理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,\ y\geqslant x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

2．复数 $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是

A．$-\dfrac{3}{10}$　　B．$-\dfrac{1}{10}$　　C．$\dfrac{1}{10}$　　D．$\dfrac{3}{10}$

3．在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是

A．$p_1=p_4=0.1$，$p_2=p_3=0.4$　　B．$p_1=p_4=0.4$，$p_2=p_3=0.1$

C．$p_1=p_4=0.2$，$p_2=p_3=0.3$　　D．$p_1=p_4=0.3$，$p_2=p_3=0.2$

4．Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 Logistic 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I(t^*)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为（$\ln 19\approx 3$）

A．60　　B．63　　C．66　　D．69

5．设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为

A．$(\dfrac{1}{4},0)$　　B．$(\dfrac{1}{2},0)$　　C．$(1,0)$　　D．$(2,0)$

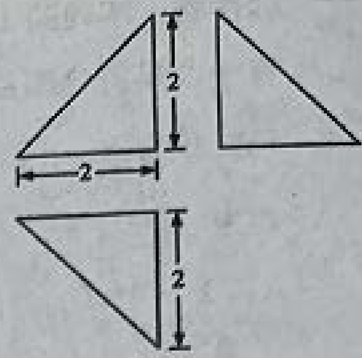
6．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$

A．$-\dfrac{31}{35}$　　B．$-\dfrac{19}{35}$　　C．$\dfrac{17}{35}$　　D．$\dfrac{19}{35}$

7．在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则$\cos B=$

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是



A．$6+4\sqrt{2}$

B．$4+4\sqrt{2}$

C．$6+2\sqrt{3}$

D．$4+2\sqrt{3}$

9．已知$2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则$\tan\theta=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

10．若直线l与曲线$y=\sqrt{x}$和圆$x^2+y^2=\frac{1}{5}$都相切，则l的方程为

A．$y=2x+1$　　B．$y=2x+\frac{1}{2}$　　C．$y=\frac{1}{2}x+1$　　D．$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

11．设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\sqrt{5}$．$P$是$C$上一点，且$F_1P\perp F_2P$．若$\triangle PF_1F_2$的面积为4，则$a=$

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

12．已知$5^5<8^4$，$13^4<8^5$．设$a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\2x-y\geqslant 0,\\x\leqslant 1,\end{cases}$则$z=3x+2y$的最大值为__________．

14．$(x^2+\frac{2}{x})^6$的展开式中常数项是__________（用数字作答）．

15．已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为__________．

16．关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称．

② $f(x)$ 的图像关于原点对称．

③ $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称．

④ $f(x)$ 的最小值为 2．

其中所有真命题的序号是__________．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$．

（1）计算 a_2，a_3，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明；

（2）求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

18．（12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次 / 空气质量等级	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为1或2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为3或4，则称这天“空气质量不好”．根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次$\leqslant 400$	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

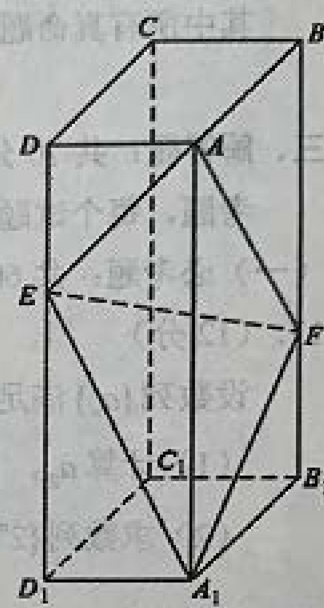
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19．（12分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E，F分别在棱DD_1，BB_1上，且$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$．

（1）证明：点C_1在平面AEF内；

（2）若$AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角$A-EF-A_1$的正弦值．



20．（12分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\,(0<m<5)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点．

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积．

21．（12分）

设函数$f(x)=x^3+bx+c$，曲线$y=f(x)$在点$(\dfrac{1}{2},f(\dfrac{1}{2}))$处的切线与$y$轴垂直．

（1）求b；

（2）若$f(x)$有一个绝对值不大于1的零点，证明：$f(x)$所有零点的绝对值都不大于1．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t-t^2, \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$（$t$ 为参数且 $t\neq 1$），C 与坐标轴交于 A，B 两点.

