高 三 数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|2x+3<7\}$，$B=\{x|y=\ln(x+3)\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-3\leqslant x<2\}$　　B. $\{x|-3<x<2\}$

C. $\{x|-3<x<-2\}$　　D. $\{x|x<-3$ 或 $x>2\}$

2. 复数 z 满足 $2z+(z-5)\mathrm{i}=0$，则 $|z|=$

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

3. 已知点 $A(m,2)$ 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点，过点 A 作 C 准线的垂线，垂足为 B. 若 $\triangle AOB$（O 为坐标原点）的面积为 2，则 $p=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

4. 已知 $a>0,b>0$，直线 $y=\mathrm{e}^{-2}x+b$ 与曲线 $y=\ln x-a$ 相切，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是

A. 16　　B. 12　　C. 8　　D. 4

5. 为了养成良好的运动习惯，某人记录了自己一周内每天的运动时长（单位：分钟），分别为 53，57，45，61，79，49，x，若这组数据的第 80 百分位数与第 60 百分位数的差为 3，则 $x=$

A. 58 或 64　　B. 59 或 64　　C. 58　　D. 59

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+1$. 若 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和 $T_{10}=$

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{13}{42}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{5}{14}$

7. 窗花是贴在窗纸或窗户上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术之一. 图 1 是一个正八边形窗花隔断，图 2 是从窗花图中抽象出的几何图形的示意图. 已知正八边形 $ABCDEFGH$ 的边长为 2，P 是正八边形 $ABCDEFGH$ 边上任意一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为

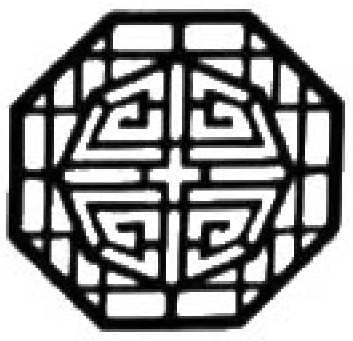


图 1

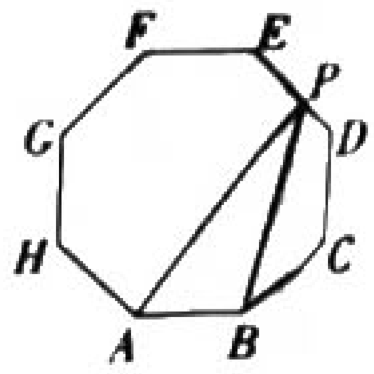


图 2

A. $8+6\sqrt{2}$　　B. $8+8\sqrt{2}$　　C. $12+6\sqrt{2}$　　D. $12+8\sqrt{2}$

8. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=24$，$BC=10$，$AD=13\sqrt{2}$，$\angle ACD=45°$，则四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为

A. 676π　　B. $\frac{676\pi}{3}$　　C. 169π　　D. $\frac{169\pi}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=x^3+kx^2+x+a$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则

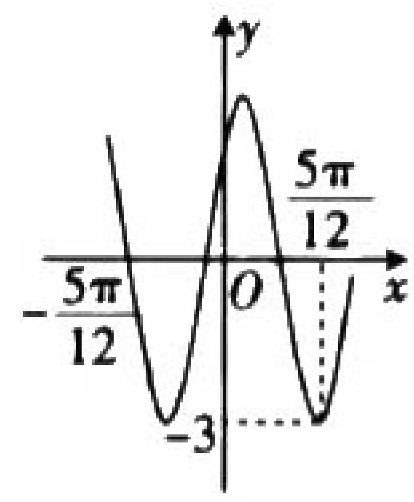
A. x_1 是 $f(x)$ 的极大值点，x_2 是 $f(x)$ 的极小值点

