2024 北京首都师大附中高三（上）期末

数　　学

第Ⅰ卷（共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的．

1. 在复平面内，复数 $(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$ 的共轭复数对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

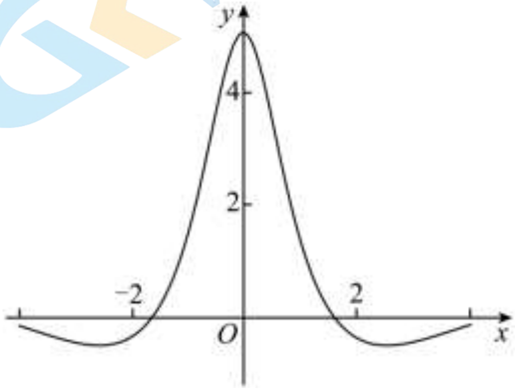
2. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，集合 $B=\left\{y \middle| y=x+\dfrac{1}{x}, x>0\right\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$（　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $(-\infty,1]$

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公比 $|q|\neq 1$．若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$，则 m=

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

4. 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　）



A. $\dfrac{5(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}$　　B. $\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$

C. $\dfrac{5(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}$　　D. $\dfrac{5\cos x}{x^2+1}$

5. 已知抛物线 $C: y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，点 $P(2,y_0)$ 在抛物线 C 上，且 $|PF|=\dfrac{3p}{4}$，则 $p=$（　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

6. 若 $(x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则 $a_2+a_4+a_6=$（　）

A. 64　　B. 33　　C. 32　　D. 31

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，C 的一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$（　）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

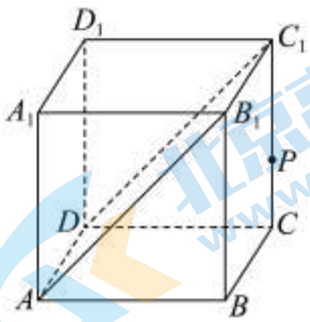
8. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为非零向量，则“$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$”是“向量 $\vec{a},\vec{c}$ 同向”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 若点 N 为点 M 在平面 α 上的正投影，则记 $N=f_{\alpha}(M)$.如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，记平面 AB_1C_1D 为 β，平面 $ABCD$ 为 γ，点 P 是棱 CC_1 上一动点（与 C、C_1 不重合）

$Q_1=f_{\gamma}\left[f_{\beta}(P)\right]$，$Q_2=f_{\beta}\left[f_{\gamma}(P)\right]$.给出下列三个结论：



①线段 PQ_2 长度的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

②存在点 P 使得 PQ_1 // 平面 β；

③存在点 P 使得 $PQ_1\perp PQ_2$.

其中，所有正确结论的序号是

A. ①②③　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②

10. 甲和乙是同班同学，该班级共 43 名同学．一次两人玩一个游戏，甲先在心里想好该班某一位同学的名字，乙来猜，其中乙可以提问 k 个问题，问题必须一次性问完（意思是乙问完所有问题后才能得到每个问题的答案）．对每个问题，甲只能回答“是”或“不是”．若存在一种提问的策略，使得无论一开始甲想的是谁，乙一定能够猜出，则 k 的最小值是（　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

第II卷（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 如图是小王同学在篮球赛中得分记录的茎叶图，他在这 10 场比赛中得分的 40% 分位数为___________分.

0	3	8	7	5			
1	0	1	2	0	0	4	

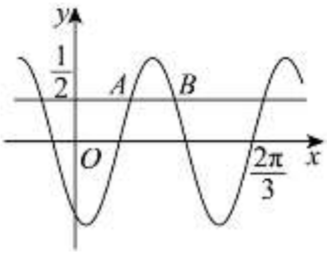
12. 函数 $y=\lg(2x+1)+\lg x$ 的零点是____________.

13. 已知一扇矩形窗户与地面垂直，高为 1.5m，下边长为 1m，且下边距地面 1 m．若某人观察到窗户在平

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

行光线的照射下，留在地面上的影子恰好为矩形，其面积为 1.5 m ^{2}，则窗户与地面影子之间光线所形成的几何体的体积为_______ m^3.

14. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，如图 A,B 是直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 的两个交点，若 $\left|AB\right|=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\omega=$____________，$f\left(\pi\right)=$____________.



15. 已知曲线 $C: x|x|-4y|y|=4$.

①若 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 C 上一点，则 $x_0-2y_0>0$；

②曲线 C 在 $\left(0,-1\right)$ 处的切线斜率为 0；

③ $\exists m\in \mathrm{R}, x-2y+m=0$ 与曲线 C 有四个交点；

④直线 $x-2y+m=0$ 与曲线 C 无公共点当且仅当 $m\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(0,+\infty\right)$.

其中所有正确结论的序号是______________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16. 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为内角 A,B,C 所对的边，且满足 $\sin A\cos\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）试从条件①②③中选出两个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一，并以此为依据求 $\triangle ABC$ 的面积.（注：只需写出一个选定方案即可）

条件①：$c=\sqrt{3}b$；条件②：$B=\dfrac{\pi}{4}$；条件③：$a=2$.

