

# 广东省 2022 届高三综合能力测试 (二)

## 数学试题

2021 年 12 月

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

### 注意事项:

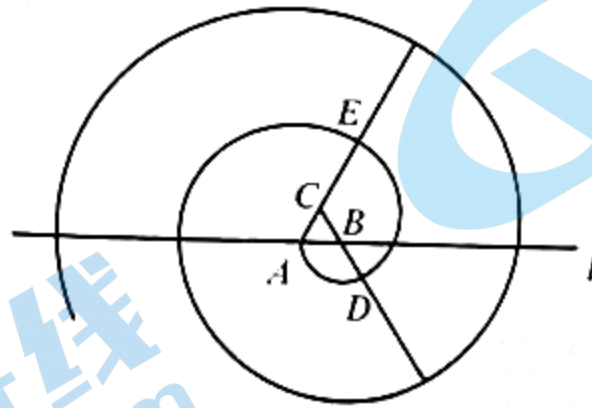
1. 答卷前, 考生要务必填写答题卷上的有关项目.
2. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卷各题目指定区域内; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液, 不按以上要求作答的答案无效.
4. 请考生保持答题卷的整洁, 考试结束后, 将答题卷交回.

### 第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题意要求的.

1. 已知集合  $A = \{0, 2, 4, 6\}$ ,  $B = \{n \in \mathbf{N} \mid 2^n \leq 33\}$ , 则集合  $A \cap B$  的子集个数为 ( )  
 A. 4                                      B. 6                                      C. 7                                      D. 8
2. 若复数  $z$  满足  $(3+4i)z = |3+4i|$ , 则复平面内表示  $z$  的点位于 ( )  
 A. 第一象限                              B. 第二象限                              C. 第三象限                              D. 第四象限
3. 在正方形  $ABCD$  中,  $E$  为  $DC$  的中点, 若  $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ , 则  $\lambda + \mu$  的值为 ( )  
 A.  $-1$                                       B.  $-\frac{1}{2}$                                       C.  $\frac{1}{2}$                                       D.  $1$
4. 某地对生活垃圾使用填埋和环保两种方式处理, 该地 2020 年产生的生活垃圾为 20 万吨, 其中 15 万吨以填埋方式处理, 5 万吨以环保方式处理. 预计每年生活垃圾的总量比前一年增加 1 万吨. 同时, 因垃圾处理技术越来越进步, 要求从 2021 年起每年通过环保方式处理的生活垃圾量是前一年的  $q$  倍, 若要使得 2024 年通过填埋方式处理的生活垃圾量不高于当年生活垃圾总量的 50%, 则  $q$  的值至少为 ( )  
 A.  $\sqrt[3]{2.4}$                                       B.  $\sqrt[3]{2.5}$                                       C.  $\sqrt[3]{2.4}$                                       D.  $\sqrt[3]{2.5}$
5. 函数  $y = \log_2(4^x + 16^x) - 3x$  的图象 ( )  
 A. 关于原点对称                              B. 关于  $y$  轴对称  
 C. 关于直线  $x=2$  对称                              D. 关于点  $(0,1)$  对称
6. 下雨天开车, 由于道路条件变差, 司机的视线受阻, 会给交通安全带来很大的影响. 交警统计了某个路口 300 天的天气和交通情况, 300 天中有 90 天下雨, 有 50 天发生了交通事故, 其中有 30 天既下雨又发生了交通事故, 则估计该路口“下雨天发生交通事故的概率”是“非雨天发生交通事故概率”的 ( )  
 A. 1.5 倍                                      B. 2.5 倍                                      C. 3.5 倍                                      D. 4.5 倍

7. 某数学兴趣小组设计了一种螺线，作法如下：在水平直线  $l$  上取长度为1的线段  $AB$ ，并作等边三角形  $ABC$ ，然后以点  $B$  为圆心， $BA$  为半径逆时针画圆弧，交线段  $CB$  的延长线于点  $D$ ；再以点  $C$  为圆心， $CD$  为半径逆时针画圆弧，交线段  $AC$  的延长线于点  $E$ ，以此类推，得到的螺线如图所示。当螺线与直线  $l$  有6个交点（不含  $A$  点）时，则螺线长度最小值为（ ）