B. $x_1+x_2=\frac{1}{3}$

C. $x_1x_2=\frac{1}{3}$

D. $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则



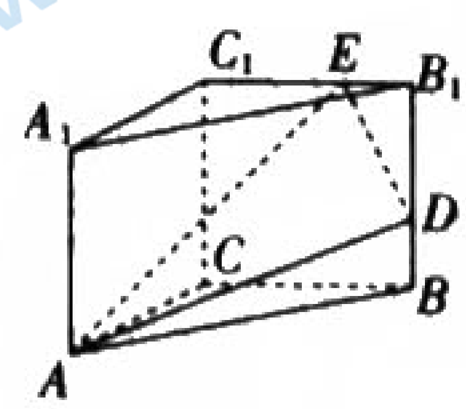
A. $A=3,\omega=3,\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. $f(\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. 直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

D. 函数 $f(x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递减

11. 我国古代数学著作《九章算术·商功》中，将底面是直角三角形的直三棱柱称为堑堵. 在如图所示的堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=CC_1=3$，D,E 分别是棱 BB_1,B_1C_1 上一点，且 $2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB_1}$，$\overrightarrow{C_1E}=\frac{2}{3}\overrightarrow{C_1B_1}$. 若 A,D,E 三点所在的平面与 A_1C_1 交于点 F，则



A. $\frac{|C_1F|}{|A_1F|}=\frac{4}{3}$

B. $\frac{|C_1F|}{|A_1F|}=\frac{3}{4}$

C. $AE\perp DF$

D. 点 C_1 到平面 ADE 的距离为 $\frac{6\sqrt{94}}{47}$

12. 已知 $a=5-8\ln 2$，$b=4-4\ln 3$，$c=e^{\frac{5}{4}}-4$，则

A. $b>a$　　B. $c>a$　　C. $b>c$　　D. $a>c$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 写出过 $A(4,0)$，$B(0,-4)$ 两点，且半径为 4 的一个圆的标准方程：____▲____.

14. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排，则甲不站两端且不与乙相邻的站法有____▲____种.

15. 定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(4-x)=0$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=-x^2+4$，则 $f(2021)=$____▲____.

16. 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线与双曲线 E 的左、右两支分别交于 A，B 两点，若 $|BF_2|:|AB|:|AF_2|=5:12:13$，则△$ABF_2$ 的面积为____▲____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比与等差数列 $\{b_n\}$ 的公差相等，且 $b_1=5a_1=5$，$b_5+b_7=2b_3+12$.

(1)求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

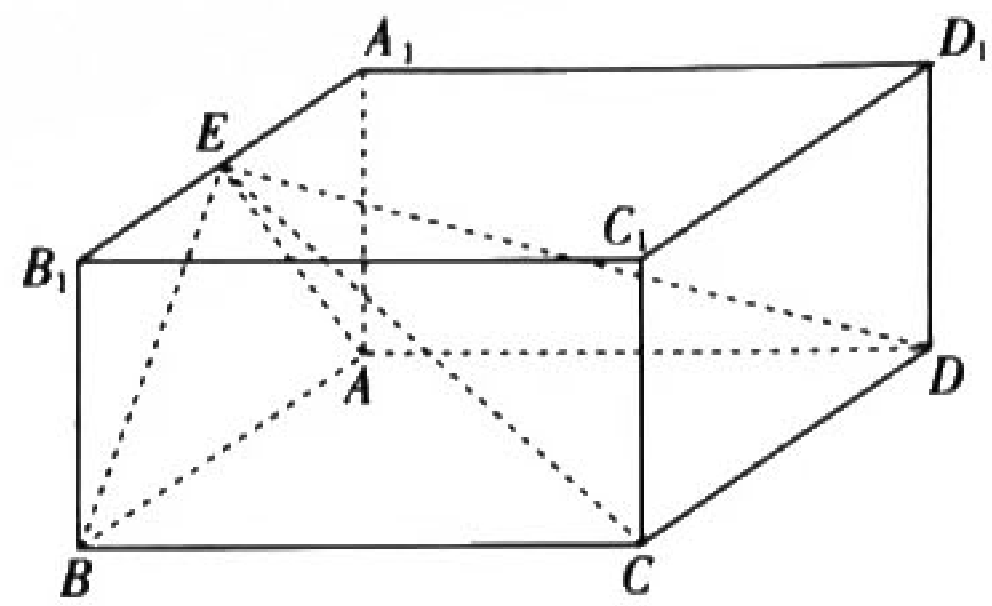
(2)若 $c_n=a_n\cdot(b_n-1)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

18.（12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$AB=2AA_1$，E 是 A_1B_1 的中点.