17. 为了调查居民对垃圾分类的了解程度，某社区居委会从 A 小区与 B 小区各随机抽取 300 名社区居民（分为 18-40 岁、41 岁-70 岁及其他人群各 100 名）参与问卷测试，按测试结果将居民对垃圾分类的了解程度分为“比较了解”（得分不低于 60 分）和“不太了解”（得分低于 60 分），并将问卷得分不低于 60 分绘制频数分布表如下

分组	A 小区频数	B 小区频数
18-40 岁人群	60	30
41-70 岁人群	80	90
其他人群	30	50

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

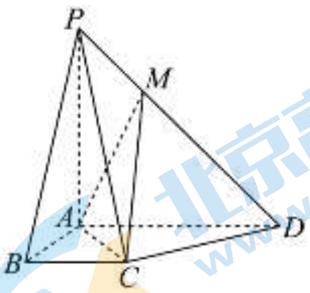
假设用频率估计概率，所有居民的问卷测试结果互不影响.

（1）从 A 小区随机抽取一名居民参与问卷测试，估计其对垃圾分类比较了解的概率；

（2）从 A、B 小区 41-70 岁人群中各随机抽取一名居民，记其对垃圾分类比较了解的居民人数为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望；

（3）设事件 E 为“从 A 小区的三个年龄组随机抽取两组，且每个年龄组各随机抽取一名居民，则这两名居民均为对垃圾分类比较了解”，设事件 F 为“从 B 小区的三个年龄组随机抽取两组，且每个年龄组各随机抽取一名居民，则这两名居民均为对垃圾分类比较了解”，试比较事件 E 发生的概率 $P(E)$ 与事件 F 发生的概率 $P(F)$ 的大小，并说明理由.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$BC//AD, AD=2BC$，M 是棱 PD 上靠近点 P 的三等分点.



（1）证明：$PB//$ 平面 MAC；

（2）设平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l，若平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD, AB\perp AD, PA\perp AD$，$PA=AD=2AB=2$，求 l 与平面 MAC 所成角的正弦值.

19. 已知函数 $f(x)=x-1+\dfrac{a}{e^x}$（$a\in R, e$ 为自然对数的底数）

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(x))$ 处的切线平行于 x 轴，求 a 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值；

（3）当 $a=1$ 时，若直线 $l: y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，求 k 的最大值.

20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, A, B$ 为椭圆的左、右顶点，C 为椭圆的上顶点，原点 O 到直线 AC 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）P 为椭圆上一点，直线 AC 与直线 PB 交于点 Q，直线 PC 与 x 轴交于点 T，设直线 PB, QT 的斜率分别为 k_1, k_2，已知 $k_1+\dfrac{1}{2}=\lambda k_2$，求 λ.

21. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数．且对于 $\forall i, j\in \mathbf{N}^*, i<j$，都存在 $k>j$，使得 $a_k=a_ia_j-a_i-a_j$，则称数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P.

（1）判断下列数列是否满足性质 P，并说明理由.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

①$a_n = n$，$n = 1$，2，3，…；

②$b_n = n + 2$，$n = 1$，2，3，….

（2）若数列$\{a_n\}$满足性质P，且$a_1 = 1$，求证：集合$\{n \in \mathbf{N}^* |\ a_n = 3\}$为无限集；

（3）若周期数列$\{a_n\}$满足性质P，请写出数列$\{a_n\}$的通项公式（不需要证明）.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案

第I卷（共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的．

1.【答案】D

【分析】由复数代数形式的乘法运算化简复数z，进而得到其共轭复数$\overline{z}$所对应的点所在象限.

【详解】令$z=(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$，

则$z=(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})=5+5\mathrm{i}$，

则$(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$的共轭复数为$\overline{z}=5-5\mathrm{i}$，

所以$\overline{z}$对应的点位于第四象限.

故选：D.

2.【答案】A

【分析】计算集合B,再计算结果，判断选项.

【详解】由$x>0$，则$y=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$，当且仅当$x=\frac{1}{x}$，即$x=1$取等号，

则$\complement_{\mathbf{R}}B=\{y|y<2\}$，

故$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{-1,0,1\}$.

故选：A

3.【答案】C

【详解】试题分析：由等比数列的性质可知$a_m=a_1a_2a_3a_4a_5=(a_1)^5q^{1+2+3+4}=a_1q^{10}=a_{11}$，答案选C.

考点：等比数列的性质

4.【答案】D

【分析】由图知函数为偶函数，应用排除，先判断B中函数的奇偶性，再判断A、C中函数在$(0,+\infty)$上的函数符号排除选项，即得答案.

【详解】由图知：函数图象关于y轴对称，其为偶函数，且$f(-2)=f(2)<0$，

由$\frac{5\sin(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{5\sin x}{x^2+1}$且定义域为R，即B中函数为奇函数，排除；

当$x>0$时$\frac{5(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}>0$、$\frac{5(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}>0$，即A、C中$(0,+\infty)$上函数值为正，排除；

故选：D

5.【答案】C

【分析】利用抛物线的定义到焦点的距离等于到准线的距离计算可得.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【详解】抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，

因为点$P(2,y_0)$在抛物线C上，且$|PF|=\frac{3p}{4}$，

所以$\frac{3p}{4}=2+\frac{p}{2}$，解得$p=8$.

故选：C.

6.【答案】D

【分析】给x分别赋值$0,1,-1$，即可得到一系列方程组，通过对方程组的解决，问题即可得到解决.

【详解】因为$(x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，

所以令$x=0$可得$a_0=1$①，

令$x=1$可得$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$②，

令$x=-1$可得$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=2^6$③，

②+③可得$a_0+a_2+a_4+a_6=2^5$①，

将①代入④可得$a_2+a_4+a_6=2^5-1=31$.

故选：D

7.【答案】D

【分析】根据离心率得出双曲线渐近线方程，再由圆心到直线的距离及圆半径可求弦长.