（1）求 $|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

设 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a，b，c 的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

理科数学试题参考答案

一、选择题

1．C　2．D　3．B　4．C　5．B　6．D

7．A　8．C　9．D　10．D　11．A　12．A

二、填空题

13．7　14．240　15．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　16．②③

三、解答题

17．解：

（1）$a_2=5$，$a_3=7$.

猜想 $a_n=2n+1$．由已知可得

$$a_{n+1}-(2n+3)=3[a_n-(2n+1)],$$

$$a_n-(2n+1)=3[a_{n-1}-(2n-1)],$$

……

$$a_2-5=3(a_1-3).$$

因为 $a_1=3$，所以 $a_n=2n+1$.

（2）由（1）得 $2^n a_n=(2n+1)2^n$，所以

$$S_n=3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\times2^n. \quad ①$$

从而

$$2S_n=3\times2^2+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n+1)\times2^{n+1}. \quad ②$$

①-②得

$$-S_n=3\times2+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n-(2n+1)\times2^{n+1}.$$

所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$.

18．解：

（1）由所给数据，该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率的估计值如下表：

空气质量等级	1	2	3	4
概率的估计值	0.43	0.27	0.21	0.09

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为

$$\frac{1}{100}(100\times20+300\times35+500\times45)=350.$$

（3）根据所给数据，可得 2×2 列联表：

	人次≤400	人次>400
空气质量好	33	37
空气质量不好	22	8

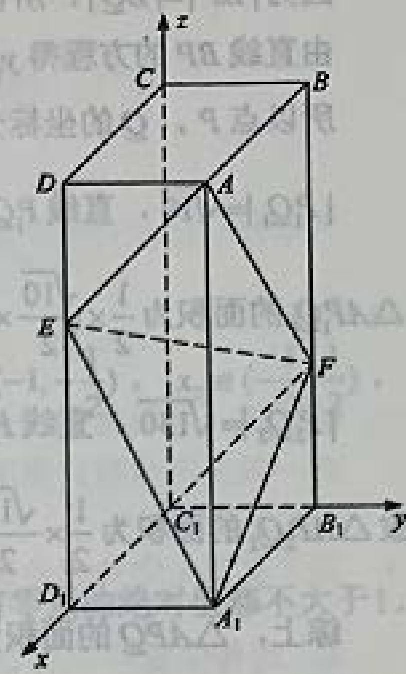
根据列联表得

$$K^2=\frac{100\times(33\times8-22\times37)^2}{55\times45\times70\times30}\approx5.820.$$

由于 $5.820>3.841$，故有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

19．解：

设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，如图，以 C_1 为坐标原点，$\overrightarrow{C_1D_1}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系 C_1-xyz．



（1）连结 C_1F，则 $C_1(0,0,0)$，$A(a,b,c)$，$E(a,0,\frac{2}{3}c)$，

$F(0,b,\frac{1}{3}c)$，$\overrightarrow{EA}=(0,b,\frac{1}{3}c)$，$\overrightarrow{C_1F}=(0,b,\frac{1}{3}c)$，得

$$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{C_1F},$$

因此 $EA\,/\!/\,C_1F$，即 A，E，F，C_1 四点共面，所以点 C_1 在平面 AEF 内．

（2）由已知得 $A(2,1,3)$，$E(2,0,2)$，$F(0,1,1)$，$A_1(2,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{A_1F}=(-2,0,1)$．

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 AEF 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y-z=0,\\ -2x-2z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}_1=(-1,-1,1)$．

设 $\boldsymbol{n}_2$ 为平面 A_1EF 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\end{cases}$ 同理可取 $\boldsymbol{n}_2=(\frac{1}{2},2,1)$．

