绝密★启用前

2022届高三学业质量第二次联合检测

数　　学

本试卷4页。总分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 A,B 为实数集 **R** 的两个非空子集，若 $A\subsetneqq B$，则下列命题正确的是

A. $\forall x\in B,x\in A$　　B. $\exists x\notin B,x\in A$

C. $\forall x\in A,x\in B$　　D. $\exists x\in A,x\notin B$

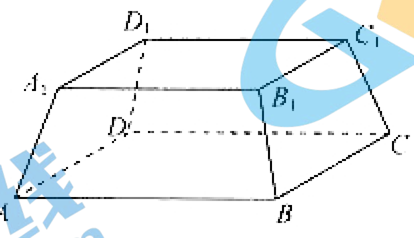
2. 已知复数 z 满足 $(z-\mathrm{i})\mathrm{i}=3+4\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $2\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 3

3. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$P(\xi\leqslant 4)=\frac{1}{2}$，$P(\xi>3)=\frac{5}{6}$，则 $P(3<\xi\leqslant 5)=$

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

4. 如图，一种棱台形状的无盖容器（无上底面 $A_1B_1C_1D_1$）模型其上、下底面均为正方形，面积分别为 $4\ \mathrm{cm}^2$，$9\ \mathrm{cm}^2$，且 $A_1A=B_1B=C_1C=D_1D$，若该容器模型的体积为 $\frac{19}{3}\ \mathrm{cm}^3$，则该容器模型的表面积为



A. $(5\sqrt{3}+9)\mathrm{cm}^2$　　B. $19\ \mathrm{cm}^2$　　C. $(5\sqrt{5}+9)\mathrm{cm}^2$　　D. $(5\sqrt{37}+9)\mathrm{cm}^2$

5. 已知函数 $f(x)=\sin^2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$，则下列说法错误的是

A. π 是函数 $f(x)$ 的一个周期

B. $x=\frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 -1

D. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称

6. 已知函数 $f(x)=2^{|x-1|}$，若 $a<b<1$，且 $a+c>2$，则

A. $f(a)<f(b)<f(c)$　　B. $f(c)<f(b)<f(a)$

C. $f(b)<f(a)<f(c)$　　D. $f(a)<f(c)<f(b)$

7. 已知 $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$，则 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{10}\right)=$

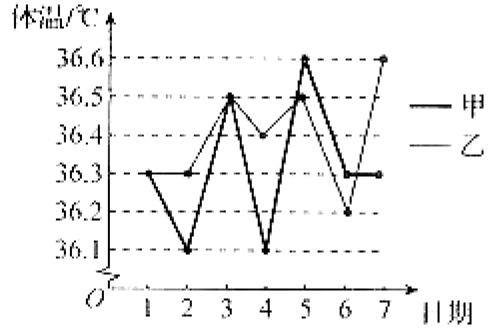
A. $\dfrac{7}{25}$　　B. $\dfrac{9}{25}$　　C. $\dfrac{16}{25}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

8. 已知点 P 在双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，F_1，F_2 分别是 E 的左、右焦点，若 $|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$，$|PF_2|$ 的等差中项，且 $S_{\triangle F_1PF_2}=2b^2$，则 E 的离心率是

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 5

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 新冠肺炎疫情防控中，测量体温是最简便、最快捷，也是筛查成本比较低、性价比很高的筛查方式，是更适用于大众的普通筛查手段.某班级体温检测员对某一周内甲、乙两名同学的体温进行了统计，其结果如图所示，则下列结论正确的是



A. 甲同学的体温的极差为 0.5 ℃

B. 甲同学的体温的众数为 36.3 ℃

C. 乙同学的体温的中位数与平均数不相等

D. 乙同学的体温比甲同学的体温稳定

10. 已知实数 m，n 满足 $0<n<m<1$，则下列结论正确的是

A. $\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+1}{m+1}$　　B. $m+\dfrac{1}{m}>n+\dfrac{1}{n}$

C. $m^n>n^m$　　D. $\log_m n<\log_n m$

11. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=1$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}$，则

A. $\overrightarrow{AC}^2=1$　　B. $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}|$

C. $\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

12. 已知曲线 Γ 是由 $|y|=x+1(-1\leqslant x<0)$ 和 $x=\sqrt{1-y^2}$ 的图象构成的封闭曲线，则下列结论正确的是

A. 曲线 Γ 围成的封闭图形的面积为 $1+\dfrac{\pi}{2}$

B. 若直线 $y=x+m$ 与曲线 Γ 有交点，则 m 的取值范围为 $[-\sqrt{2},1]$

C. 点 $(1,1)$ 与曲线 Γ 上点的最大距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 曲线 Γ 上的点到直线 $x+2y+\sqrt{5}=0$ 的最大距离为 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，则 $f(\ln 5)+f\left(\ln\dfrac{1}{5}\right)=$________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2a_n+m$（m 为非零实数），且 $a_2^2-2a_3=0$，则 $a_n=$________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线与 x 轴交于点 M，过点 M 的直线交 C 于 A，B 两点，且 $|MA|=|AB|$，若 F 是 C 的焦点，则△ABF 的面积为______.

