海淀区高三年级第一学期期中练习

数学（理科）

2017.11

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题，共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $A=\{x\mid x-2<0\}$，$B=\{x\mid e^x>1\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\mathbf{R}$ （B）$(-\infty, 2)$

（C）$(0, 2)$ （D）$(2, +\infty)$

（2）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

（A）$f(x)=\ln|x|$ （B）$f(x)=2^{-x}$

（C）$f(x)=x^3$ （D）$f(x)=-x^2$

（3）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，则

（A）$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ （B）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（C）$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{b}$ （D）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$

（4）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2a_2\ (n=1,2,3,\cdots)$，则

（A）$a_1<0$ （B）$a_1>0$

（C）$a_1\neq a_2$ （D）$a_2=0$

（5）将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，则所得图象的函数解析式为

（A）$y=\sin 2x$ （B）$y=\cos 2x$

（C）$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ （D）$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

（6）设 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“α 是第一象限角”是“$\sin\alpha+\cos\alpha>1$”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（7）设 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}(x\in\mathbf{R})$，则下列说法不正确的是

（A）$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数　　（B）π 为 $f(x)$ 的一个周期

（C）π 为 $f(x)$ 的一个极小值点　　（D）$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减

（8）已知非空集合 A,B 满足以下两个条件：

（ⅰ）$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\phi$；

（ⅱ）A 的元素个数不是 A 中的元素，B 的元素个数不是 B 中的元素，

则有序集合对（A,B）的个数为

（A）10　　（B）12　　（C）14　　（D）16

第二部分（非选择题，共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）定积分 $\int_{-1}^{1}x^3dx$ 的值等于______.

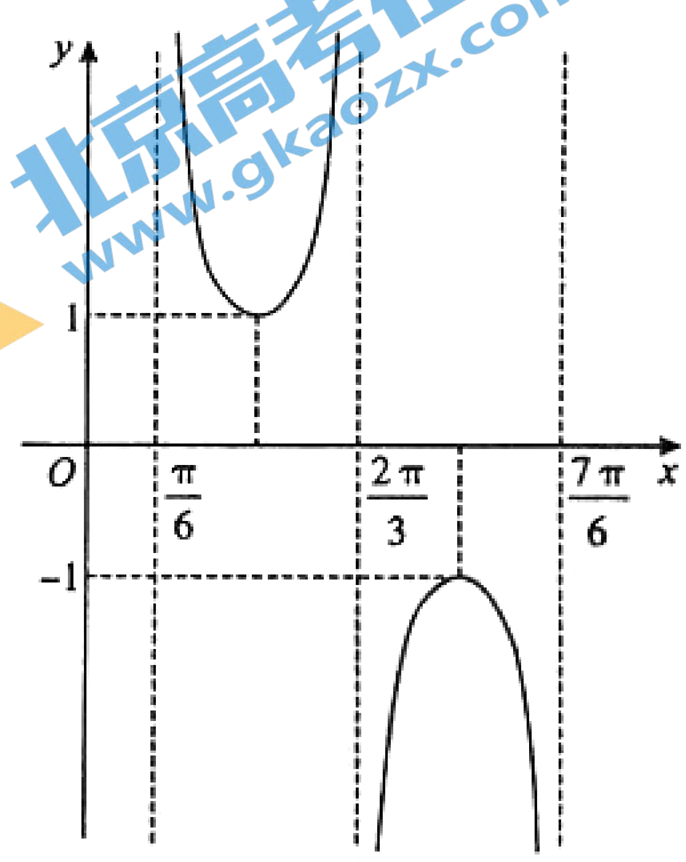
（10）设在海拔 x（单位：m）处的大气压强为 y（单位：kPa），y 与 x 的函数关系可近似表示为 $y=100e^{ax}$，已知在海拔 1000 m 处的大气压强为 90 kPa，则根据函数关系式，在海拔 2000 m 处的大气压强为__________kPa.

（11）能够说明“设 x 是实数．若 $x>1$，则 $x+\frac{1}{x-1}>3$”是假命题的一个实数 x 的值为______.

（12）已知△ABC 为边长为 2 的正三角形，O,D 分别为边 AB，BC 的中点，则

① $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$________；

② 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y=$________.



（13）已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sin(\omega x+\varphi)}$（其中 $\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 $\omega=$______，$\varphi=$______.