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

20．解：

（1）由题设可得 $\dfrac{\sqrt{25-m^2}}{5}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，得 $m^2=\dfrac{25}{16}$，所以 C 的方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1.$$

（2）设 $P(x_P,y_P)$，$Q(6,y_Q)$，根据对称性可设 $y_Q>0$，由题意知 $y_P>0$．

由已知可得 $B(5,0)$，直线 BP 的方程为 $y=-\dfrac{1}{y_Q}(x-5)$，所以 $|BP|=y_P\sqrt{1+y_Q^2}$，$|BQ|=\sqrt{1+y_Q^2}$．

因为$|BP|=|BQ|$，所以$y_P=1$，将$y_P=1$代入C的方程，解得$x_P=3$或-3．

由直线BP的方程得$y_Q=2$或8．

所以点P，Q的坐标分别为$P_1(3,1)$，$Q_1(6,2)$；$P_2(-3,1)$，$Q_2(6,8)$．

$|P_1Q_1|=\sqrt{10}$，直线P_1Q_1的方程为$y=\dfrac{1}{3}x$，点$A(-5,0)$到直线P_1Q_1的距离为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故

$\triangle AP_1Q_1$的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10}=\dfrac{5}{2}$．

$|P_2Q_2|=\sqrt{130}$，直线P_2Q_2的方程为$y=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{10}{3}$，点$A$到直线$P_2Q_2$的距离为$\dfrac{\sqrt{130}}{26}$，

故$\triangle AP_2Q_2$的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{130}}{26}\times\sqrt{130}=\dfrac{5}{2}$．

综上，$\triangle APQ$的面积为$\dfrac{5}{2}$．

21．解：

（1）$f'(x)=3x^2+b$．

依题意得$f'(\dfrac{1}{2})=0$，即$\dfrac{3}{4}+b=0$．

故$b=-\dfrac{3}{4}$．

（2）由（1）知$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}$．

令$f'(x)=0$，解得$x=-\dfrac{1}{2}$或$x=\dfrac{1}{2}$．

$f'(x)$与$f(x)$的情况为：

x	$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$	$-\dfrac{1}{2}$	$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$	$\dfrac{1}{2}$	$(\dfrac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$c+\dfrac{1}{4}$	↘	$c-\dfrac{1}{4}$	↗

因为$f(1)=f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4}$，所以当$c<-\dfrac{1}{4}$时，$f(x)$只有大于1的零点．

因为$f(-1)=f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4}$，所以当$c>\dfrac{1}{4}$时，$f(x)$只有小于$-1$的零点．

由题设可知$-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

当$c=-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点$-\frac{1}{2}$和1.

当$c=\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点-1和$\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$时，$f(x)$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，且$x_1\in(-1,-\frac{1}{2})$，$x_2\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$x_3\in(\frac{1}{2},1)$.

综上，若$f(x)$有一个绝对值不大于1的零点，则$f(x)$所有零点的绝对值都不大于1.

22．解：

（1）因为$t\neq1$，由$2-t-t^2=0$得$t=-2$，所以C与y轴的交点为$(0,12)$；由$2-3t+t^2=0$得$t=2$，所以C与x轴的交点为$(-4,0)$.

故$|AB|=4\sqrt{10}$.

（2）由（1）可知，直线AB的直角坐标方程为$\frac{x}{-4}+\frac{y}{12}=1$，将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入，得直线$AB$的极坐标方程

$$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0.$$

23．解：

（1）由题设可知，a，b，c均不为零，所以

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]\\&=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\\&<0.\end{aligned}$$

（2）不妨设$\max\{a,b,c\}=a$，因为$abc=1$，$a=-(b+c)$，所以$a>0$，$b<0$，$c<0$．由$bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，可得$abc\leqslant\frac{a^3}{4}$，故$a\geqslant\sqrt[3]{4}$，所以$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.