【详解】由$e=\sqrt{5}$，则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=5$，

解得$\frac{b}{a}=2$，

所以双曲线的一条渐近线为$y=2x$，

则圆心$(2,3)$到渐近线的距离$d=\frac{|2\times2-3|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

故选：D

8.【答案】B

【分析】判断当$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$时，$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$，不能得$\vec{a},\vec{c}$同向，当$\vec{a},\vec{c}$同向时，可得$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$，从而得出答案.

【详解】当$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$时，$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$，

但此时向量$\vec{a},\vec{c}$不一定同向；反之，当向量$\vec{a},\vec{c}$同向时，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$成立，所以“$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$”是“向量$\vec{a},\vec{c}$同向”的必要不充分条件.

故选：B

9.【答案】D

【分析】以点D为坐标原点，DA、DC、DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系$D-xyz$，设点P的坐标为$(0,1,a)(0<a<1)$，求出点Q_1、Q_2的坐标，然后利用向量法来判断出命题①②③的正误.

【详解】取C_1D的中点Q_2，过点P在平面AB_1C_1D内作$PE\perp C_1D$，再过点E在平面CC_1D_1D内作$EQ_1\perp CD$，垂足为点Q_1.

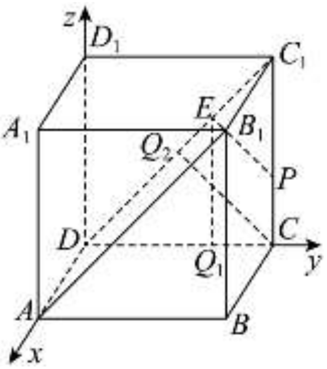
在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD\perp$平面CC_1D_1D，$PE\subset$平面CC_1D_1D，$\therefore PE\perp AD$，

又$\because PE\perp C_1D$，$AD\cap C_1D=D$，$\therefore PE\perp$平面AB_1C_1D，即$PE\perp\beta$，$\therefore f_\beta(P)=E$，

同理可证$EQ_1\perp\gamma$，$CQ\perp\beta$，则$f_\gamma\left[f_\beta(P)\right]=f_\gamma(E)=Q_1$，$f_\beta\left[f_\gamma(P)\right]=f_\beta(C)=Q_2$.

以点D为坐标原点，DA、DC、DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系$D-xyz$，

设$CP=a(0<a<1)$，则$P(0,1,a)$，$C(0,1,0)$，$E\left(0,\frac{a+1}{2},\frac{a+1}{2}\right)$，$Q_1\left(0,\frac{a+1}{2},0\right)$，$Q_2\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.



对于命题①，$|PQ_2|=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}$，$\because 0<a<1$，则$-\frac{1}{2}<a-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$，则$0\le\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$，所以，

$|PQ_2|=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，命题①正确；

对于命题②，$\because CQ_2\perp\beta$，则平面β的一个法向量为$\overrightarrow{CQ_2}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{PQ_1}=\left(0,\frac{a-1}{2},-a\right)$，令$\overrightarrow{CQ_2}\cdot\overrightarrow{PQ_1}=\frac{1-a}{4}-\frac{a}{2}=\frac{1-3a}{4}=0$，解得$a=\frac{1}{3}\in(0,1)$，

所以，存在点P使得PQ_1// 平面β，命题②正确；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

对于命题③，$\overrightarrow{PQ_2}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1-2a}{2}\right)$，令 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=\frac{1-a}{4}+\frac{a(2a-1)}{2}=0$，

整理得 $4a^2-3a+1=0$，该方程无解，所以，不存在点 P 使得 $PQ_1\perp PQ_2$，命题③错误.

故选：D.

【点睛】本题考查立体几何中线面关系、线线关系的判断，同时也涉及了立体几何中的新定义，利用空间向量法来处理是解题的关键，考查推理能力，属于中等题.

10.【答案】B

【分析】将 43 名学生进行二进制编号，再依次询问 6 个位置的编号是否是 1，从而确定答案.

【详解】因为 $2^5=32<43, 2^6=64>43$，

所以可以将 43 名学生进行六位二进制编号，

第 i $(i=1,2,3,4,5,6)$ 个问题询问甲所想的同学的编号从左到右的第 i 位二进制编号是否是 1，

问完 6 个问题，则甲所想的同学的编号即确定.

故选：B

第II卷（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】9

【分析】利用茎叶图与百分位数的定义即可得解.

【详解】根据茎叶图，小王同学在篮球赛中得分记录从小到大排列为：$3,5,7,8,10,10,10,11,12,14$，

因为 $10\times40\%=4$，所以他在这 10 场比赛中得分的 40% 分位数为 $\frac{8+10}{2}=9$.

故答案为：9.

12.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】利用对数运算及零点含义可得答案.

【详解】由题意可得函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

$y=\lg(2x+1)+\lg x=\lg(2x^2+x)$，令 $y=0$ 可得 $2x^2+x=1$，解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-1$（舍），

故答案为：$\frac{1}{2}$.

13.【答案】$\frac{21}{8}$

【分析】根据题意，所得几何体体积为两个直三棱柱体积之差求解即可.

【详解】因为窗户下边长 1m，所以留在底面上影子矩形的长为 1m，

又影子矩形的面积为 1.5 m²，所以矩形的宽为 1.5 m，

设影子矩形靠近墙的边长到窗户底部墙的距离为 x，则 $\frac{x}{x+1.5}=\frac{1}{2.5}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

解得 $x=1$，

所以窗户与地面影子之间光线所形成的几何体为两个底面为直角三角形，高为 1 的直三棱柱体积之差，其中大三棱柱底面直角三角形两直角边为 2.5m，小三棱柱底面直角三角形两直角边长为 1m，

所以 $V=\frac{1}{2}\times2.5^2\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{21}{8}\left(\text{m}^3\right)$.