(1)证明：$BE\perp$ 平面 ADE.

(2)求钝二面角 $A-DE-C$ 的余弦值.



19.（12 分）

某短视频平台为更好地了解用户喜好，将不同类别的视频精准推送给相应感兴趣的用户，增强用户使用短视频软件的体验感，该短视频平台会将某一类别的短视频随机投放给不同的用户群体，根据用户观看视频的时长判断该用户是否对这类视频感兴趣，进而推断此类视频适合的观看群体，达到精准推送的目的(该短视频平台规定观看时长在 10 秒以内的为对推送内容不感兴趣的用户，观看时长在 10 秒及以上的为对推送内容感兴趣的用户). 为了解"萌宠类"短视频适合的用户群体，该平台将这一类别的视频随机推送给 100 名用户(其中男性 50 人，女性 50 人)，并得到用户的观看时长数据如表所示.

观看时长(单位:秒)	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,+∞)	总计
男性用户	9	21	14	4	2	50
女性用户	3	12	19	10	6	50

(1)根据上述表格，完成下面的列联表，并依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否认为该平台用户对"萌宠类"视频感兴趣与性别有关联？

性别	"萌宠类"视频		合计
	感兴趣	不感兴趣	
男			
女			
合计			

(2)从这 100 名用户里对"萌宠类"视频不感兴趣的用户中，按性别利用分层随机抽样的方法抽取 6 名用户，并在这 6 名用户中随机抽取 3 人. 记抽取的男性用户人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

参考公式和数据：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $(b-c)\sin B=b\sin(A-C)$.

(1)求角 A；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $\triangle ABC$ 的面积为 S，求 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{S}$ 的取值范围.

21.（12 分）

已知 $M(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{3})$，$N(\frac{\sqrt{15}}{2},1)$ 是椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两点.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)过椭圆 E 的上顶点 A 和右焦点 F 的直线与椭圆 E 交于另一个点 B，P 为直线 $x=5$ 上的动点，直线 AP，BP 分别与椭圆 E 交于 C(异于点 A)，D(异于点 B)两点，证明：直线 CD 经过点 F.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^{2x}-x^2+(a-2)x-1$.

(1)若 $a=0$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

(2)若 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>a\ln(x+1)$，求 a 的取值范围.

高三数学参考答案

1. B　因为 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x>-3\}$，所以 $A\cap B=\{x|-3<x<2\}$.

2. C　因为 $2z+(z-5)\mathrm{i}=0$，所以 $(2+\mathrm{i})z=5\mathrm{i}$，解得 $z=1+2\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{5}$.

3. C　由题可得，$mp=2$，即 $m=\dfrac{2}{p}$，则△AOB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 2(m+\dfrac{p}{2})=\dfrac{2}{p}+\dfrac{p}{2}=2$，解得 $p=2$.

4. D　设直线 $y=\mathrm{e}^{-2}x+b$ 与曲线 $y=\ln x-a$ 的切点为 $(x_0,\ln x_0-a)$，因为 $y=\ln x-a$，所以 $y'=\dfrac{1}{x}$，切线方程为 $y=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0-a=\dfrac{1}{x_0}x+\ln x_0-a-1$，所以 $\dfrac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{-2}$，$\ln x_0-a-1=b$，所以 $a+b=1$. 又 $a>0$，$b>0$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})(a+b)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是 4.