（14）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-ax+a$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

① $f(-1)=$______；

② 若 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\sin(x+\frac{\pi}{4})-1$.

(Ⅰ)求 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

(16)(本小题 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，满足 $a_2=6$, $a_3=-18$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$，且 $\{2b_n+a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(17)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$，其中 $a>0$.

(Ⅰ)当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

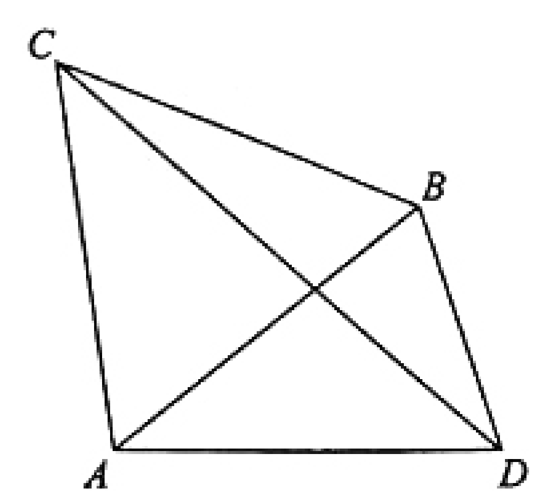
(Ⅱ)求 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上的最小值.(其中 e 是自然对数的底数)

(18)(本小题 13 分)

如图，在四边形 $ACBD$ 中，$\cos\angle CAD=-\frac{1}{7}$，且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(Ⅰ)求 $\cos\angle BAD$ 的值;

(Ⅱ)若 $CD=4$，$BD=\sqrt{3}$，求 AB 和 AD 的长.



(19)（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\,e^{x}\sin x\,(0<x<\pi)$，$g(x)=(x-1)\ln x+m\,(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：1 是 $g(x)$ 的唯一极小值点；

（Ⅲ）若存在 a，$b\in(0,\pi)$，满足 $f(a)=g(b)$，求 m 的取值范围 .（只需写出结论）

(20)（本小题 14 分）

若数列 A：$a_1, a_2, \cdots, a_n\,(n\geqslant 3)$ 中，$a_i\in\mathbf{N}^*(1\leqslant i\leqslant n)$ 且对任意的 $2\leqslant k\leqslant n-1$，$a_{k+1}+a_{k-1}>2a_k$ 恒成立，则称数列 A 为“U－数列”.

（Ⅰ）若数列 $1, x, y, 7$ 为“U－数列”，写出所有可能的 x, y；

（Ⅱ）若“U－数列”A：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，$a_1=1, a_n=2017$，求 n 的最大值；

（Ⅲ）设 n_0 为给定的偶数，对所有可能的“U－数列”A：$a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}$，记 $M=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}\}$，其中 $\max\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 这 s 个数中最大的数，求 M 的最小值.

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案　2017.11

数　学（理科）

阅卷须知:

1. 评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数.

2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	C	A	D	D	B	C	D	A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.（有两空的小题第一空 3 分）

9．0　　10．81　　11．2　　12．(1) 3　(2) $\frac{1}{2}$

13． 2，$-\frac{\pi}{3}$　　14．(1) -1　　(2) $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

三、解答题：本大题共 4 小题，共 44 分.

15.（本题 13 分）

解：(1) 因为 $f(\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}-1$ ……………………1 分

$=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1-1$ ……………………3 分

（两个三角函数值各 1 分）

$=1$ ……………………4 分

(Ⅱ) $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\sin(x+\frac{\pi}{4})-1$

$=2\sqrt{2}\cos x\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)-1$ ……………………5分

$=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$=\sin 2x+\cos 2x$ ……………………9分

（一个公式2分）

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ ……………………11分

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$ ……………………12分

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le$ 　故 $-1\le\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\sqrt{2}$

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$, 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 有最小值 -1 …………………… 13分

16.（本题13分）

解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则

$$\begin{cases}a_2=a_1q=6\\a_3=a_1q^2=-18\end{cases}$$ ……………………2分

解得 $a_1=-2$，$q=-3$ ……………………3分

所以，$a_n=-2\times(-3)^{n-1}$ ……………………5分

令 $c_n=2b_n+a_n$，则 $c_1=2b_1+a_1=2$

$c_n=2+(n-1)\times 2=2n$ ……………………7 分

$b_n=\dfrac{c_n-a_n}{2}=n+(-3)^{n-1}$ ……………………9 分

（Ⅱ） $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{1-(-3)^n}{4}$ ……………………13 分