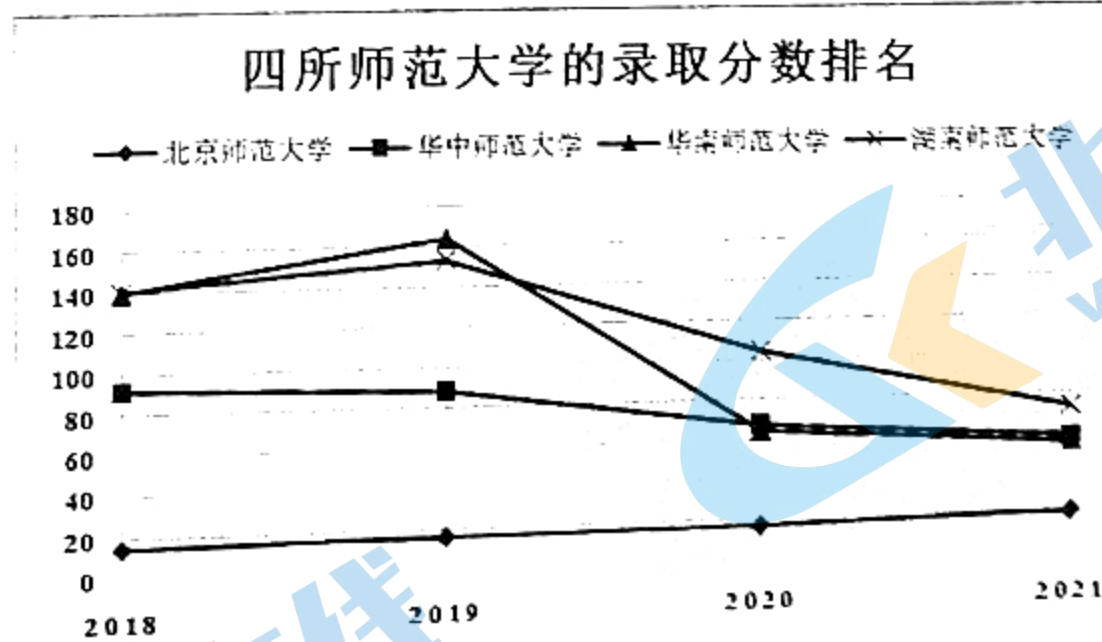
- A.  $30\pi$       B.  $\frac{100\pi}{3}$       C.  $\frac{110\pi}{3}$       D.  $40\pi$

8. 已知异面直线  $a, b$  所成的角为  $60^\circ$ ，其公垂线段  $MN$  的长度为2，长度为4的线段  $PQ$  的两端点分别在直线  $a, b$  上运动，则  $PQ$  中点的轨迹为（ ）  
（注：公垂线段指与异面直线垂直且相交的线段）

- A. 直线      B. 圆      C. 椭圆      D. 双曲线

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 近年来，报考教师资格证的人数越来越多，教师行业逐渐升温。下图给出了近四年四所师范院校的录取分数排名，则（ ）



- A. 近四年北京师范大学录取分数排名变化最不明显  
 B. 近四年湖南师范大学录取分数排名的平均值最大  
 C. 近四年华南师范大学录取分数排名的极差值最大  
 D. 近四年华中师范大学的生源质量呈现下降的趋势
10. 设  $\alpha$  是给定的平面， $A, B$  是不在  $\alpha$  内的任意两点，则（ ）
- A. 在  $\alpha$  内存在直线与直线  $AB$  平行      B. 在  $\alpha$  内存在直线与直线  $AB$  相交  
 C. 在  $\alpha$  内存在直线与直线  $AB$  垂直      D. 存在过直线  $AB$  的平面与  $\alpha$  垂直

11. 已知  $f(x) = \sin(2x + \varphi) + \cos 2x$ , 则 ( )
- A.  $\forall \varphi \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$
- B.  $\forall \varphi \in \mathbf{R}$ ,  $|f(x)| \leq 2$
- C.  $\exists \varphi \in (0, \pi)$ , 使得  $f(x)$  为偶函数
- D.  $\exists \varphi \in (0, \pi)$ , 使得  $f(x)$  为奇函数
12. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} - a_n \in \{1, 3, 5\}$ ,  $S_k = 100$ , 则  $k$  可以等于 ( )
- A. 8
- B. 9
- C. 11
- D. 12

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$  展开式的第 3 项为 \_\_\_\_\_.
14. 已知  $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , 则  $\cos 108^\circ =$  \_\_\_\_\_.
15. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 设  $k \in \mathbf{R}$ , 直线  $l_1: x + ky = 0$  与直线  $l_2: kx - y - 2k + 1 = 0$  交于点  $P$ . 圆  $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ , 则  $|PO| \cdot |PC|$  的最大值为 \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = 4x^3 + ax + b$ , 当  $x \in [-1, 1]$  时,  $|f(x)| \leq 1$  恒成立, 则  $a + b =$  \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某商场在双十一期间举办线下优惠活动, 顾客购买一件不低于 100 元的商品就有资格参加一次抽奖活动, 中奖能享受当件商品五折优惠. 活动规则如下: 抽奖箱中装有大小质地完全相同的 10 个球, 分别编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 购物者在箱中摸两个球, 球的编号之和为 11 视为中奖, 其余情况不中奖.