5. A　将已知的 6 个数从小到大排序为 45，49，53，57，61，79. 若 $x\leqslant 57$，则这组数据的第 80 百分位数与第 60 百分位数分别为 61 和 57，它们的差为 4，不符合条件；若 $x\geqslant 79$，则这组数据的第 80 百分位数与第 60 百分位数分别为 79 和 61，它们的差为 18，不符合条件；若 $57<x<79$，则这组数据的第 80 百分位数与第 60 百分位数分别为 x 和 61（或 61 和 x），则 $|x-61|=3$，解得 $x=58$ 或 $x=64$.

6. B　$a_1=S_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，所以 $a_n=\begin{cases}2, n=1,\\ 2n-1, n\geqslant 2,\end{cases}$ $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, n=1,\\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}), n\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $T_{10}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{21})=\dfrac{13}{42}$.

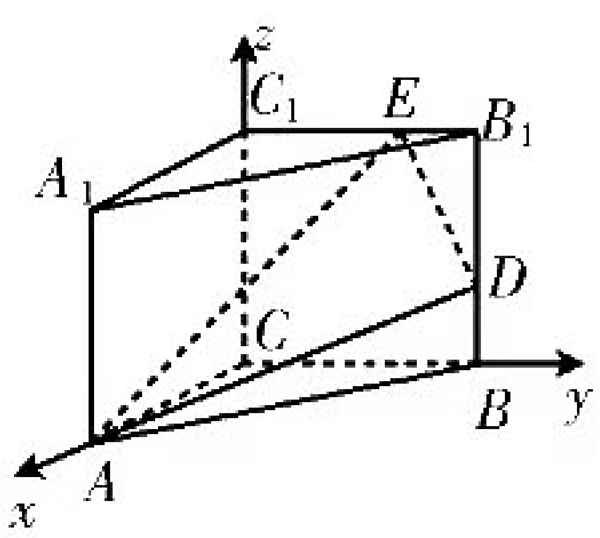
7. D　取 AB 的中点 O（图略），则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{PO}^2-1$. 当点 P 与点 E 或点 F 重合时，$\overrightarrow{PO}^2$ 取得最大值，且最大值为 $1^2+(2+2\sqrt{2})^2=13+8\sqrt{2}$，故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为 $12+8\sqrt{2}$.

8. A　因为 $AB\perp BC$，$AB=24$，$BC=10$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=26$. 又 $AD=13\sqrt{2}$，$\angle ACD=45^\circ$，所以 $\cos\angle ACD=\dfrac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}$，即 $CD^2-26\sqrt{2}CD+338=0$，解得 $CD=13\sqrt{2}$. 由 $AD=CD$，得 $\angle CAD=\angle ACD=45^\circ$，故 $AD\perp CD$. 取 AC 的中点 O（图略），可知 O 为四面体 $ABCD$ 外接球的球心，外接球的半径 $R=\dfrac{1}{2}AC=13$，所以四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=676\pi$.

9. AC　$f'(x)=3x^2+2kx+1$，因为 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，所以 $4k^2-12>0$，解得 $k>\sqrt{3}$ 或 $k<-\sqrt{3}$. 当 $x\in(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 故 x_1 是 $f(x)$ 的极大值点，x_2 是 $f(x)$ 的极小值点，且 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{3}$. 故选 AC.

10. BC　由题可知，$A=3$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{4}{5}\times(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{5\pi}{12})=\dfrac{2\pi}{3}$，解得 $\omega=3$，$f(\dfrac{5\pi}{12})=3\sin(\dfrac{5\pi}{4}+\varphi)=-3$，则 $\dfrac{5\pi}{4}+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，A 不正确. $f(\dfrac{\pi}{6})=3\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，B 正确. 当 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$3x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{2}$，所以直线 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，C 正确. $f(x+\dfrac{\pi}{4})=-\sin 3x$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$0<3x<\pi$，函数 $f(x+\dfrac{\pi}{4})$ 不单调，D 不正确.

