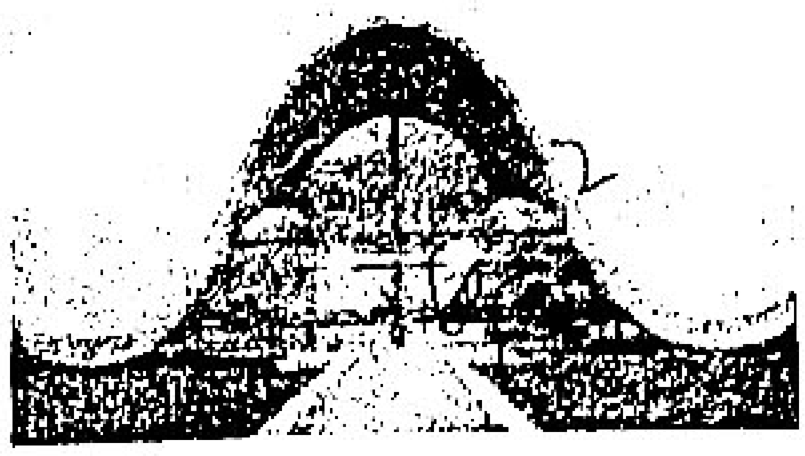
D．四年级学生一分钟跳绳超过125次以上为优秀，则估计该小学四年级优秀率为35%

4．已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=$

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$\frac{7}{9}$　　C．$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　D．$\frac{4\sqrt{2}}{9}$

5．由伦敦著名建筑事务所 *SteynStudio* 设计的南非双曲线大教堂惊艳世界，该建筑是数学与建筑完美结合造就的艺术品．若将如图所示的大教堂外形弧线的一段近似看成双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 下支的部分，且此双曲线两条渐近线方向向下的夹角为 60°，则该双曲线的离心率为





A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

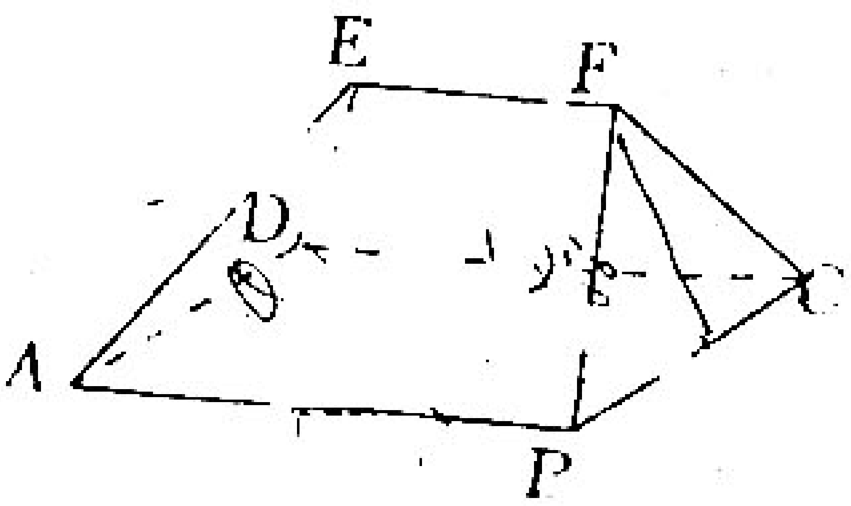
6．若从 $0,1,2,3,\cdots 9$ 这 10 个整数中同时取 3 个不同的数，则其和为偶数的概率为

A．$\frac{1}{12}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

7．某软件研发公司对某软件进行升级，主要是软件程序中的某序列 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 重新编辑，编辑新序列为 $A^*=\left\{\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\frac{a_4}{a_3},\cdots\right\}$，它的第 n 项为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$，若序列 $(A^*)^*$ 的所有项都是 2，且 $a_4=1$，$a_5=32$，则 $a_1=$

A．$\frac{1}{256}$　　B．$\frac{1}{512}$　　C．$\frac{1}{1024}$　　D．$\frac{1}{2048}$

8．《九章算术》是我国古代著名的数学著作，书中记载有几何体"刍甍"。现有一个刍甍如图所示，底面 $ABCD$ 为正方形，$EF\,//$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABFE$，$CDEF$ 为两个全等的等腰梯形，$EF=\frac{1}{2}AB=2$，且 $AE=\sqrt{6}$，则此刍甍的外接球的表面积为