- (1) 求抽奖活动中奖的概率;
- (2) 某顾客准备分别购买两件原价为 200 元、300 元的商品, 依次参加了两次抽奖活动, 求总付款额的分布列.

18. (12 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q \neq 1$ ,  $a_1$  是  $a_2, a_3$  的等差中项, 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

- (1) 求  $q$ ;
- (2) 证明: 数列  $\{S_n\}$  中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列.

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 边长均为正整数, 且 $b=4$ .

- (1) 若角 $B$ 为钝角, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
- (2) 若 $A=2B$ , 求 $a$ .

20. (12分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 $AA_1C_1C$ 是边长为4的正方形. 再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知, 并作答.

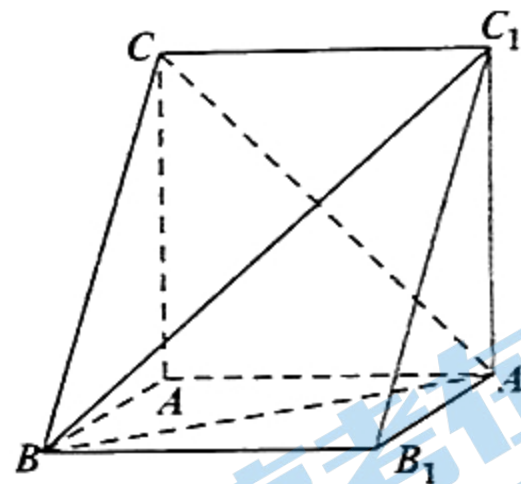
- (1) 求证:  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ;
- (2) 求直线  $BC_1$  与平面  $A_1BC$  所成角的正弦值.

条件①:  $BC = BA_1 = 2\sqrt{5}$ ;

条件②:  $BC_1 \perp A_1C$ ;

条件③: 平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ .

注: 如果选择多种方案分别解答, 那么按第一种方案解答计分.



21. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $F$  为左焦点, 上顶点  $P$  到  $F$  的距离为 2, 且离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;
- (2) 设斜率为  $k$  的动直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 且  $|PM| = |PN|$ , 求  $k$  的取值范围.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x + e^{-x} - ax^2$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

- (1) 当  $a=1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若  $f(x) \geq 2\cos x$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

# 广东省 2022 届高三综合能力测试 (二)

## 数 学 参 考 答 案 与 评 分 标 准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	B	C	A	C

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ABC	CD	BC	ABD

三、填空题：本大共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13.  $\frac{15}{4}x$       14.  $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$       15.  $\frac{5}{2}$       16.  $\frac{1}{4}$

三、解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分。解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】(1) 用  $x, y$  表示两个球的编号，则样本点可以用  $(x, y)$  表示，.....1 分  
 样本空间  $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, x < y\}$ ， $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$ ，.....2 分  
 设事件  $A =$ “顾客能中奖”， $A = \{(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)\}$ ， $n(A) = 5$ ，.....3 分  
 所以  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$ ，.....4 分

(2) 设总付款额为  $X$ ，则  $X$  的所有取值为：250, 350, 400, 500，.....5 分  
 设事件  $A_1 =$ “购买 200 元商品时中奖”，事件  $A_2 =$ “购买 300 元商品时中奖”，.....6 分  
 $P(A_1) = P(A_2) = P(A) = \frac{1}{9}$ ， $A_1$  与  $A_2$  相互独立，则.....7 分

$$P(X = 250) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}, \quad P(X = 350) = P(\overline{A_1} A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{81},$$

$$P(X = 400) = P(A_1 \overline{A_2}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) = \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{81}, \quad P(X = 500) = P(\overline{A_1} \overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81},$$

所以总付款额  $X$  的分布列为：

$X$	250	350	400	500
$P$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{64}{81}$