11. AD　如图，以点 C 为坐标原点，CA，CB，CC_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $C-xyz$. 则 $A(3,0,0)$，$D(0,3,1)$，$E(0,2,3)$，$\overrightarrow{AD}=(-3,3,1)$，$\overrightarrow{AE}=(-3,2,3)$. 设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-3x+3y+z=0,\\ -3x+2y+3z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\dfrac{7}{3},2,1)$. 设 $F(a,0,3)$，则 $\overrightarrow{AF}=(a-3,0,3)$，由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{AF}$，得 $\dfrac{7}{3}(a-3)+3=0$，解得 $a=\dfrac{12}{7}$，则 $|C_1F|=\dfrac{12}{7}$，$|A_1F|=3-\dfrac{12}{7}=\dfrac{9}{7}$，所以 $\dfrac{|C_1F|}{|A_1F|}=\dfrac{4}{3}$，A 正确，B 不正确. $\overrightarrow{AE}=(-3,2,3)$，$\overrightarrow{DF}=(\dfrac{12}{7},$



$-3,2)$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=-\frac{36}{7}-6+6=-\frac{36}{7}\neq 0$，C 不正确. $\overrightarrow{AC_1}=(-3,0,3)$，$\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{4}{\sqrt{\frac{94}{9}}}=\frac{6\sqrt{94}}{47}$，故点 C_1 到平面 ADE 的距离为 $\frac{6\sqrt{94}}{47}$，D 正确.

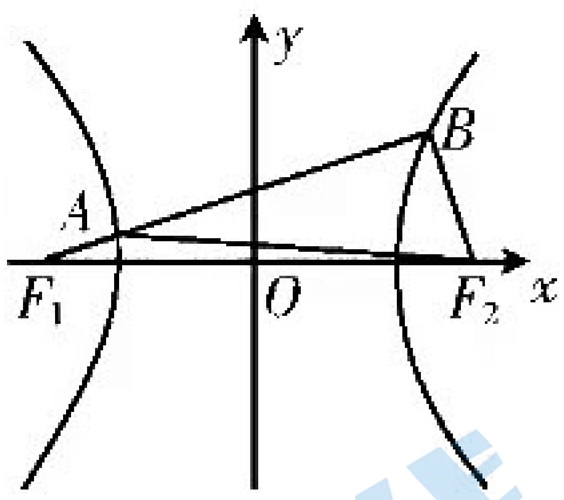
12. ABC　设函数 $f(x)=e^x-4x+1$，则 $f'(x)=e^x-4$. 由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln 4$；由 $f'(x)<0$，得 $x<\ln 4$. 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 4)$ 上单调递减，在 $(\ln 4,+\infty)$ 上单调递增. 设 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. 由 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$；由 $g'(x)<0$，得 $x>1$. 所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，则 $\ln\frac{3}{e}\leqslant\frac{3}{e}-1$，故 $\ln 3\leqslant\frac{3}{e}<\frac{5}{4}$. 因为 $\ln x\leqslant x-1$，所以 $\ln\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x}-1$，所以 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$（当且仅当 $x=1$ 时，等号成立），所以 $\ln\frac{4}{e}>1-\frac{e}{4}$，即 $\ln 4>2-\frac{e}{4}>\frac{5}{4}$. 因为 $a=f(\ln 4)$，$b=f(\ln 3)$，$c=f(\frac{5}{4})$，所以 $b>c>a$. 故选 ABC.

13. $x^2+y^2=16$（或 $(x-4)^2+(y+4)^2=16$）　注：答案不是两个，而是从中任选一个. 线段 AB 的垂直平分线的方程为 $x+y=0$，可设圆心坐标为 $(a,-a)$，圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y+a)^2=16$，则 $(4-a)^2+a^2=16$，解得 $a=0$ 或 $a=4$，故所求圆的标准方程为 $x^2+y^2=16$ 或 $(x-4)^2+(y+4)^2=16$.