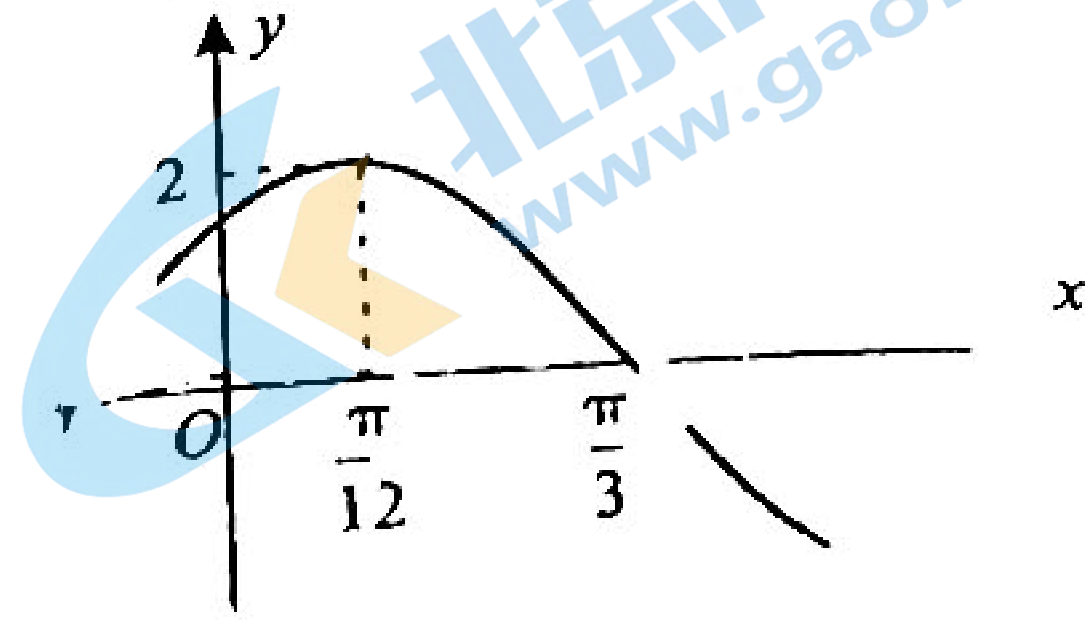


A．60π　　B．64π

C．68π　　D．72π

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\pi\right)$ 的部分图像如图所示，则下列结论正确的是



A. $\omega=2$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 对称

C. 函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 单调递减

D. 函数 $f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 是偶函数

10. 设 S_n 是公差为 $d(d\neq 0)$ 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下列命题正确的是

