学号________ 姓名________ 班级________

密 封 线 内 请 不 要 答 题

北京市陈经纶中学期中诊断

高二年级　数学学科　统一卷

（时间：120 分钟　　满分：150 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|x^2-3x<0\}$，则 $A\cap B=$（ B ）.

A. $\{-1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 命题"$\forall x>0$，$\ln(1+x)<x$"的否定是（ D ）.

A. $\forall x>0$，均有 $\ln(1+x)\geq x$　　B. $\forall x\leq 0$，均有 $\ln(1+x)\geq x$

C. $\exists x_0\leq 0$，使得 $\ln(1+x_0)\geq x_0$　　D. $\exists x_0>0$，使得 $\ln(1+x_0)\geq x_0$

3. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a>b$，则（ D ）.

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$　　C. $ac>bc$　　D. $a-c>b-c$

4. 在 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 的二项式展开式中，常数项是（ C ）.

A. 30　　B. -15　　C. 15　　D. -30

5. 设 $a>0$，则 $a+\frac{a+4}{a}$ 的最小值为（ A ）.

A. 5　　B. 3　　C. 4　　D. 9

6. 陈经纶中学高二语文期中考试共设置 8 道古文诗句默写，题目选自 7 篇古诗文，包括《屈原列传》、《离骚》的节选段落，以及《陈情表》、《过秦论》、《项脊轩志》、《伶官传序》、《归去来兮辞》的全文. 已知每篇古诗文均设置题目，则在节选段落的篇目不重复出题的条件下，考查 2 道《过秦论》默写题目的概率为（ A ）.

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{5}{7}$

7. 已知函数 $f(x)=x^3+x$，则"$x_1+x_2=0$"是"$f(x_1)+f(x_2)=0$"的（ C ）.

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 掷三颗质地均匀的骰子，已知所得三个点数都不一样，则骰子中含 1 点

的概率为（ C ）.

A. $\frac{19}{30}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{18}$

9. 一个箱子中装有形状完全相同的5个白球和$n(n\in N^*)$个黑球. 从中有放回的随机抽取4次，记其中白球的个数为X，若$D(X)=1$，则$E(X)=$（ B）.

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $\frac{1}{2}$

10. 已知函数$f(x)=2x^2-e^{|x|}$，关于函数$f(x)$给出下列命题：

① 函数$f(x)$为偶函数；　② 函数$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$单调递增；

③ 函数$f(x)$存在两个零点；　④ 函数$f(x)$存在极大值和极小值.

正确的命题为（ B ）.

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ②③④

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 函数$f(x)=\lg(x+1)+\frac{1}{x-1}$的定义域为________. $(-1,1)\cup(1,+\infty)$

12. 设$f(x)=x\ln x$，若$f'(x_0)=2$，则$x_0=$________. e

13. 若$(3x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则$a_1+a_2+a_3+a_4=$______.

15

14. 设函数$f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x\le 1\\ \log_a x, & x>1\end{cases}$.

①若$a=2$，则函数$f(x)$的值域为________； $(-2,+\infty)$

②若$f(x)$在**R**上是增函数，则a的值可以是________. (写出符合条件的一个值)　$a\ge 2$的任意数

15. 已知全集$U=\{(x,y)|x\in \mathbf{Z}, y\in \mathbf{Z}\}$，非空集合$S\subseteq U$．若在平面直角坐标系$xOy$中，对$S$中的任意点$P$，与$P$关于$x$轴、$y$轴以及直线$y=x$对称的点也均在$S$中，则以下命题：