故答案为：$\frac{21}{8}$

14.【答案】 ①. ±4 ②. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right),B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，依题可得，$x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，结合 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的解可得 $\omega\left(x_2-x_1\right)=\frac{2\pi}{3}$，从而得到 ω 的值，再根据 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ 以及 $f\left(0\right)<0$，即可得 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$，进而求得 $f\left(\pi\right)$.

【详解】设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right),B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，由 $|AB|=\frac{\pi}{6}$ 可得 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，

由 $\sin x=\frac{1}{2}$ 可知，$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，由图可知，

当 $\omega>0$ 时，$\omega x_2+\varphi-\left(\omega x_1+\varphi\right)=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，即 $\omega\left(x_2-x_1\right)=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\omega=4$；

当 $\omega<0$ 时，$\omega x_1+\varphi-\left(\omega x_2+\varphi\right)=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，即 $\omega\left(x_1-x_2\right)=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\omega=-4$；

综上：$\omega=\pm4$；

因为同一图象对应的解析式是一样的，所以此时不妨设 $\omega=4$，则 $f\left(x\right)=\sin\left(4x+\varphi\right)$，

因为 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以 $\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi$，即 $\varphi=-\frac{8}{3}\pi+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$.

所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{8}{3}\pi+k\pi\right)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi+k\pi\right)$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$ 或 $f\left(x\right)=-\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$，

又因为 $f\left(0\right)<0$，所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$，

$\therefore f\left(\pi\right)=\sin\left(4\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：±4；$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.【答案】①②

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【分析】分x、y的符号情况化简曲线C的方程，从而可画出曲线C的图象，结合图象逐一分析即可.

【详解】当$x\ge 0$，$y\ge 0$时，曲线C的方程为 $x^2-4y^2=4$，即$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，曲线C是双曲线的一部分；

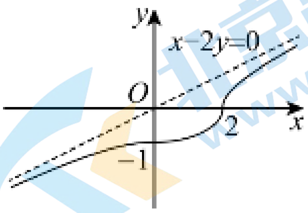
当$x\ge 0$，$y<0$时，曲线C的方程为 $x^2+4y^2=4$，即$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，曲线C是椭圆的一部分；

当$x<0$，$y\ge 0$时，曲线C的方程为 $-x^2-4y^2=4$，曲线C不存在；

当$x<0$，$y<0$时，曲线C的方程为 $-x^2+4y^2=4$，即$y^2-\frac{x^2}{4}=1$，曲线C是双曲线的一部分；

双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$和$\frac{y^2}{4}-x^2=1$有一条共同的渐近线$x-2y=0$，

综上，可作出曲线C的图象，如图：



由图象可知曲线C的图象上的点都在直线$x-2y=0$的下方，

所以当$P(x_0,y_0)$在曲线C上时，有$x_0-2y_0>0$，故①正确；

设过点$(0,-1)$的直线l的方程是$y=kx-1$，若直线l与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$相切，

则由$\begin{cases}y=kx-1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2-8kx=0$，

$\Delta=64k^2=0$，得$k=0$；

若直线l与双曲线$y^2-\frac{x^2}{4}=1$相切，

则由$\begin{cases}y=kx-1\\ y^2-\frac{x^2}{4}=1\end{cases}$得$(4k^2-1)x^2-8kx=0$，则$4k^2-1\ne 0$且$\Delta=64k^2=0$，得$k=0$，

此时直线l的方程是$y=-1$，与曲线C相切，故②正确；

直线$x-2y+m=0$是表示与直线$x-2y=0$平行或重合的直线，

由曲线C的图象可知，直线$x-2y+m=0$与曲线C不可能有四个交点，故③错误；

设直线$x-2y+n=0$与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$相切，则

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

由$\begin{cases}x-2y+n=0\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得$8y^2-4ny+n^2-4=0$，

所以$\Delta=16n^2-32(n^2-4)=0$，解得$n=\pm2\sqrt{2}$，结合曲线C的图象，取$n=-2\sqrt{2}$，

即直线$x-2y-2\sqrt{2}=0$与曲线C相切，

所以若直线$x-2y+m=0$与曲线C无公共点，结合曲线C的图象，

$m\geq0$或$m<-2\sqrt{2}$，故④错误.

故答案为：①②.

【点睛】方法点睛：1. 曲线方程中带有绝对值，一般是分绝对值里的式子的符号讨论去绝对值；

2. 直线与曲线的交点问题常采用数形结合的方法.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.【答案】(1) $\dfrac{\pi}{6}$

(2) 答案见解析

【分析】(1) 利用三角函数恒等变换化简得$\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，进而求得解 A；

(2) 选择①②，$\triangle ABC$不唯一；选②③，利用正弦定理与三角形面积公式即可得解；选①③，利用余弦定理与三角形面积公式即可得解

【小问 1 详解】

因为$\sin A\cos\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4},\sin A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\dfrac{1}{2}\sin A\right)=\dfrac{1}{4}$，

则$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A-\dfrac{1}{2}\sin^2A=\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 2A}{2}=\dfrac{1}{4}$，

故$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A+\dfrac{1}{2}\cos 2A=1,\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

由于$0<A<\pi,\dfrac{\pi}{6}<2A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$，

所以$2A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},A=\dfrac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

若选①②，

三个已知条件是$A=\dfrac{\pi}{6},B=\dfrac{\pi}{4},c=\sqrt{3}b$，没有一个是具体的边长，无法确定$\triangle ABC$.