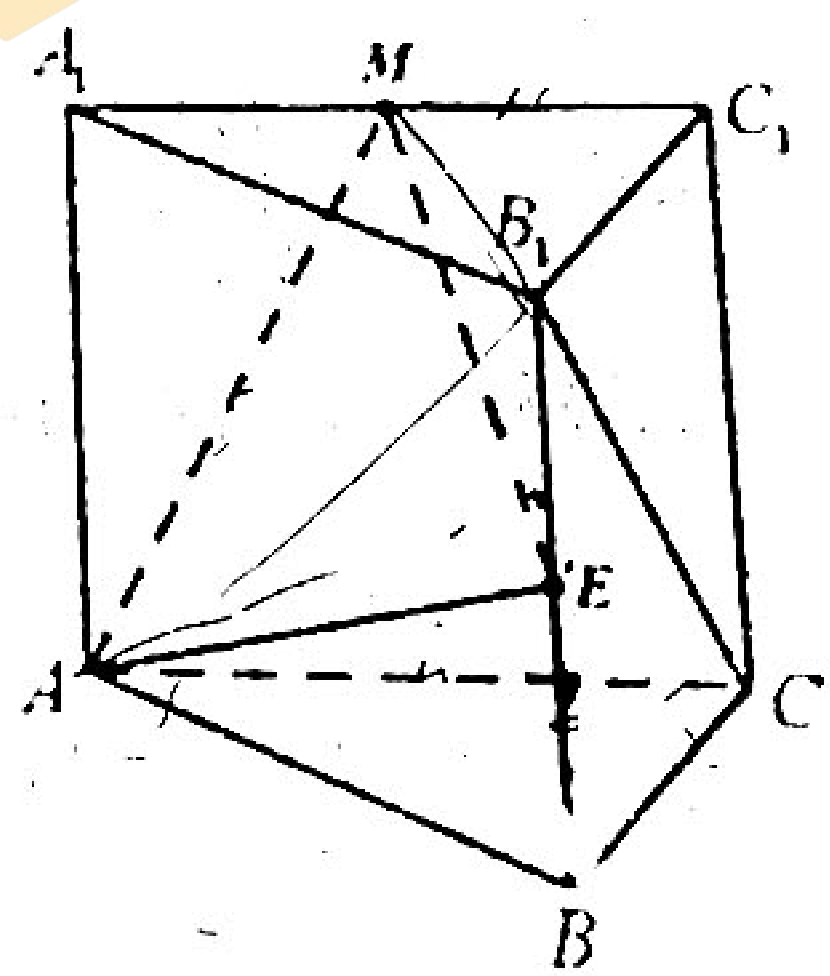
A. 若 $d<0$，则 S_1 是数列 $\{S_n\}$ 的最大项

B. 若数列 $\{S_n\}$ 有最小项，则 $d>0$

C. 若数列 $\{S_n\}$ 是递减数列，则对任意的 $n\in N^*$，均有 $S_n<0$

D. 若对任意的 $n\in N^*$，均有 $S_n>0$，则数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

11. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=6$，$CC_1=4$，$AC\perp BC$，M 为棱 A_1C_1 的中点，E 为棱 BB_1 上的动点（含端点），过点 A、E、M 作三棱柱的截面 α，且 α 交 B_1C_1 于 Q，则



A. 线段 ME 的最小值为 $\sqrt{45}$

B. 棱 BB_1 上的不存在点 E，使得 $B_1C\perp$ 平面 AEM

C. 棱 BB_1 上的存在点 E，使得 $AE\perp ME$

D. 当 E 为棱 BB_1 的中点时，$MQ=5$

12. 对于定义在区间D上的函数$f(x)$，若满足：$\forall x_1, x_2 \in D$且$x_1 < x_2$，都有$f(x_1) \le f(x_2)$，则称函数$f(x)$为区间D上的"非减函数"，若$f(x)$为区间$[0,2]$上的"非减函数"，且$f(2)=2$，$f(x)+f(2-x)=2$，又当$x \in \left[\frac{3}{2},2\right]$时，$f(x) \le 2(x-1)$恒成立，下列命题中正确的有

A. $f(1)=1$

B. $\exists x_0 \in \left[\frac{3}{2},2\right]$，$f(x_0)<1$

C. $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{25}{18}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)=4$

D. $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$，$f(f(x)) \le -f(x)+2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1+x)(2-x)^5$展开式中x^3的系数为________.

14. 在平面直角坐标系中，点$A(2,1)$绕着原点O顺时针旋转60°得到点B，点B的横坐标为________.

15. 甲、乙、丙三人参加数学知识应用能力比赛，他们分别来自 A、B、C 三个学校，并分别获得第一、二、三名．已知：① 甲不是 A 校选手；② 乙不是 B 校选手；③ A 校选手不是第一名；④ B 校的选手获得第二名；⑤ 乙不是第三名．根据上述情况，可判断出丙是________校选手，他获得的是第________名.

16. 函数$f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}x^4-2x^2-4x+13}$的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sqrt{3}a\sin B+b\cos A=2b$.

（1）求内角A；

（2）点M是边BC上的中点，已知$AM=2$，求ΔABC面积的最大值.

18.（本小题满分12分）记S_n是正项数列$\{a_n\}$的前n项和，若存在某一常数M，$\forall n\in N^*$，都有$S_n<M$，则称$\{a_n\}$的前n项和数列$\{S_n\}$有界．从以下三个数列中任选两个：

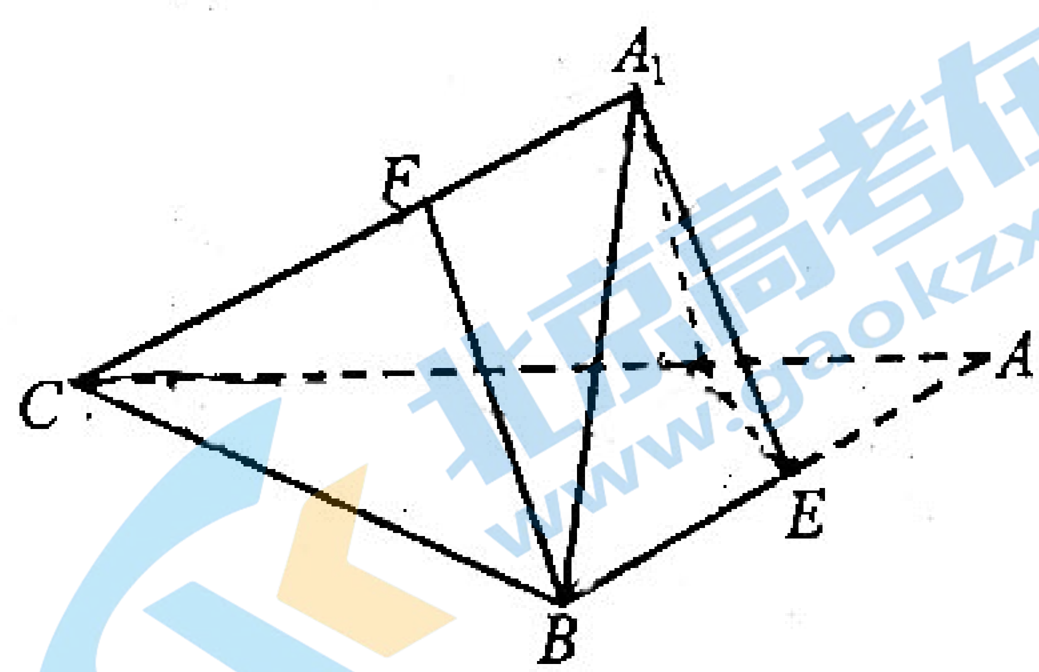
①$\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$；②$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$；③$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，