.....10 分

18. 【解析】(1) 由题得  $2a_1 = a_2 + a_3$ ，则  $2a_1 = a_1q + a_1q^2$ ，.....2 分  
 因为  $a_1 \neq 0$ ，所以  $q^2 + q - 2 = 0$ ，解得  $q = 1$  (舍去) 或  $q = -2$ 。  
 所以公比  $q = -2$ 。.....4 分

(2) 由题意， $S_n = \frac{a_1[1 - (-2)^n]}{1 - (-2)} = \frac{a_1}{3} \cdot [1 - (-2)^n]$ ，.....5 分  
 当  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$  时， $S_n = S_{2k+1} = \frac{a_1}{3} \cdot (1 + 2^{2k+1})$ ；  
 当  $n = 2k + 2, k \in \mathbb{N}$  时， $S_n = S_{2k+2} = \frac{a_1}{3} \cdot (1 - 2^{2k+2})$ 。.....7 分

当数列  $\{S_n\}$  中的连续三项为  $S_{2k-1} = \frac{a_1}{3}(1+2^{2k-1})$ ,  $S_{2k} = \frac{a_1}{3}(1-2^{2k})$ ,  $S_{2k+1} = \frac{a_1}{3}(1+2^{2k+1})$ ,  
 由  $1-2^{2k+2} + 1+2^{2k+3} = 2+2^{2k+1}(2^2-2) = 2(1+2^{2k+1})$ , 可得  $S_{2k+2}, S_{2k+1}, S_{2k+3}$  成等差数列; .....9分

当数列  $\{S_n\}$  中的连续三项为  $S_{2k+2} = \frac{a_1}{3}(1-2^{2k+2})$ ,  $S_{2k+3} = \frac{a_1}{3}(1+2^{2k+3})$ ,  $S_{2k+4} = \frac{a_1}{3}(1-2^{2k+4})$ ,  
 由  $1-2^{2k+4} + 1+2^{2k+3} = 2-2^{2k+2}(2^2-2) = 2(1-2^{2k+2})$ , 可得  $S_{2k+4}, S_{2k+3}, S_{2k+5}$  成等差数列. ....11分

综上, 数列  $\{S_n\}$  中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列. ....12分

另解: 由题意,  $S_n = \frac{a_1[1-(-2)^n]}{1+2} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^n]$ , .....5分

则  $S_{n+1} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+1}]$ ,  $S_{n+2} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+2}]$ . ....7分

从而  $S_{n+1} + S_{n+2} = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+1}] + \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+2}] = \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^{n+1} + 1-(-2)^{n+2}]$   
 $= \frac{a_1}{3} \cdot [2-(-2)^{n+1}(1-2)] = \frac{a_1}{3} \cdot [2+(-2)^{n+1}] = 2 \cdot \frac{a_1}{3} \cdot [1-(-2)^n] = 2S_n$ . ....10分

则  $S_{n+1}, S_n, S_{n+2}$  或  $S_{n+2}, S_n, S_{n+1}$  成等差数列. ....11分

所以数列  $\{S_n\}$  中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列. ....12分

19. 【解析】(1) 由角  $B$  为钝角, 则  $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < 0$ , 即  $a^2+c^2 < 16$ ; .....1分

又因为  $a+c > 4$ , 即  $\begin{cases} a^2+c^2 < 16 \\ a+c > 4 \end{cases}$ , 且  $a, c \in \mathbb{N}^*$ , 因此  $\begin{cases} a=2 \\ c=3 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a=3 \\ c=2 \end{cases}$  符合题意. ....2分

故  $\cos B = \frac{13-16}{12} = -\frac{1}{4}$ , 则  $\sin B = \sqrt{1-(-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , .....4分

因此  $\triangle ABC$  的面积为  $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ . ....5分

(2) 由  $A=2B$ , 得  $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$ , 由正弦定理, 可得  $a = 2b \cos B$ ; .....6分

由余弦定理, 得  $a = 2b \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ , 因为  $b=4$ , 则  $a^2(c-4) = 4(c^2-16)$ . ....7分

若  $c=4$ , 则  $B=C$ , 故  $\begin{cases} A=2B \\ B=C \\ A+B+C=\pi \end{cases}$ , 则  $B=C = \frac{\pi}{4}$ ,  $A = \frac{\pi}{2}$ , 此时  $a = 4\sqrt{2}$ , 不符合题意; .....9分