（分组求和，每组求对给 2 分）

17.（本题 13 分）

解：$f(x)=x-(a+1)\ln x-\dfrac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ……………………1 分

$f'(x)=1-\dfrac{a+1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x^2}$ ……………………2 分

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f(x)=x-3\ln x-\dfrac{2}{x}$，$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$，

此时，$f(1)=-1$，$f'(1)=0$， ……………………4 分

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-1$. ……………………5 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=0$ 得，$x=a$ 或 $x=1$ ……………………6 分

① 当 $0<a\le 1$ 时，

对任意的 $1<x<\mathrm{e}$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增 …………7 分

$f(x)_{最小}=f(1)=1-a$ ……………………8 分

② 当 $1<a<\mathrm{e}$ 时

x	$(1,a)$	a	(a,e)

$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

……………………10 分

$$f(x)_{最小}=f(a)=a-1-(a+1)\cdot\ln a$$

……………………11 分

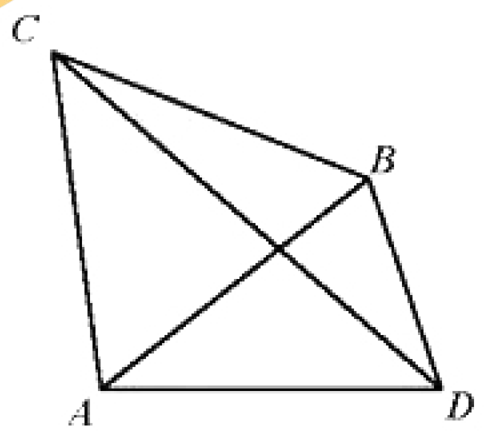
② 当 $a\ge \mathbf{e}$ 时，

对任意的 $1<x<\mathbf{e}$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[1,\mathbf{e}]$ 上单调递减 …………12 分

$$f(x)_{最小}=f(\mathbf{e})=\mathbf{e}-(a+1)-\frac{a}{\mathbf{e}}$$ …………………… 13 分

由①、②、③可知，$g(a)=\begin{cases}1-a, & 0<a\le 1\\ a-1-(a+1)\cdot\ln a, & 1<a<\mathbf{e}\\ \mathbf{e}-(a+1)-\dfrac{a}{\mathbf{e}}, & a\ge \mathbf{e}\end{cases}$

18．（本题 13 分）



解：（Ⅰ）因为 $\cos\angle CAD=-\frac{1}{7}$，$\angle CAD\in(0,\pi)$

所以 $\sin\angle CAD=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

…………………… 2 分

（没写角取值范围的扣 1 分 ）

所以 $\cos\angle BAD$

$=\cos(\angle CAD-\frac{\pi}{3})$

$=\cos\angle CAD\cos\frac{\pi}{3}+\sin\angle CAD\sin\frac{\pi}{3}$ ……………………4 分

$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{11}{14}$ …………………… 6 分

（Ⅱ）设 $AB=AC=BC=x$，$AD=y$，在 ΔACD 和 ΔABD 中由余弦定理得

$$\begin{cases} AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD=CD^2 \\ AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=BD^2 \end{cases}$$ …………………10 分

（每个公式给 2 分）

代入得 $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{2}{7}xy=16 \\ x^2+y^2-\frac{11}{7}xy=3 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$（舍）

即 $AB=\sqrt{7}$，$AD=\sqrt{7}$ ……………………13 分

19．（本题 14 分）

解：（Ⅰ） 因为 $f'(x)=\sqrt{2}(e^x\sin x+e^x\cos x)$ ……………………2 分

$=2e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$ …………………… 3 分

令 $f'(x)=0$，得 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$

因为 $0<x<\pi$，所以 $x=\frac{3}{4}\pi$ …………………… 4 分

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,\frac{3}{4}\pi)$	$\frac{3}{4}\pi$	$(\frac{3}{4}\pi,\pi)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	□	极大值	□

……………………5 分

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{3\pi}{4})$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{3\pi}{4},\pi)$

……………………6 分

（Ⅱ）证明：$\because g(x)=(x-1)\ln x+m$

$\therefore g'(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$（$x>0$），……………………7 分