分别判断它们的前n项和数列是否有界，并给予证明．

19.（本小题满分12分）如图，在边长为4的正三角形ABC中，E为边AB的中点，过E作$ED\perp AC$于D．把$\triangle ADE$沿DE翻折至$\triangle A_1DE$的位置，连接A_1C、A_1B．

（1）F为边A_1C的一点，若$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA_1}$，求证：$BF//$平面$A_1DE$；

（2）当四面体$C-EBA_1$的体积取得最大值时，求平面A_1DE与平面A_1BC的夹角的余弦值．



20.（本小题满分12分）甲、乙、丙、丁四支球队进行单循环小组赛（每两支队比赛一场），比赛分三轮，每轮两场比赛，第一轮第一场甲乙比赛，第二场丙丁比赛；第二轮第一场甲丙比赛，第二场乙丁比赛；第三轮甲对丁和乙对丙两场比赛同一时间开赛，规定：比赛无平局，获胜的球队记3分，输的球队记0分．三轮比赛结束后以积分多少进行排名，积分相同的队伍由抽签决定排名，排名前两位的队伍小组出线．假设四支球队每场比赛获胜概率以近10场球队相互之间的胜场比为参考．

队伍	近10场胜场比	队伍
甲	7 : 3	乙
甲	5 : 5	丙
甲	4 : 6	丁
乙	4 : 6	丙
乙	5 : 5	丁
丙	3 : 7	丁

（1）三轮比赛结束后甲的积分记为 X，求 $P(X=3)$；

（2）若前二轮比赛结束后，甲、乙、丙、丁四支球队积分分别为3、3、0、6，求甲队能小组出线的概率.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=(x^2-2ax)\ln x+\dfrac{1}{2}x^2$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $a>\dfrac{1}{e}$，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

22.（本小题满分 12 分）已知动圆 M 经过定点 $F_1(-\sqrt{3},\ 0)$，且与圆 $F_2:(x-\sqrt{3})^2+y^2=16$ 内切.

（1）求动圆圆心 M 的轨迹 C 的方程；

（2）设轨迹 C 与 x 轴从左到右的交点为点 A,B，点 P 为轨迹 C 上异于 A,B 的动点，设 PB 交直线 $x=4$ 于点 T，连结 AT 交轨迹 C 于点 Q．直线 AP、AQ 的斜率分别为 k_{AP}、k_{AQ}.

（i）求证：$k_{AP}\cdot k_{AQ}$ 为定值；

（ii）证明直线 PQ 经过 x 轴上的定点，并求出该定点的坐标.

梅州市高三总复习质检（2023.2）

数学参考答案与评分意见

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	A	D	D	B	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9	10	11	12
AB	BD	ABD	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 40　　14. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　15. A；　　16. $\frac{7}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\sqrt{3}a\sin B+b\cos A=2b$，

由正弦定理得：$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin B\cos A=2\sin B$，　……………………1 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，于是有 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，　……………………2 分

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=1$，即 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$，　……………………3 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，　……………………4 分

所以 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，从而 $A=\frac{\pi}{3}$．　……………………5 分

（2）因为点 M 是边 BC 上的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$， ……………………6 分

对上式两边平方得：$\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A)$， ……………………7 分

因为 $|\overrightarrow{AM}|=2$，

所以 $4=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos\frac{\pi}{3})$，即 $b^2+c^2+bc=16$， ……………………8 分

而 $c^2+b^2\ge 2bc$，有 $3bc\le 16$，

所以 $bc\le\frac{16}{3}$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立． ……………………9 分

因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\le\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$． ……………………10 分

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

18.（本小题满分 12 分）

解：数列①②的前 n 项和数列有界，数列③的前 n 项和数列无界，证明如下：

①若 $a_n=(\frac{1}{2})^n$，则其前 n 项和 $S_n=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$， ……………………2 分