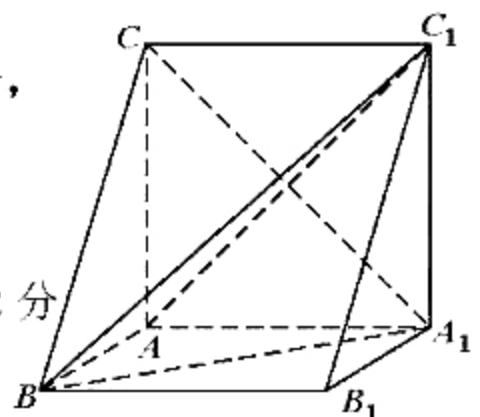
所以  $c \neq 4$ , 由  $a^2(c-4) = 4(c^2-16)$ , 得  $a = 2\sqrt{c+4}$ , 又  $c > a > b$ , 即  $c > 2\sqrt{c+4} > 4$ , 则  $0 < c < 2$ .  
 因为  $a, c \in \mathbb{N}^*$ , 故当  $c=5$  时, 有  $a=6$ , 而  $b=4$ , 故能构成三角形, 故  $a=6$ . ....12分

20. 【解析】若选择条件①②: 则不能解决两个问题, 本题得分为 0 分.

若选择条件②③: 则可以解决 (1) 问, 不能解决 (2) 问, (2) 问得分 0 分,

(1) 问按下面标准给分.

(1) 因为平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ , 平面  $ABC \cap$  平面  $AA_1C_1C = AC$ ,  
 $AA_1 \perp AC$ , 所以  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ , 又  $AB \subset$  平面  $ABC$ , 则  $AA_1 \perp AB$ . ...2分  
 连接  $AC_1$ , 则  $A_1C \perp AC_1$ , 又  $BC_1 \perp A_1C$ ,  $AC_1 \cap BC_1 = C_1$ ,



所以  $A_1C \perp$  平面  $ABC_1$ ，又  $AB \subset$  平面  $ABC_1$ ，则  $A_1C \perp AB$ 。.....5分  
 又  $A_1C \cap AA_1 = A_1$ ，所以  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$ 。.....6分

若选择条件①③：则可以解决两个问题，按下面标准给分。

(1) 因为平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ，平面  $ABC \cap$  平面  $AA_1C_1C = AC$ ， $AA_1 \perp AC$ ，  
 所以  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ，又  $AB \subset$  平面  $ABC$ ，则  $AA_1 \perp AB$ 。.....2分

因为  $\begin{cases} BC = BA_1 \\ AC = AA_1 \\ AB = AB \end{cases}$ ，所以  $\triangle ABC \cong \triangle ABA_1$ ，则  $\angle BAC = \angle BAA_1$ ，即  $AB \perp AC$ 。.....3分

又  $AC \cap AA_1 = A$ ，所以  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$ 。.....6分

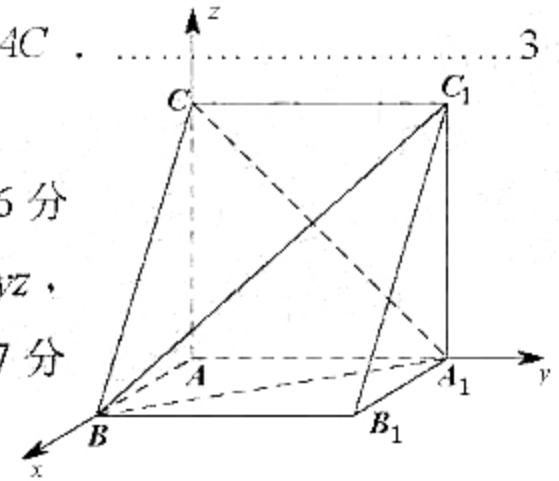
(2) 由 (1) 和题设，可以点  $A$  为原点，如图建立空间直角坐标系  $A-xyz$ ，  
 且  $AB=2$ 。.....7分

则  $B(2,0,0)$ ， $C(0,0,4)$ ， $A_1(0,4,0)$ ， $C_1(0,4,4)$ ，

所以  $\overrightarrow{BC} = (-2,0,4)$ ， $\overrightarrow{BA_1} = (-2,4,0)$ ， $\overrightarrow{BC_1} = (-2,4,4)$ 。.....9分

设平面  $A_1BC$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ，则由  $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x + 4z = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = -2x + 4y = 0 \end{cases}$ ，可取  $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ 。.....11分

设直线  $BC_1$  与平面  $A_1BC$  所成角为  $\theta$ ，则  $\sin \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{4}{6 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$ 。.....12分