①若$(1,3)\in S$，则$(-1,-3)\in S$；

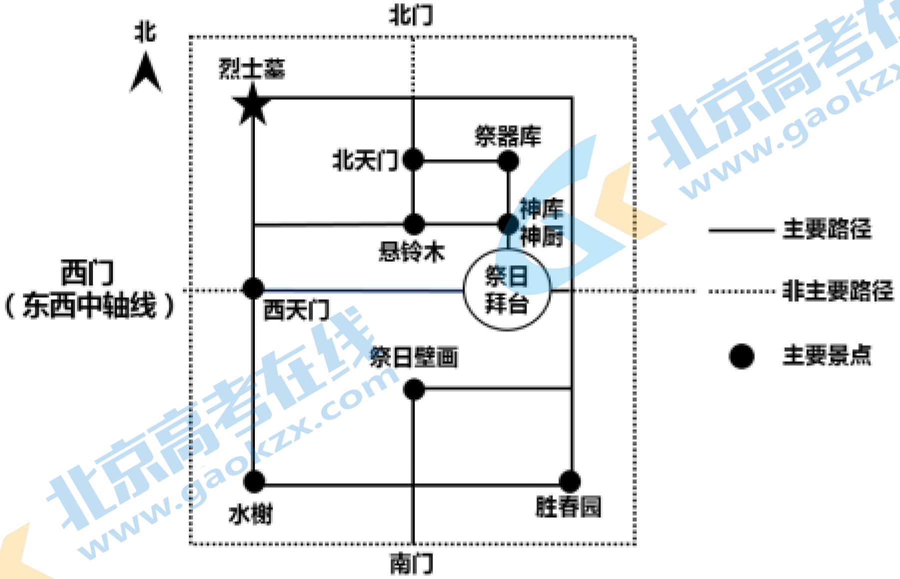
②若$(0,4)\in S$，则S中至少有8个元素；

③若$(0,0)\notin S$，则S中元素的个数可以为奇数；

④若$\{(x,y)|x+y=4\}\subseteq S$，则$\{(x,y)||x|+|y|=4\}\subseteq S$．

其中正确命题的序号为________．①④

16. 陈经纶中学高二年级近日于北京日坛公园组织社会实践活动．日坛公园的西门位于**东西中轴线**上，公园内部的主要路径及主要景点如下图所示．某活动小组计划从"**烈士墓**"出发，经"**东西中轴线及其以北**"的主要路径前往"**祭日拜台**"进行实践活动，活动结束后经"**东西中轴线及其以南**"的主要路径由**南门**离开．已知小组成员的行动路线中没有重复的主要路径．则该小组在前往"**祭日拜台**"的途中最多可以路过______个主要景点；该小组全程共有_______条行动路线可供选择．　5　35



三、解答题：本大题共 5 个小题，共 70 分.

17.（本题满分 13 分）

某研究小组在进行一项水质监测实验，受取样环境所限，每次取得的水样均有$\frac{1}{10}$的概率受到污染而无法用于研究，假设每次取样互不影响.

（Ⅰ）研究小组取样 2 次，求水样均受到污染的概率；

（Ⅱ）研究小组取样 3 次，记 3 份水样中受到污染的水样数量为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）已知取出的 100 份水样中，有 2 份水样受到污染，为筛选出污染的水样，研究小组将 100 份水样分成 10 组，每组 10 份；将每组各份水样分别取一小部分进行混合，对混合物进行检测，若无污染，则可确定该组水样无污染，否则还需对该组每份水样再次检测. 若两份污染水样不在同一组，则检测次数为？（直接写出结论）

解：(1) A =“取样 2 次，水样均受到污染”……………………1 分

$P(A)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$ ……………………………………………3 分

(2) X 可取 0, 1, 2, 3 ……………………………………4 分

$P(X=0)=C_3^0(\frac{9}{10})^3=\frac{729}{1000}$ ……………5 分

$P(X=1)=C_3^1\frac{1}{10}(\frac{9}{10})^2=\frac{243}{1000}$ ……………6 分

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{10})^2\frac{9}{10}=\frac{27}{1000}$ ……………7 分

$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{10})^3=\frac{1}{1000}$ ……………8 分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

……………………9 分

故 $E(X)=0\times\frac{729}{1000}+1\times\frac{243}{1000}+2\times\frac{27}{1000}+3\times\frac{1}{1000}=\frac{300}{1000}=\frac{3}{10}$ …11 分

（或写 $X\sim B(3,\frac{1}{10})$，则 $E(X)=3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$ 也可以）

(3) 30 次……………………………………………………………13 分

18.（本题满分 13 分）

体温是人体健康状况的直接反应，一般认为腋下温度 T（单位：$°C$）超过 $37.3°C$ 即为发热，按不同体温范围可分成以下四种发热类型：

低热：$37.4°C\le T\le 38°C$；中度热：$38.1°C\le T\le 39°C$；

高热：$39.1°C\le T\le 41°C$；超高热（有生命危险）：$T>41°C$

某患者因肺炎发热，住院治疗，医生记录了该患者 15 天治疗期间的腋下温度：

抗生素	没有使用		使用“**呋辛钠**”治疗			使用“**拉氧**”治疗		
治疗天数	1	2	3	4	5	6	7	8
腋下温度（$°C$）	39.4	39.9	40.2	40.5	40.1	39.1	38.9	39.0

抗生素	使用“**泰能**”治疗			没有使用			
治疗天数	9	10	11	12	13	14	15
腋下温度（$°C$）	38.5	38.0	37.6	37.1	36.8	36.6	36.3

(Ⅰ) 患者好友计划在 15 天中随机选择 1 天来病房探望患者，求探望当天患者腋下温度处于高热的概率；

(Ⅱ) 住院期间，医生需取患者静脉血做血常规检查，若在第 4 天至第 8 天期间，医生随机选择 3 天取静脉血，记 X 为高热体温下的取血天数，试求 X 的分布列与数学期望；

(Ⅲ) 治疗期间，医生根据病情变化，前后共使用三种不同的抗生素（见

表）对患者进行治疗，请结合表中数据，判断哪种抗生素治疗效果最佳，并说明理由.