因为 $n\in N^*$，所以 $0<\frac{1}{2^n}<1$，则 $S_n=1-\frac{1}{2^n}<1$， ……………………4 分

所以存在正数 1，$\forall n\in N^*$，$S_n<1$，

即 $\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$ 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 有界． ……………………6 分

②若 $b_n=\frac{1}{n^2}$，当 $n\ge 2$ 时，$b_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$， ……………………2 分

其前 n 项和 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\le 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$\le 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$

$=2-\frac{1}{n}$， ……………………4 分

因为 $n\in N^*$，所以 $0<\frac{1}{n}\le 1$，则 $T_n\le 2-\frac{1}{n}<2$， ……………………5 分

所以存在正数 2，$\forall n\in N^*$，$T_n<2$，

即 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 前 n 项和数列 $\{T_n\}$ 有界. ……………………6 分

③若 $c_n=\frac{1}{n}$，其前 n 项和为 R_n，

$$R_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$\ge 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2个}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4个}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}+\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}个}$$

$$\ge 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n个}=1+\frac{1}{2}n,$$ ……………………2 分

对于任意正数 M，取 $n=2([M]+1)$（其中 $[M]$ 表示不大于 M 的最大整数），

有 $R_{2^n}\ge 1+\frac{1}{2}\times 2([M]+1)=[M]+2>M$， ……………………4 分

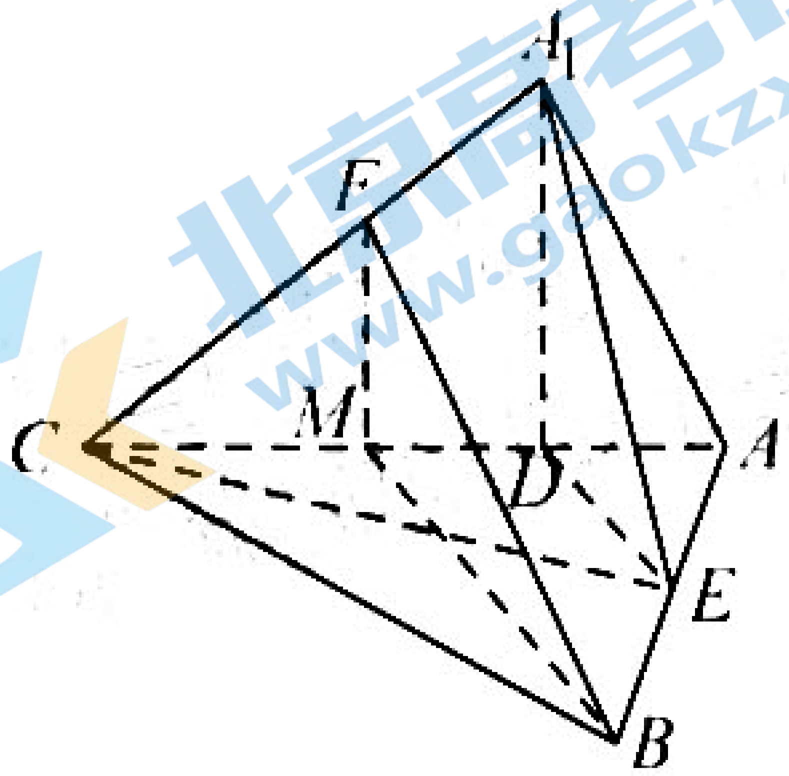
因此 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 前 n 项和数列 $\{R_n\}$ 不是有界的. ……………………6 分

19.（本小题满分 12 分）

（1）**证明：** 取 AC 中点 M，连接 MF,MB，

因为在正三角形 ABC 中，$MB\perp AC$，

又因为 $ED\perp AC$，所以 $MB// DE$， ………………1 分



$MB\not\subset$ 平面 A_1DE，$DE\subset$ 平面 A_1DE，

所以 $MB//$ 平面 A_1DE， ………………2 分

又有 $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MD}$，且 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA_1}$，所以 $MF// DA_1$，