若选②③，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

三个已知条件是 $A=\frac{\pi}{6},B=\frac{\pi}{4},a=2$，由正弦定理得 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}}\Rightarrow b=2\sqrt{2}$，

此时 $\triangle ABC$ 存在且唯一，$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$；

若选①③，

三个已知条件是 $A=\frac{\pi}{6},c=\sqrt{3}b,a=2$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $4=b^2+3b^2-2b\times\sqrt{3}b\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $b=2$（负值舍去），则 $c=2\sqrt{3}$，

此时 $\triangle ABC$ 存在且唯一，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.

17.【答案】（1）$\frac{17}{30}$

（2）分布列见解析，期望值 $E\left(X\right)=\frac{17}{10}$；

（3）$P\left(F\right)<P\left(E\right)$，理由见解析；

【分析】（1）由频数分布表计算出样本中的频率，即可估计出其概率；

（2）分别估计出 A、B 小区 41-70 岁人群中对垃圾分类比较了解的概率，求出随机变量对应取值的概率，即可得出分布列和期望值；

（3）分别估计出 A、B 小区三个不同群体对垃圾分类比较了解的概率，根据题意由概率乘法公式分别计算可得 $P\left(E\right),P\left(F\right)$，即可得出结论.

【小问 1 详解】

根据频数分布表可知，

抽取的 A 小区 300 人样本中，有 $60+80+30=170$ 人对垃圾分类比较了解，

所以样本中对垃圾分类比较了解的概率为 $P=\frac{170}{300}=\frac{17}{30}$；

由样本估计总体的思想，用频率估计概率可知：

从 A 小区随机抽取一名居民，估计其对垃圾分类比较了解的概率为 $\frac{17}{30}$；

【小问 2 详解】

根据频数分布表可知，A 小区 41-70 岁人群中对垃圾分类比较了解的概率可估计为 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

B小区 41-70 岁人群中对垃圾分类比较了解的概率可估计为$\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$；

易知随机变量 X 的所有可能取值为$0,1,2$；

易知$P(X=0)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right)=\frac{1}{50}$，

$P(X=1)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{9}{10}+\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{9}{10}\right)=\frac{13}{50}$；

$P(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{18}{25}$；

所以 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{50}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{18}{25}$

期望值$E(X)=0\times\frac{1}{50}+1\times\frac{13}{50}+2\times\frac{18}{25}=\frac{17}{10}$

【小问 3 详解】

$P(F)<P(E)$，理由如下：

从三个年龄组随机抽取两组共有$C_3^2=3$种，每一种组合出现的可能为$\frac{1}{3}$；

易知 A 小区三个年龄组对垃圾分类比较了解的概率分别为$\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{3}{10}$，

所以可得$P(E)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{10}$，

同理$P(F)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{29}{100}$， 显然$\frac{29}{100}<\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$；

即$P(F)<P(E)$.

18. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{2}}{6}$

【分析】（1）连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OM ，由 $PB//OM$ 可得 $PB//$ 平面 MAC；

（2）延长 AB,DC，交于点 N，则直线 NP 就是平面 PAB 与平面 PCD 的交线 l，以点 A 为原点建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{PN}$ 及面 MAC 的法向量，求 l 与平面 MAC 所成角的正弦值.

【小问 1 详解】

连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OM ，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

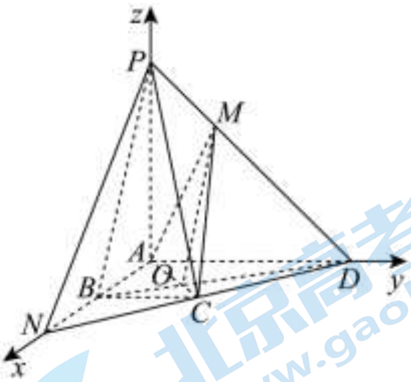
因为 $BC // AD, AD = 2BC$，所以 $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$，

又因 M 是棱 PD 上靠近点 P 的三等分点，

所以 $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{PM}{MD} = \dfrac{1}{2}$，所以 $PB // OM$，

又 $OM \subset$ 平面 $MAC, PB \not\subset$ 平面 MAC，所以 $PB //$ 平面 MAC；

【小问 2 详解】



延长 AB, DC，交于点 N，

所以 N, P 为平面 PAB 与平面 PCD 的公共点，

所以直线 NP 就是平面 PAB 与平面 PCD 的交线 l；

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, PA \perp AD$，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, PA \subset$ 平面 PAD，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp AB$，

如图，以点 A 为原点建立空间直角坐标系，

因为 $BC // AD, AD = 2BC$，

所以 $\dfrac{BN}{AN} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{BN}{BN+1}$，所以 $BN = 1$，

则 $A(0,0,0), C(1,1,0), M\left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right), P(0,0,2), N(2,0,0)$，

则 $\overrightarrow{AC} = (1,1,0), \overrightarrow{AM} = \left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right), \overrightarrow{PN} = (2,0,-2)$，

设平面 MAC 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则有 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = x + y = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{4}{3}z = 0 \end{cases}$，可取 $\vec{n} = (2,-2,1)$，

则 $\cos \vec{n}, \overrightarrow{PN} = \dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PN}|} = \dfrac{4+0-2}{3\times 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