设 $h(x)=g'(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$

故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调递增函数，……………………8 分

又 $\because g'(1)=0$，故方程 $g'(x)=0$ 只有唯一实根 $x=1$ ……………………9 分

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	□	极小值	□

……………………10 分

故 $g(x)$ 在 $x=1$ 时取得极小值 $g(1)=m$

即 1 是 $g(x)$ 的唯一极小值点. ....11 分

（III） $m \le e^{\frac{3\pi}{4}}$ ....14 分

20.（本题 14 分）

解：（ I ） $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ ， $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ .... 3 分

（ II ） n 的最大值为 65 ，理由如下 .... 5 分

一方面，注意到： $a_{k+1}+a_{k-1}>2a_k \Leftrightarrow a_{k+1}-a_k>a_k-a_{k-1}$

对任意的 $1\le i\le n-1$ ，令 $b_i=a_{i+1}-a_i$ ，则 $b_i\in \mathbf{Z}$ 且 $b_k>b_{k-1}$ （ $2\le k\le n-1$ ），

故 $b_k\ge b_{k-1}+1$ 对任意的 $2\le k\le n-1$ 恒成立．

（★）

当 $a_1=1$ ， $a_n=2017$ 时，注意到 $b_1=a_2-a_1\ge 1-1=0$ ，得

$$b_i=(b_i-b_{i-1})+(b_{i-1}-b_{i-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\ge i-1 \text{（} 2\le i\le n-1 \text{）}$$

此时

$$a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}\ge 0+1+2+\cdots+n-2=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

即 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\le 2017-1$ ，解得： $-62\le n\le 65$ ，故 $n\le 65$

另一方面，取 $b_i=i-1$ （ $1\le i\le 64$ ），则对任意的 $2\le k\le 64$ ， $b_k>b_{k-1}$ ，故数列

$\{a_n\}$ 为"$U-$数列"，此时 $a_{65}=1+0+1+2+\cdots+63=2017$ ，即 $n=65$ 符合题意．

综上， n 的最大值为 65． .... 9 分

（III） M 的最小值为 $\dfrac{n_0^2-2n_0+8}{8}$ ，证明如下： .... 11 分

当 $n_0=2m$ （ $m\ge 2$ ， $m\in \mathbf{N}^*$ ）时，

一方面：

由（★）式，$b_{k+1}-b_k\ge 1$，

$$b_{m+k}-b_k=(b_{m+k}-b_{m+k-1})+(b_{m+k-1}-b_{m+k-2})+\cdots+(b_{k+1}-b_k)\ge m$$

此时有：

$$\begin{aligned}&(a_1+a_{2m})-(a_m+a_{m+1})\\=&(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{2m-1})-(b_1+b_2+\cdots+b_{m-1})\\=&(b_{m+1}-b_1)+(b_{m+2}-b_2)+\cdots+(b_{2m-1}-b_{m-1})\\\ge& m+m+\cdots+m\\=&m(m-1)\end{aligned}$$

故 $M\ge\dfrac{a_1+a_{2m}}{2}\ge\dfrac{a_m+a_{m+1}+m(m-1)}{2}\ge\dfrac{m^2-m+2}{2}=\dfrac{n_0^2-2n_0+8}{8}$

另一方面，当 $b_1=1-m$，$b_2=2-m$，…，$b_{m-1}=-1$，$b_m=0$，$b_{m+1}=1$，…，$b_{2m-1}=m-1$ 时，$a_{k+1}+a_{k-1}-2a_k=(a_{k+1}-a_k)-(a_k-a_{k-1})=b_k-b_{k-1}=1>0$

取 $a_m=1$，则 $a_{m+1}=1$，$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_m$，$a_{m+1}<a_{m+2}<\cdots<a_{2m}$，且

$$a_1=a_m-(b_1+b_2+\cdots+b_{m-1})=\frac{1}{2}m(m-1)+1$$

$$a_{2m}=a_{m+1}+(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{2m-1})=\frac{1}{2}m(m-1)+1$$

此时 $M=a_1=a_{2m}=\dfrac{1}{2}m(m-1)+1=\dfrac{n_0^2-2n_0+8}{8}$．

综上，M 的最小值为 $\dfrac{n_0^2-2n_0+8}{8}$．　　　　……………………14 分