而 $MF\not\subset$ 平面 A_1DE，$A_1D\subset$ 平面 A_1DE，所以 $MF//$ 平面 A_1DE. ………………3 分

有 $MF\cap MB=M$，

所以平面 $MFB//$ 平面 A_1DE， ……………………4 分

又 $BF\subset$ 平面 MFB，

因此 $BF//$ 平面 A_1DE. ……………………5 分

（2）**解：** 因为 $V_{C-BEA_1}=V_{A_1-BCE}$，又因为 ΔBCE 的面积为定值，

所以当 A_1 到平面 BCE 的距离最大时，四面体 $C-BEA_1$ 的体积有最大值，……………6 分

因为 $DE\perp DC, DE\perp A_1D, DC\cap A_1D=D$，$DC,A_1D\subset$ 平面 A_1DC，

所以 $DE\perp$ 平面 A_1DC，

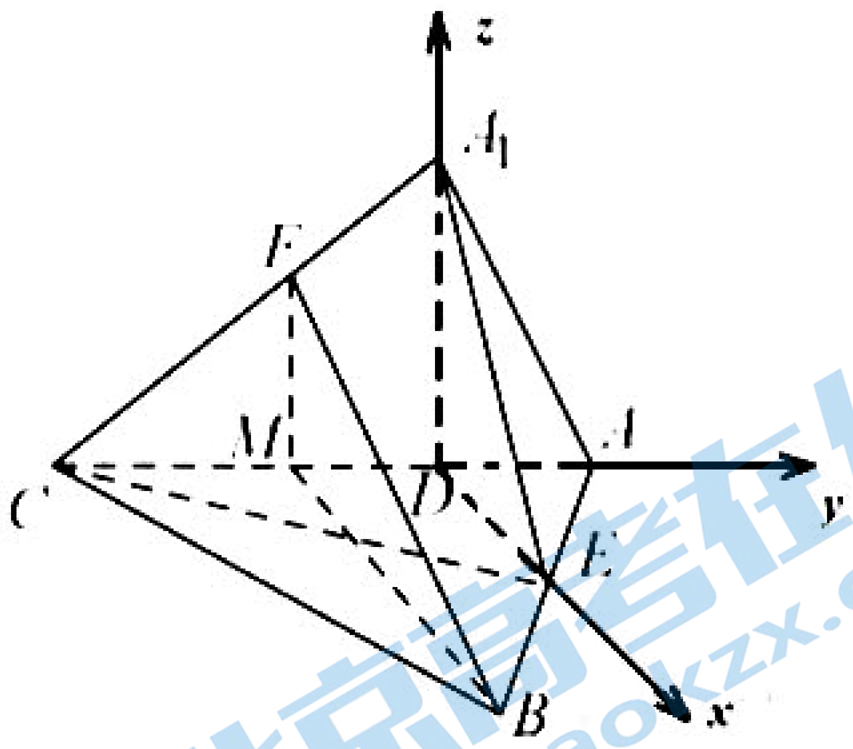
因为 $DE\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 A_1DC，

当 $A_1D\perp CD$ 时，平面 $ABC\cap$ 平面 $A_1DC=CD$，$A_1D\subset$ 平面 A_1DC

所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC，即在翻折过程中，点 A_1 到平面 BCE 的最大距离是 A_1D，

因此四面体 $C-BEA_1$ 的体积取得最大值时，必有 $A_1D\perp$ 平面 ABC……………………7 分

如图，以点 D 为原点，DE 为 x 轴，DA 为 y 轴，DA_1 为 z 轴，建立空间直接坐标系，



易知 $MB=2\sqrt{3}$，$DE=\sqrt{3}$，$D(0,0,0)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，

$C(0,-3,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B(2\sqrt{3},-1,0)$，………8 分

因为 $CA\perp$ 平面 A_1DE，

所以平面 A_1DE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$，………9 分

设平面 BCA_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{A_1C}=(0,-3,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{3},2,0)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{n_2}=-3y-z=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$，令 $y=-1$ 得：$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3},z=3$，

所以 $\overrightarrow{n_2}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,3)$，……………………10 分

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{-1}{1\times\sqrt{\dfrac{31}{3}}}=-\dfrac{\sqrt{93}}{31}$，……………………11 分

所以平面 A_1DE 与平面 A_1BC 的夹角（锐角）的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{93}}{31}$. ……………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）设甲的第 i 场比赛获胜记为 $A_i(i=1，2，3)$， ……………………1 分

则有 $P(X=3)=P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3)$ ……………………2 分

$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}$ ……………………3 分

$=\frac{9}{25}$. ……………………4 分

（2）分以下三种情况：

（i）若第三轮甲胜丁，另一场比赛乙胜丙，

则甲、乙、丙、丁四个球队积分变为 6、6、0、6， ……………………5 分

此时甲、乙、丁三支球队积分相同，要抽签决定排名，甲抽中前两名的概率为 $\frac{2}{3}$，

所以这种情况下，甲出线的概率为 $P_1=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{75}$； ……………………6 分