即 l 与平面 MAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

19. 【答案】（1） $a=e$ （2）当 $a\le 0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 无极小值；当 $a>0$， $f\left(x\right)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值 $\ln a$，无极大值（3） k 的最大值为1

【分析】（1）求出 $f'(x)$，由导数的几何意义，解方程 $f'(1)=0$ 即可；（2）解方程 $f'(x)=0$，注意分类讨论，以确定 $f'(x)$ 的符号，从而确定 $f(x)$ 的单调性，得极大值或极小值（极值点多时，最好列表表示）；（3）题意就是方程 $f(x)=kx-1$ 无实数解，即关于 x 的方程 $(k-1)x=\dfrac{1}{e^x}$ 在 R 上没有实数解．一般是分类讨论，$k=1$ 时，无实数解，$k\ne 1$ 时，方程变为 $\dfrac{1}{k-1}=xe^x$，因此可通过求函数 $g(x)=xe^x$ 的值域来求得 k 的范围．

【详解】（1）由 $f\left(x\right)=x-1+\dfrac{a}{e^x}$,得 $f'\left(x\right)=1-\dfrac{a}{e^x}$.

又曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线平行于 x 轴,

得 $f'(1)=0$,即 $1-\dfrac{a}{e}=0$,解得 $a=e$.

（2） $f'\left(x\right)=1-\dfrac{a}{e^x}$,

①当 $a\le 0$ 时, $f'\left(x\right)>0$, $f\left(x\right)$ 为 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的增函数,

所以函数 $f\left(x\right)$ 无极值.

②当 $a>0$ 时,令 $f'\left(x\right)=0$,得 $e^x=a$, $x=\ln a$.

$x\in\left(-\infty,\ln a\right)$, $f'(x)<0$; $x\in\left(\ln a,+\infty\right)$, $f'\left(x\right)>0$.

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln a\right)$ 上单调递减,在 $\left(\ln a,+\infty\right)$ 上单调递增,

故 $f\left(x\right)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值,且极小值为 $f\left(\ln a\right)=\ln a$,无极大值.

综上,当 $a\le 0$ 时,函数 $f\left(x\right)$ 无极小值

当 $a>0$, $f\left(x\right)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值 $\ln a$,无极大值.

（3）当 $a=1$ 时, $f\left(x\right)=x-1+\dfrac{1}{e^x}$

令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\left(kx-1\right)=\left(1-k\right)x+\dfrac{1}{e^x}$,

则直线 $l: y=kx-1$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 没有公共点,

等价于方程 $g\left(x\right)=0$ 在 R 上没有实数解.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

假设 $k>1$,此时 $g(0)=1>0$,$g\left(\dfrac{1}{k-1}\right)=-1+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{k-1}}}<0$,

又函数 $g(x)$ 的图象连续不断,由零点存在定理,可知 $g(x)=0$ 在 R 上至少有一解,与"方程 $g(x)=0$ 在 R 上没有实数解"矛盾,故 $k\le 1$.

又 $k=1$ 时,$g(x)=\dfrac{1}{e^x}>0$,知方程 $g(x)=0$ 在 R 上没有实数解.

所以 k 的最大值为 1.

解法二:

(1)(2)同解法一.

(3)当 $a=1$ 时,$f(x)=x-1+\dfrac{1}{e^x}$.

直线 $l:y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点,

等价于关于 x 的方程 $kx-1=x-1+\dfrac{1}{e^x}$ 在 R 上没有实数解,即关于 x 的方程:

$$(k-1)x=\frac{1}{e^x}\quad (*)$$

在 R 上没有实数解.

①当 $k=1$ 时,方程(*)可化为 $\dfrac{1}{e^x}=0$,在 R 上没有实数解.

②当 $k\ne 1$ 时,方程(*)化为 $\dfrac{1}{k-1}=xe^x$.

令 $g(x)=xe^x$,则有 $g'(x)=(1+x)e^x$.

令 $g'(x)=0$,得 $x=-1$,

当 x 变化时,$g'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	+
$g(x)$	减	$-\dfrac{1}{e}$	增

当 $x=-1$ 时,$g(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$,同时当 x 趋于 $+\infty$ 时,$g(x)$ 趋于 $+\infty$,

从而 $g(x)$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以当$\frac{1}{k-1}\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$时,方程（*）无实数解, 解得$k$的取值范围是$(1-e,1)$.

综上,得k的最大值为1.

考点：导数的几何意义，极值，导数与单调性、值域，方程根的分布.

20.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 2

【分析】(1) 写出直线AC的方程，根据原点O到直线AC的距离及离心率求得a,b即可；

(2) 解法一：设$P(x_0,y_0)(x_0\neq 0,2)$，写出AC,PB,PC方程并联立求得T,Q坐标，代入斜率公式计算即可；

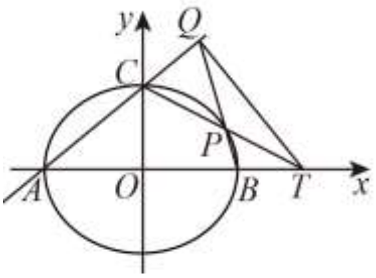
解法二：$AC:y=\frac{1}{2}x+1$与$PB:y=k_1(x-2)$联立可得Q坐标，将PB与椭圆方程联立得P坐标，写出PC方程得T坐标，代入斜率公式计算即可.

【小问 1 详解】

原点O到直线$AC:\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$即$bx-ay+ab=0$的距离$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$,

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$a^2=b^2+c^2$，解之得$a=2,b=1$，所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.