14. 36　由题可知不同的站法共有 $C_3^1C_2^1A_3^3=36$ 种.

15. -3　由 $f(x)+f(4-x)=0$，得 $f(x)=-f(4-x)=-f(x-4)=f(x-8)$，所以 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，则 $f(2021)=f(8\times 252+5)=f(5)=-f(-1)=-f(1)=-3$.

16. $\frac{12}{5}$　如图，因为 $|BF_2|:|AB|:|AF_2|=5:12:13$，所以 $AB\perp BF_2$. 设 $|BF_2|=5x$，$|AB|=12x$，$|AF_2|=13x$，由 $|BF_1|-|BF_2|=|AF_2|-|AF_1|$，得 $|AF_1|=3x$，则 $|BF_1|=15x$. 由 $|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$，得 $250x^2=4c^2$. 又 $\begin{cases}|BF_1|-|BF_2|=10x=2a,\\ c^2=a^2+3,\end{cases}$ 所以 $a^2=2$，$c^2=5$，$x^2=\frac{2}{25}$，故 $\triangle ABF_2$ 的面积 $S=30x^2=\frac{12}{5}$.



17. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\{b_n\}$ 的公差为 d，

则 $2b_1+10d=2b_1+4d+12$，解得 $d=2$. ………… 1 分

因为 $b_1=5$，所以 $b_n=b_1+(n-1)d=2n+3$. ………… 3 分

因为 $a_1=1$，$q=d=2$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. ………… 5 分

(2) 由 (1) 可知，$c_n=a_n\cdot(b_n-1)=(n+1)2^n$， ………… 6 分

令 $S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(n+1)2^n$，

则 $2S_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)2^{n+1}$， ………… 7 分

则 $-S_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)2^{n+1}=4+\frac{4-2^{n+1}}{1-2}-(n+1)2^{n+1}=-n\cdot 2^{n+1}$， ………… 9 分

所以 $S_n=n\cdot 2^{n+1}$，即数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $n\cdot 2^{n+1}$. ………… 10 分

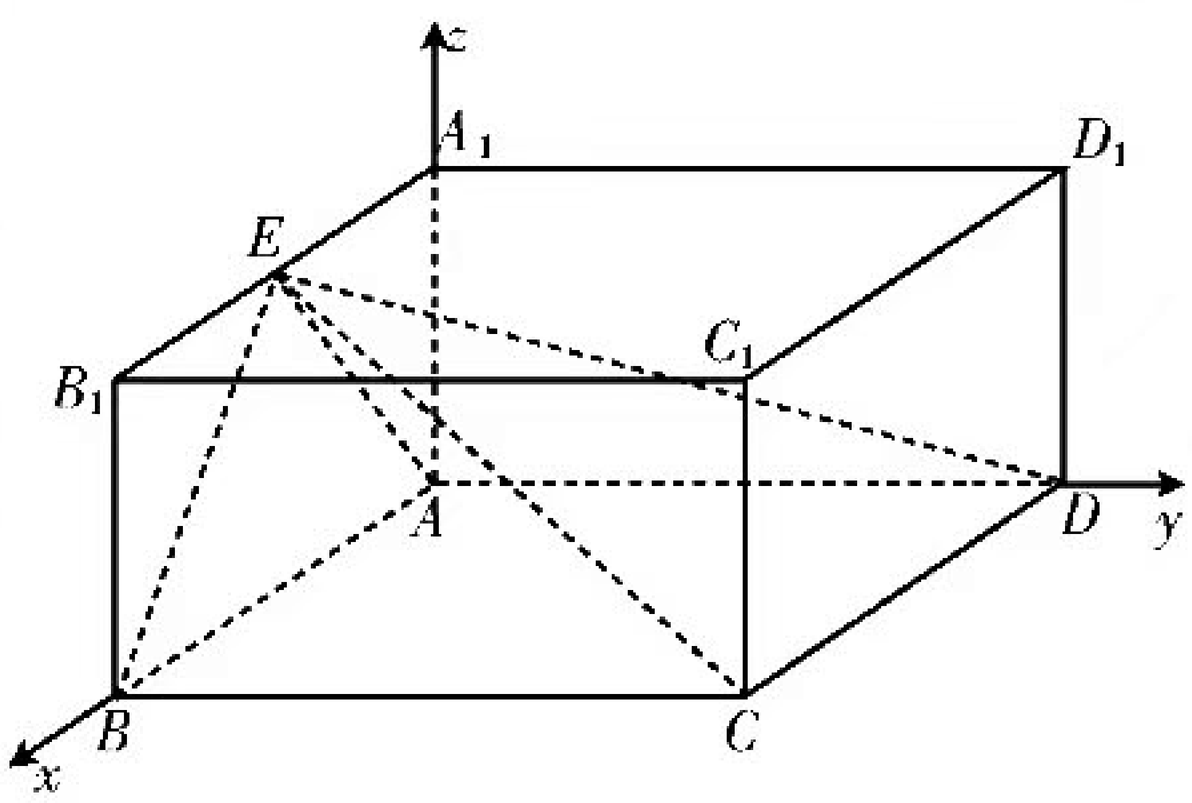
18. (1) 证明：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $AD\perp$ 平面 ABB_1A_1. ………… 1 分