（ii）若第三轮甲胜丁，另一场比赛乙输丙，

则甲、乙、丙、丁积分变为 6、3、3、6， ……………………7 分

此时甲一定出线，甲出线的概率为 $P_2=\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{6}{25}$； ……………………8 分

（iii）若第三轮甲输丁，另一场比赛乙输丙，

则甲、乙、丙、丁积分变为 3、3、3、9， ……………………9 分

此时甲、乙、丙三支球队要抽签决定排名，甲抽到第二名的概率为 $\frac{1}{3}$，

所以这种情况下，甲出线的概率为 $P_3=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{25}$. ……………………10 分

综上，甲出线的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{8}{75}+\frac{6}{25}+\frac{3}{25}=\frac{7}{15}$. ……………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）首先函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=1$ 时，$f(x)=(x^2-2x)\ln x+\frac{1}{2}x^2$，

则 $f'(x)=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\cdot\frac{1}{x}+x=2(x-1)(\ln x+1)$. ……………………1 分

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{e}$，$x_2=1$， ……………………2 分

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 时，$f'(x)<0$. ……………3 分

故 $f(x)$ 的增区间为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(1,+\infty)$，减区间为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$. ……………………4 分

（2）$f'(x)=2(x-a)(\ln x+1)$，$x>0$，

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{e}, x_2=a(>\frac{1}{e})$， ……………………5 分

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},a\right)$ 时，$f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{e},a\right)$ 上单调递减. ……………6 分

①因为当 $0<x<\frac{1}{e}<\min\{2a,1\}$ 时，

有 $f(x)=(x^2-2ax)\ln x+\frac{1}{2}x^2>x(x-2a)\ln x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上不存在零点. ……………………8 分

②在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上，由单调性知：$f(x)_{\min}=f(a)=a^2\left(\frac{1}{2}-\ln a\right)$，分以下三种情况讨论：

（i）若 $\frac{1}{e}<a<\sqrt{e}$，有 $f(a)>0$，即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上不存在零点； ……………9 分

（ii）若 $a=\sqrt{e}$，有 $f(a)=0$，

此时 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 有唯一零点 $x=\sqrt{e}$； ……………………10 分

（iii）若 $a>\sqrt{e}$，有 $f(a)<0$，而 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{4ae-1}{2e^2}>0$，$f(2a)=2a^2>0$，

则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},a\right)$ 与 $(a,+\infty)$ 上各有一个零点. ……………………11 分

综上：（i）当 $\frac{1}{e}<a<\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不存在零点；

（ii）当 $a=\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在一个零点；

（iii）当 $a>\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个零点. ……………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（1）**解**：设动圆的半径为 r，由题意，得：

$|MF_1| = r, |MF_2| = 4 - r$，……………………1 分

则 $|MF_1| + |MF_2| = 4 > 2\sqrt{3} = |F_1F_2|$.……………………2 分

所以动点 M 的轨迹 C 是以 F_1, F_2 为焦点，长轴长为 4 的椭圆.……………………3 分

因此轨迹 C 方程为 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.……………………4 分

（2）（i）证法一：设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(4, m)$.

由题可知 $A(-2,0), B(2,0)$，

则 $k_{AP} = \dfrac{y_1}{x_1+2}, k_{AQ} = k_{AM} = \dfrac{m-0}{4-(-2)} = \dfrac{m}{6}$，……………………5 分

而 $k_{BP} = k_{BM} = \dfrac{y_1}{x_1-2} = \dfrac{m}{2}$，于是 $m = \dfrac{2y_1}{x_1-2}$，……………………6 分

所以 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = \dfrac{y_1}{x_1+2} \times \dfrac{m}{6} = \dfrac{y_1}{x_1+2} \times \dfrac{y_1}{3(x_1-2)} = \dfrac{y_1^2}{3(x_1^2-4)}$，……………………7 分

又 $\dfrac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1$，则 $y_1^2 = \dfrac{1}{4}(4 - x_1^2)$，

因此 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = \dfrac{\frac{1}{4}(4-x_1^2)}{3(x_1^2-4)} = -\dfrac{1}{12}$ 为定值.……………………8 分

证法二：设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(4, m)$. 由题可知 $A(-2,0), B(2,0)$，

则直线 PB 的方程为 $y = \dfrac{m}{2}(x-2), k_{AQ} = k_{AM} = \dfrac{m}{6}$.