若选择条件①②③：则本题得分为 0 分。

21. 【解析】(1) 由上顶点  $P$  到  $F$  的距离为 2，可得  $a=2$ ，.....1分

又  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故  $c = \sqrt{3}$ ，从而  $b=1$ 。.....3分

所以椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。.....4分

(2) 当  $k=0$  时，由椭圆的对称性，显然成立。.....5分

当  $k \neq 0$  时，设直线  $l$  为  $y = kx + m$ ，联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$ ，得  $(4k^2 + 1)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0$ ，.....6分

则  $\Delta = 64m^2k^2 - 16(4k^2 + 1)(m^2 - 1) > 0$ ，即  $4k^2 - m^2 + 1 > 0$  (\*)，.....7分

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，则  $x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{4k^2 + 1}$ ，

$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = -\frac{8mk^2}{4k^2 + 1} + 2m = \frac{2m}{4k^2 + 1}$ ，.....8分

故线段  $MN$  的中点为  $Q(\frac{-4mk}{4k^2 + 1}, \frac{m}{4k^2 + 1})$ ，从而直线  $PQ$  的斜率为  $k_{PQ} = \frac{\frac{m}{4k^2 + 1} - 1}{\frac{-4mk}{4k^2 + 1}} = \frac{m - 4k^2 - 1}{-4mk}$ ，.....9分

由  $|PM| = |PN|$ ，得  $PQ \perp MN$ ，即  $k_{PQ} \cdot k = -1$ ，即  $\frac{m - 4k^2 - 1}{-4m} = -1$ ，故  $m = -\frac{4k^2 + 1}{3}$ 。.....10分

由(\*)式, 即  $4k^2 - m^2 + 1 > 0$ , 可得  $4k^2 + 1 - \frac{(4k^2 + 1)^2}{9} > 0$ , 即  $\frac{(4k^2 + 1)(8 - 4k^2)}{9} > 0$ ,

故  $8 - 4k^2 > 0$ , 解得  $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ , 且  $k \neq 0$ . ..... 11分

综上所述,  $k$  的取值范围为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . ..... 12分

22. 【解析】(1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$ ,  $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ , ..... 1分

令  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$ , 当且仅当  $x=0$  时取等号,

因此,  $g(x)$  是增函数, 即  $f'(x)$  是增函数. .... 2分

又因为  $f'(0) = 0$ , 所以当  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ . .... 3分

所以  $f(x)$  的递增区间为  $(0, +\infty)$ , 递减区间为  $(-\infty, 0)$ . .... 4分

(2) 由(1)可知,  $e^x + e^{-x} - x^2 \geq 2$ , 令  $F(x) = f(x) - 2\cos x$ , 则  $F'(x) = e^x - e^{-x} - 2ax + 2\sin x$ ,

令  $h(x) = F'(x)$ , 则  $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2a + 2\cos x$ , ..... 5分

①当  $a \leq 2$  时,  $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2a + 2\cos x \geq x^2 + 2\cos x - 2$ , ..... 6分

令  $\varphi(x) = x^2 + 2\cos x - 2$ , 则  $\varphi'(x) = 2x - 2\sin x$ , 令  $p(x) = \varphi'(x)$ , 则  $p'(x) = 2 - 2\cos x \geq 0$ ,

因此  $p(x)$  是增函数, 即  $\varphi'(x)$  是增函数.

又因为  $\varphi'(0) = 0$ , 所以当  $x > 0$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $\varphi'(x) < 0$ ,

则  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增.

于是,  $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ . ..... 7分

进而有  $h'(x) \geq 0$ ,  $h(x)$  是增函数, 即  $F'(x)$  是增函数,

又因为  $F'(0) = 0$ , 所以当  $x > 0$  时,  $F'(x) > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $F'(x) < 0$ ,

则  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增.

于是,  $F(x) \geq F(0) = 0$ , 符合题意. .... 8分

②当  $a > 2$  时,  $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2a + 2\cos x \leq e^x + e^{-x} - 2a + 2$ , ..... 9分

因为当  $0 < x < \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a})$  时,  $e^x + e^{-x} - 2a + 2 < 0$ ,

所以  $h(x)$  即  $F'(x)$  在  $(0, \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a}))$  上是减函数, ..... 10分

则当  $0 < x < \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a})$  时,  $F'(x) < F'(0) = 0$ , 进而  $F(x)$  在  $(0, \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a}))$  上是减函数,

于是, 当  $0 < x < \ln(a-1 + \sqrt{a^2 - 2a})$  时,  $F(x) < F(0) = 0$ , 不合题意. .... 11分

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 2]$ . ..... 12分