因为 $BE\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AD\perp BE$. ………… 2 分

又 $AB=2AA_1$，E 是 A_1B_1 的中点，所以 $AE=BE=\sqrt{2}AA_1$，所以 $AE^2+BE^2=AB^2$，故 $AE\perp BE$. ………… 4 分

因为 $AE\cap AD=A$，所以 $BE\perp$ 平面 ADE. ………… 6 分

(2) 解：如图，以点 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系.



不妨令 $AB=2$，则 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$E(1,0,1)$，

………… 7 分

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$. ………… 8 分

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}2y_1=0,\\x_1-2y_1+z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$. ………… 9 分

设平面 CDE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}x_2-2y_2+z_2=0,\\2x_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,2)$. ………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ………… 11 分

故钝二面角 $A-DE-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ………… 12 分

19. 解：(1)由题可得，列联表完成如下：

性别	“萌宠类”视频		合计
	感兴趣	不感兴趣	
男	20	30	50
女	35	15	50
合计	55	45	100

………… 3 分

零假设为 H_0：该平台用户对“萌宠类”视频感兴趣与性别无关联.

根据列联表的数据，经计算得到 $\chi^2=\dfrac{100\times(20\times15-30\times35)^2}{50\times50\times55\times45}\approx9.091<10.828=x_{0.001}$. ………… 5 分

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为该平台用户对“萌宠类”视频感兴趣与性别无关联. ………… 6 分

(2)由题可知，抽取的 6 名用户中男性用户人数为 $\dfrac{30}{30+15}\times6=4$，则女性用户人数为 2.

再从中抽取 3 人，则 X 的可能取值为 1,2,3， ………… 7 分

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$， ………… 9 分

则 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

………… 10 分

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$. ………… 12 分

20. 解：(1)因为 $(b-c)\sin B=b\sin(A-C)$，所以 $(b-c)\sin B=b(\sin A\cos C-\cos A\sin C)$， ………… 1 分

所以 $b^2-bc=ab\cos C-bc\cos A=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}=a^2-c^2$. ………… 3 分

又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$. ………… 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)由(1)可知，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$， ………… 7 分

则 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{S}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{bc}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2b^2+2c^2-bc}{bc}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. ………… 8 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<C<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 整理得 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$. ………… 9 分

因为 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin(A+C)}{\sin C}=\dfrac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{b}{c}<2$. ………… 10 分