由 $\begin{cases} y = \dfrac{m}{2}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$，得 $(m^2+1)x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 4 = 0$，……………………5 分

所以 $2x_1 = \dfrac{4m^2-4}{m^2+1}$，即 $x_1 = \dfrac{2m^2-2}{m^2+1}$，

则 $y_1 = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{2m^2-2}{m^2+1} - 2\right) = -\dfrac{2m}{m^2+1}$.……………………6 分

所以 $k_{AP} = \dfrac{y_1}{x_1+2} = \dfrac{-\frac{2m}{m^2+1}}{\frac{2m^2-2}{m^2+1}+2} = -\dfrac{1}{2m}$.……………………7 分

故 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = -\dfrac{1}{2m} \cdot \dfrac{m}{6} = -\dfrac{1}{12}$ 为定值.……………………8 分

证法三：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(4,m)$．

由题可知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，则 $k_{BP}=k_{BM}=\frac{m}{2}$．

由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{4}(x\neq\pm2)$，　……………………5 分

所以 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=-\frac{1}{4}$，即 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{4}$，　……………………6 分

故 $k_{AP}=-\frac{1}{2m}$，　又 $k_{AQ}=k_{AM}=\frac{m}{6}$，　……………………7 分

所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{2m}\cdot\frac{m}{6}=-\frac{1}{12}$ 为定值．　……………………8 分

解：（ii）**法一：** 设直线 PQ 的方程为 $x=ty+n$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases}x=ty+n\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$，　……………………9 分

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2tn}{t^2+4}\\ y_1y_2=\frac{n^2-4}{t^2+4}\end{cases}$．　……………………10 分

由（i）可知，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{12}$，即 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1y_2}{(ty_1+n+2)(ty_2+n+2)}=-\frac{1}{12}$，

化简得：$\frac{n^2-4}{4n^2+16n+16}=-\frac{1}{12}$，　解得 $n=1$ 或 $n=-2$（舍去），　……………………11 分

所以直线 PQ 的方程为 $x=ty+1$，

因此直线 PQ 经过定点 $(1,0)$．　……………………12 分

法二： 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

①当直线 PQ 的斜率存在时，设直线 PQ 的方程为 $y=kx+t$．

由 $\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-4=0$．

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8kt}{4k^2+1}\\ x_1x_2=\frac{4t^2-4}{4k^2+1}\end{cases}$．　……………………9 分

由（i）知，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{12}$，即：$\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\frac{1}{12}$

化简得：$\frac{-4k^2+t^2}{4t^2-16kt+16k^2}=-\frac{1}{12}$，　解得 $t=-k$ 或 $t=2k$（舍去）．　……………………10 分

所以直线 PQ 的方程为 $y=kx-k=k(x-1)$，

故直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ……………………11 分

②当直线 PQ 的斜率不存在时，则 $\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=-y_2\end{cases}$．

由（i）知，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{12}$，即：$\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{-y_1^2}{(x_1+2)^2}=-\frac{1}{12}$．

又 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，所以 $\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{(x_1+2)^2}=-\frac{1}{12}$，解得 $x_1=1$．

所以直线 PQ 的方程为 $x=1$，故直线 PQ 经过定点 $(1,0)$．

综上，直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ……………………12 分

法三：设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$、$M(4,m)$．由题可知 $A(-2,0)$、$B(2,0)$，则直线 PB 的方程为 $y=\frac{m}{2}(x-2)$．

由 $\begin{cases}y=\frac{m}{2}(x-2)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(m^2+1)x^2-4m^2x+4m^2-4=0$．

所以 $2x_1=\frac{4m^2-4}{m^2+1}$，即 $x_1=\frac{2m^2-2}{m^2+1}$，则 $y_1=\frac{m}{2}\left(\frac{2m^2-2}{m^2+1}-2\right)=-\frac{2m}{m^2+1}$，

所以 $P\left(\frac{2m^2-2}{m^2+1},-\frac{2m}{m^2+1}\right)$，同理得 $Q\left(\frac{18-2m^2}{m^2+9},\frac{6m}{m^2+9}\right)$． ……………………10 分

当 $\frac{2m^2-2}{m^2+1}=\frac{18-2m^2}{m^2+9}$，即 $m^2=3$ 时，

直线 PQ 的方程为 $x=1$，此时直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ……………………11 分

当 $\frac{2m^2-2}{m^2+1}\neq\frac{18-2m^2}{m^2+9}$，即 $m^2\neq3$ 时，

直线 PQ 的方程为 $y+\frac{2m}{m^2+1}=\frac{\frac{6m}{m^2+9}+\frac{2m}{m^2+1}}{\frac{18-2m^2}{m^2+9}-\frac{2m^2-2}{m^2+1}}\left(x-\frac{2m^2-2}{m^2+1}\right)$．

即 $y=-\frac{2m}{m^2-3}(x-1)$，此时直线 PQ 经过定点 $(1,0)$．

综上，直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ……………………12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’精益求精、专业严谨‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。