解：(1) 由表可知，患者老师共 6 天高热……………………………………1 分

A=“探望当天患者最高体温处于高热”……………………………………2 分

$P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ ……………………………………………………4 分

(2) X 可取 1，2，3……………………………5 分

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$ ……………………………6 分

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ ……………………………7 分

$P(X=3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$ ……………………………8 分

则 X 的分布列为：…………………………………………9 分

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{8}{5}$ …………………………10 分

(3)（开放性问题，答案不唯一，满分 3 分，作答**呋辛钠效果最好该问不得分**，作答**理由与结果不匹配扣 2 分**，作答**没有罗列具体的数据扣 1 分**，抗生素名称错别字不扣分，能认清所选种类即可）

泰能治疗效果最佳：稳定的体温下降（用变化量、极差、平均值、方差均可，有具体数据能说明持续体温下降即可）

说明示例：

使用其他抗生素期间体温没有明显变化，而使用泰能期间，第 1 天相较于之前体温下降 0.5，第 2 天下降 0.5，第 3 天下降 0.4，甚至在停药的第一天仍旧下降 0.5，令体温降低到正常体温范围，体温下降稳定表明药物效果明显，说明泰能治疗效果最佳。…13 分

拉氧治疗效果最佳：治疗期间的最大体温落差（用变化量说明，需要说清

首日降温 1°C)

说明示例：

自使用拉氧开始治疗后，体温才开始下降，且使用拉氧治疗当天共降温 1°C，是单日降温效果最好的一天，故拉氧治疗效果最佳。………13 分

19. (本题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=[2ax^2-(5a+2)x+5a+3]e^x$.

(Ⅰ) 若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x-2$，求 a；

(Ⅱ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解：(1) $f'(x)=[2ax^2-(a+2)x+1]e^x=(ax-1)(2x-1)e^x$

由于 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x-2$

而 $f'(0)=1$，$f(0)=5a+3$，故切线方程为 $y-(5a+3)=x-0$，

即 $y=x+5a+3$，此时 $5a+3=-2$，$a=-1$.…………………………6 分

(2) 由于 $f'(x)=(ax-1)(2x-1)e^x$，

当 $a\le 0$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{1}{2}$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{2})$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

当 $a>0$，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{a},x_2=\frac{1}{2}$，

当 $0<a<2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$ 得 $\frac{1}{2}<x<\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{2})$ 和 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$；

当 $a=2$ 时，$f'(x)=\frac{(2x-1)^2}{x}\ge 0$，所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$，无单

调减区间；

当$a>2$时，由$f'(x)>0$得$0<x<\frac{1}{a}$或$x>\frac{1}{2}$，由$f'(x)<0$得$\frac{1}{a}<x<\frac{1}{2}$，

所以$f(x)$的单调增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(\frac{1}{2},+\infty)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$

…………14 分

20. 设函数$f(x)=x^2+m\ln(x+1)(m\in\mathbf{R})$.

(I) 若$m=-1$，

(i) 求曲线$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(ii) 当$x\in(1,+\infty)$时，求证：$f(x)<x^3$.

(II) 若函数$f(x)$在区间$(0,1)$上存在唯一零点，求实数m的取值范围.

解：(I) $m=-1$，所以$f(x)=x^2-\ln(x+1)$.

(i) $f'(x)=2x-\frac{1}{x+1}$，$k=f'(0)=-1$.

又$f(0)=0$，所以$f(x)$在$(0,f(0))$点处的切线方程为

$y=-x$.　…………. 4分

(ii) 令$F(x)=f(x)-x^3=x^2-\ln(x+1)-x^3$，

$$F'(x)=2x-\frac{1}{x+1}-3x^2=\frac{-3x^3-x^2+2x-1}{x+1}=\frac{-3x^3-(x-1)^2}{x+1},$$

$x\in(1,+\infty)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$F(x)<F(1)=-\ln 2<0$，

所以当$x\in(1,+\infty)$时，

$f(x)<x^3$.　…………. 9分

(II) $f(x)=x^2+m\ln(x+1)$，$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，

$f'(x)=2x+\frac{m}{x+1}=\frac{2x^2+2x+m}{x+1}=0$，即$2x^2+2x+m=0$.