令 $\frac{b}{c}=t$，则函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增，所以 $y\in[2,\frac{5}{2})$，即 $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\in[2,\frac{5}{2})$. ………… 11分

故 $\frac{a^2+b^2+c^2}{S}$ 的取值范围为 $[4\sqrt{3},\frac{16\sqrt{3}}{3})$. ………… 12分

21. (1)解：由题可得 $\begin{cases}\frac{5}{4a^2}+\frac{3}{b^2}=1,\\ \frac{15}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ ………… 1分

解得 $\begin{cases}a=\sqrt{5},\\ b=2,\end{cases}$ ………… 3分

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. ………… 4分

(2)证明：由(1)可知，$A(0,2)$，$F(1,0)$，则直线 AF 的方程为 $y=-2x+2$.

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=-2x+2,\end{cases}$ 整理得 $24x^2-40x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{5}{3}$，则 $B(\frac{5}{3},-\frac{4}{3})$. ………… 5分

设 $P(5,t)$，直线 AP 的方程为 $y=\frac{t-2}{5}x+2$，直线 BP 的方程为 $y=\frac{3t+4}{10}x-\frac{t+4}{2}$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$. ………… 6分

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=\frac{t-2}{5}x+2,\end{cases}$ 整理得 $(t^2-4t+24)x^2+20(t-2)x=0$，可得 $C(\frac{-20t+40}{t^2-4t+24},\frac{-2t^2+8t+32}{t^2-4t+24})$. ………… 8分

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=\frac{3t+4}{10}x-\frac{t+4}{2},\end{cases}$ 整理得 $(9t^2+24t+96)x^2-(30t^2+160t+160)x+25t^2+200t=0$，则 $\frac{5x_2}{3}=\frac{25t^2+200t}{9t^2+24t+96}$，从而 $D(\frac{5t^2+40t}{3t^2+8t+32},\frac{4t^2-16t-64}{3t^2+8t+32})$. ………… 10分

因为 $\frac{y_1-0}{x_1-1}=\frac{2t^2-8t-32}{t^2+16t-16}$，$\frac{y_2-0}{x_2-1}=\frac{2t^2-8t-32}{t^2+16t-16}$，所以直线 CD 经过点 F. ………… 12分

22. (1)证明：因为 $f(x)=e^{2x}-x^2-2x-1$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-2x-2=2(e^{2x}-x-1)$. ………… 1分

令函数 $g(x)=e^{2x}-x-1$，则 $g'(x)=2e^{2x}-1$. ………… 2分

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)>g(0)=0$，即 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………… 4分

故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$. ………… 5分

(2)解：$f(x)>a\ln(x+1)$ 等价于 $e^{2x}-x^2+(a-2)x-1>a\ln(x+1)$ 等价于 $e^{2x}+a\ln e^x>a\ln(x+1)+(x+1)^2$. ………… 7分

令函数 $h(x)=x^2+a\ln x$，则 $e^{2x}+a\ln e^x>a\ln(x+1)+(x+1)^2$ 等价于 $h(e^x)>h(x+1)$. ………… 8分

令函数 $\varphi(x)=e^x-x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即 $e^x>x+1>1$ 恒成立. ………… 9分

若 $a\geqslant-2$，则 $h'(x)=2x+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+a}{x}\geqslant0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，$h(x)$ 单调递增，$h(e^x)>h(x+1)$ 恒成立，符合题意. ………… 10分

若 $a<-2$，则 $h'(x)=2x+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+a}{x}=\frac{2(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}{x}$. 当 $x\in(0,\sqrt{-a})$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(\sqrt{-a},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. 此时 $h(e^{\ln\sqrt{-a}})=h(\sqrt{-a})\leqslant h(\ln\sqrt{-a}+1)$，这与 $h(e^x)>h(x+1)$ 恒成立矛盾，不符合题意. ………… 11分

综上所述，a 的取值范围为 $[-2,+\infty)$. ………… 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。