【小问 2 详解】

解法一：设$P(x_0,y_0)(x_0\neq 0,2)$，则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,

直线PB的斜率$k_1=\frac{y_0}{x_0-2}$,

因为$A(-2,0),B(2,0),C(0,1)$，所以$PC:y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$,

令$y=0$得$x=\frac{x_0}{1-y_0}$，所以$T\left(\frac{x_0}{1-y_0},0\right)$,

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

又 $AC: y=\frac{1}{2}x+1, PB: y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，联立可得 $Q\left(\frac{2x_0+4y_0-4}{2y_0-x_0+2},\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2}\right)$，

直线 QT 的斜率 $k_2=\frac{\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2}-0}{\frac{2x_0+4y_0-4}{2y_0-x_0+2}-\frac{x_0}{1-y_0}}=\frac{4y_0(1-y_0)}{x_0^2-4y_0^2-4x_0y_0+8y_0-4}$

$=\frac{4y_0(1-y_0)}{(4-4y_0^2)-4y_0^2-4x_0y_0+8y_0-4}=\frac{4y_0(1-y_0)}{-8y_0^2-4x_0y_0+8y_0}=\frac{y_0-1}{x_0+2y_0-2}$

，所以 $k_1-2k_2=\frac{y_0}{x_0-2}-2\times\frac{y_0-1}{x_0+2y_0-2}=\frac{y_0(x_0+2y_0-2)-2(y_0-1)(x_0-2)}{(x_0-2)(x_0+2y_0-2)}$

$=\frac{2y_0^2-x_0y_0+2x_0+2y_0-4}{x_0^2+2x_0y_0-4x_0-4y_0+4}=\frac{2y_0^2-x_0y_0+2x_0+2y_0-4}{(4-4y_0^2)+2x_0y_0-4x_0-4y_0+4}=-\frac{1}{2}$.

综上 $\lambda=2$.

解法二：因为 $A(-2,0),B(2,0),C(0,1),k_1\neq\frac{1}{2}$

所以 $AC: y=\frac{1}{2}x+1$，与 $PB: y=k_1(x-2)$ 联立可得 $Q\left(\frac{4k_1+2}{2k_1-1},\frac{4k_1}{2k_1-1}\right)$，

将 $PB: y=k_1(x-2)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $(4k_1^2+1)x^2-16k_1^2x+16k_1^2-4=0$，

所以 $2x_P=\frac{16k_1^2-4}{4k_1^2+1}$，则 $x_P=\frac{8k_1^2-2}{4k_1^2+1}$， $y_P=k_1\left(\frac{8k_1^2-2}{4k_1^2+1}-2\right)=\frac{-4k_1}{4k_1^2+1}$，

所以 $P\left(\frac{8k_1^2-2}{4k_1^2+1},\frac{-4k_1}{4k_1^2+1}\right)$，

则直线 PC 的斜率为 $k_{PC}=\frac{\frac{-4k_1}{4k_1^2+1}-1}{\frac{8k_1^2-2}{4k_1^2+1}}=\frac{-4k_1-4k_1^2-1}{8k_1^2-2}=\frac{-(2k_1+1)^2}{2(2k_1+1)(2k_1-1)}=\frac{-(2k_1+1)}{2(2k_1-1)}$，

所以 $PC: y=\frac{-(2k_1+1)}{2(2k_1-1)}x+1$，令 $y=0$ 得 $x=\frac{4k_1-2}{2k_1+1}$，则 $T\left(\frac{4k_1-2}{2k_1+1},0\right)$，

所以 QT 斜率为 $k_2=\frac{\frac{4k_1}{2k_1-1}-0}{\frac{4k_1+2}{2k_1-1}-\frac{4k_1-2}{2k_1+1}}=\frac{4k_1(2k_1+1)}{(4k_1+2)(2k_1+1)-(4k_1-2)(2k_1-1)}$

$=\frac{4k_1(2k_1+1)}{16k_1}=\frac{k_1}{2}+\frac{1}{4}$，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

则 $k_1-2k_2=-\frac{1}{2}$.

综上 $\lambda=2$.

【点睛】关键点睛：关系式 $k_1+\frac{1}{2}=\lambda k_2$ 中关键是 k_1,k_2 的计算，计算 k_1,k_2 必须要有各点的坐标，故要设直线方程联立求交点坐标.

21.【答案】（1）①不满足；②满足

（2）证明见解析；　（3）$a_n=0$ 或 $a_n=3$；

【分析】（1）根据题意分析判断；

（2）根据题意先证3为数列 $\{a_n\}$ 中的项，再利用反证法证明集合 $\{n\in\mathbf{N}^*|\ a_n=3\}$ 为无限集；

（3）先根据题意证明 $a_n\in\{0,2,3\}$，再分 $\{a_n\}$ 为常数列和非常数列两种情况，分析判断.