当$4-8m\le 0$即$m\ge\frac{1}{2}$时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，

又 $f(0)=0$，所以在 $(0,1)$ 上无零点，不合题意；

当 $4-8m>0$ 即 $m<\frac{1}{2}$ 时 $2x^2+2x+m=0$ 有两根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$；

当 $2\times(-1)^2+2\times(-1)+m>0$ 即 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，$x_1\in(-1,-\frac{1}{2})$，

$x_2\in(-\frac{1}{2},0)$，

此时 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(0)=0$，所以在 $(0,1)$ 上无零点，

不合题意；

当 $m=0$ 时 $f(x)=x^2$，此时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点，不合题意；

当 $m<0$ 时 $x_1\in(-\infty,-1)$，$x_2\in(0,+\infty)$，

此时 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=0$，

所以 $f(x_2)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一零点，即 $f(1)>0$ 即可．解

得 $m>-\frac{1}{\ln 2}$．

综上，若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一零点，则

$m\in(-\frac{1}{\ln 2},0)$…………… 15 分

21.（本题满分 15 分）

已知集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}(n\geq 3)$，$|A|$ 表示集合 A 中的元素个数，当集合 A 的子集 A_i 满足 $|A_i|=2$ 时，称 A_i 为集合 A 的二元子集.

若对集合 A 的任意 m 个不同的二元子集 $A_1,A_2,\cdots A_m$，均存在对应的集合 B 满足：①$B\subseteq A$；②$|B|=m$；③$|B\cap A_i|\leq 1(1\leq i\leq m)$，则称集合 A 具有性质 J.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，若集合 A 具有性质 J，请直接写出集合 A 的所有二元子集以及 m 的一个取值；

（Ⅱ）当 $n=6,m=4$ 时，判断集合 A 是否具有性质 J？并说明理由；

（Ⅲ）当 $m=2023$ 时，若集合 A 具有性质 J，求 n 的最小值.

解：（Ⅰ）集合 A 的所有元素个数为 2 的子集有：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ …3 分

满足题意的集合 B 可以是：$\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{3\}$，此时 $m=1$

或者也可以是：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$，此时 $m=2$ ··········4 分

（Ⅱ）集合 A 不具有性质 J，理由如下：

反证法：假设存在集合 B，即对任意的 A_1,A_2,A_3,A_4，$|B|=4$，

$|B\cap A_i|\leq 1(1\leq i\leq 4)$ ········5 分

则取 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{3,4\}$，$A_3=\{5,6\}$，$A_4=\{2,3\}$

（A_4 任意构造，符合题意即可）···········7 分

此时由于 $|B|=4$，由抽屉原理可知，$\exists j\in\{1,2,3\}$，$|B\cap A_j|=2$ ·······8 分

与题设矛盾，假设不成立，因此集合 A 不具有性质 J ·················9 分

（Ⅲ）首先证明 $n\geq 2\times 2023-1=4045$

反证法：假设 $n\leq 2\times 2023-2=2\times 2022=4044$，由集合 A 具有性质 J，则存在集合 B，

对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_{2023}$，$|B|=2023$，$|B\cap A_i|\leq 1(1\leq i\leq 2023)$

则取 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{3,4\}$，$A_3=\{5,6\}$，$\cdots$，

$A_{2022}=\{2\times 2022-1,2\times 2022\}$，$A_{2023}=\{1,2\times 2022\}$

（A_{2023} 任意构造，符合题意即可）……………………10 分

此时由于 $|B|=2023$，由抽屉原理可知，$\exists j\in\{1,2,\cdots,2022\}$，$|B\cap A_j|=2$

……………11 分

与题设矛盾，假设不成立，因此 $n\geq 4045$ ……………………12 分（共 3 分）

然后证明：$n_{\min}=4045$

当 $n=4045$ 时，$|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{2023}|=4046>n$，由抽屉原理可知，

存在 $A_i\cap A_j\neq\varnothing(1\leq i<j\leq 2023)$，

不妨设为 $A_{2022}\cap A_{2023}\neq\varnothing$，取 $a_0\in A_{2022}\cap A_{2023}$，$a_i\in A_i(1\leq i\leq 2021)$

……………13 分

设 $B=A\setminus\{a_0,a_1,\cdots,a_{2021}\}$，此时 $|B|\geq 4045-2022=2023$，

且 $|B\cap A_i|\leq 1(1\leq i\leq 2023)$ ……………14 分

故 $n=4045$ 符合题意，综上可知 $n_{\min}=4045$ ……………15 分（共 3 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。