【小问 1 详解】

对①，取 $i=1$，对 $\forall j\in\mathbf{N}^*,j>1$，则 $a_i=a_1=1,a_j=j$，

可得 $a_ia_j-a_i-a_j=j-1-j=-1$，

显然不存在 $k>j,k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=-1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 不满足性质 P；

对②，对于 $\forall i,j\in\mathbf{N}^*,i<j$，则 $b_i=i+2$，$b_j=j+2$，

故 $b_ib_j-b_i-b_j=(i+2)(j+2)-(i+2)-(j+2)=i\cdot j+i+j$

$=(i\cdot j+i+j-2)+2$，因为 $i,j\in\mathbf{N}^*,i\ge1,j\ge2$，

则 $(i\cdot j+i+j-2)\in\mathbf{N}^*$，且 $i\cdot j+i+j-2=i(j+1)+(j-2)\ge3$，

所以存在 $(k=i\cdot j+i+j-2)\in\mathbf{N}^*$，$k>j$，

使得 $b_k=(i\cdot j+i+j-2)+2=b_ib_j-b_i-b_j$，

故数列 $\{b_n\}$ 满足性质 P；

【小问 2 详解】

若数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P，且 $a_1=1$，则有：

取 $i=1,j=j_1>1,j_1\in\mathbf{N}^*$，均存在 $k_1>j_1,k_1\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_1}=a_1a_{j_1}-a_1-a_{j_1}=-1$，

取 $i=1,j=j_2>k_1,j_2\in\mathbf{N}^*$，均存在 $k_2>j_2>k_1,k_2\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_2}=a_1a_{j_2}-a_1-a_{j_2}=-1$，

取 $i=k_1,j=k_2>k_1$，均存在 $m_1>k_2>1,m_1\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{m_1}=a_{k_1}a_{k_2}-a_{k_1}-a_{k_2}=3$，

故数列 $\{a_n\}$ 中存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n=3$，即 $\{n\in\mathbf{N}^*|\ a_n=3\}\ne\varnothing$，

反证：假设 $\{n\in\mathbf{N}^*|\ a_n=3\}$ 为有限集，其元素由小到大依次为 $n_1,n_2,\cdots,n_l\ (n_l>1)$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

取 $i=1, j=n_l+1>n_l$，均存在 $k_L>n_l+1, k_L\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_L}=a_1a_{n_l+1}-a_1-a_{n_l+1}=-1$，

取 $i=1, j=k_L+1$，均存在 $k_{L+1}>k_L+1, k_{L+1}\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_{L+1}}=a_1a_{k_L+1}-a_1-a_{k_L+1}=-1$，

取 $i=k_L, j=k_{L+1}$，均存在 $n_{l+1}>k_{L+1}>n_l, n_{l+1}\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{n_{l+1}}=a_{k_L}a_{k_{L+1}}-a_{k_L}-a_{k_{L+1}}=3$，

即 $n_{l+1}\in\left\{n\in\mathbf{N}^* \mid a_n=3\right\}$ 这与假设相矛盾，故集合 $\left\{n\in\mathbf{N}^* \mid a_n=3\right\}$ 为无限集.

【小问 3 详解】

设周期数列 $\left\{a_n\right\}$ 的周期为 $T\ge1, T\in\mathbf{N}^*$，则对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n=a_{n+T}$，

设周期数列 $\left\{a_n\right\}$ 的最大项为 $a_M, M\in\mathbf{N}^*, 1\le M\le T$，最小项为 $a_N, N\in\mathbf{N}^*, 1\le N\le T$，

即对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_N\le a_n\le a_M$，

若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足性质 P：

反证：假设 $a_M\ge4$ 时，取 $i=M, j=M+T$，则 $\exists k>M+T, k\in\mathbf{N}^*$，使得

$a_k=a_Ma_{M+T}-a_M-a_{M+T}=a_M^2-2a_M$，

则 $a_k-a_M=a_M^2-3a_M=a_M\left(a_M-3\right)>0$，即 $a_k>a_M$，

这对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_N\le a_n\le a_M$ 矛盾，假设不成立；则对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n\le3$；

反证：假设 $a_N\le-2$ 时，取 $i=N, j=N+T$，则 $\exists k>N+T, k\in\mathbf{N}^*$，使得

$a_k=a_Na_{N+T}-a_N-a_{N+T}=a_N^2-2a_N\ge4$，

这与对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n\le3$ 矛盾，假设不成立，即对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n\ge-1$；

综上所述：对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $-1\le a_n\le3$，

反证：假设 1 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，由（2）可得：$-1,3$ 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，

$\because -1\times3-(-1)-3=-5$，即 -5 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，

这与对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $-1\le a_n\le3$ 相矛盾，即对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n\ne1$，同理可证：$a_n\ne-1$，

$\because a_n\in\mathbf{Z}$，则 $a_n\in\{0,2,3\}$，

当 $T=1$ 时，即数列 $\left\{a_n\right\}$ 为常数列时，设 $a_n=a$，故对 $\forall i, j\in\mathbf{N}^*, i<j$，都存在 $k>j$，

使得 $a_k=a_ia_j-a_i-a_j=a^2-2a=a$，解得 $a=0$ 或 $a=3$，即 $a_n=0$ 或 $a_n=3$ 符合题意；

当 $T\ge2$ 时，即数列 $\left\{a_n\right\}$ 至少有两个不同项，则有：

①当 $0,2$ 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，则 $0\times2-0-2=-2$，即 -2 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，但 $-2\notin\{0,2,3\}$，不成立；

②当 $0,3$ 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，则 $0\times3-0-3=-3$，即 -3 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项，但 $-3\notin\{0,2,3\}$，不成立；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

③当$2,3$为数列$\left\{a_n\right\}$中的项，则$2\times3-2-3=1$，即1为数列$\left\{a_n\right\}$中的项，但$1\notin\left\{0,2,3\right\}$，不成立；

综上所述：$a_n=0$或$a_n=3$.

【点睛】(1) 对于证明中出现直接证明不方便时，我们可以利用反证法证明；

(2) 对于周期数列$\left\{a_n\right\}$满足性质P，证明思路：先逐步缩小精确a_n的取值可能，再检验判断.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！