16. 已知函数 $f(x)=ax^2$，$g(x)=be^x$，$ab>0$，且当 $x>0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个交点，则 $a+\frac{1}{b}$ 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $(a-2c)\cos B+b\cos A=0$.

(1)求 B；

(2)若 $a=3$，$b=3\sqrt{7}$，求△ABC 的面积.

18.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$，令 $b_n=a_{2n}$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若 $c_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{b_n}{2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{2}{\sqrt{\log_2 b_n}+\sqrt{\log_2 b_{n+2}}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 求数列$\{c_n\}$的前 14 项和.

19.（12 分）

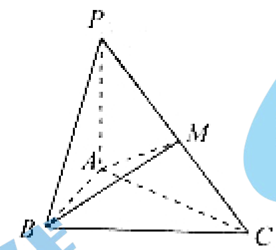
春节期间，某商场准备举行有奖促销活动，顾客购买超过一定金额的商品后均有一次抽奖机会.抽奖规则如下：将质地均匀的转盘平均分成 n($n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$)个扇区，每个扇区涂一种颜色，所有扇区的颜色各不相同，顾客抽奖时连续转动转盘三次，记录每次转盘停止时指针所指扇区内的颜色(若指针指在分界线处，本次转动无效，需重转一次)，若三次颜色都一样，则获得一等奖；若其中两次颜色一样，则获得二等奖；若三次颜色均不一样，则获得三等奖.

(1)若一、二等奖的获奖概率之和不大于$\frac{4}{9}$，求 n 的最小值；

(2)规定一等奖返还现金 108 元，二等奖返还现金 60 元，三等奖返还现金 18 元，在 n 取(1)中的最小值的情况下，求顾客在一次抽奖中获奖金额的分布列和数学期望.

20.（12 分）

如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=60^\circ$，$AB=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}BC=2$，$M$ 为棱 PC 上的动点.



（1）证明：平面 $ABM\perp$ 平面 PAC；

（2）若异面直线 AM 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{7}}{14}$，求此时平面 ABM 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{3},0)$，右顶点为 A，上顶点为 B，原点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 $P(2,1)$ 作斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N，过点 N 作 x 轴的垂线与直线 AM 交于点 D，记线段 DN 的中点为 E，试判断直线 AE 的斜率是否为定值，并说明理由.

22.（12 分）

设函数 $f(x)=xe^{x}+\frac{1}{2}ax^2-ax(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，记 $g(x)=f'(x)$，证明：当 $-e^{-3}<a<0$ 时，函数 $g(x)$ 有两个极值点.

参考答案及解析

2022届高三学业质量第二次联合检测·数学

一、选择题

1. C 【解析】由子集的定义可得C正确.

2. A 【解析】由 $(\bar{z}-i)i=3+4i$，可得 $\bar{z}=\frac{3+4i}{i}+i=4-3i+i=4-2i$，所以 $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

3. D 【解析】由 $P(\xi\leqslant 1)=\frac{1}{2}$ 知 $\mu=1$. 又因为 $P(\xi>-3)=\frac{5}{6}$，所以 $P(-3<\xi\leqslant 1)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，故 $P(-3<\xi\leqslant 5)=2P(-3<\xi\leqslant 1)=\frac{2}{3}$.

4. C 【解析】由题意得该容器模型为正四棱台，上、下底面的边长分别为2 cm、3 cm. 设该棱台的高为 h，则由棱台体积公式 $V=\frac{1}{3}h(S_上+S_下+\sqrt{S_上S_下})$，得 $h=1$ cm，所以侧面等腰梯形的高 $h'=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$(cm)，所以 $S_表=4\times\frac{(2+3)\times\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}+9=(5\sqrt{5}+9)\mathrm{cm}^2$.

5. D 【解析】因为 $f(x)=\sin^2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=-\cos 2x$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故A正确；当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)=0$，故B正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$，此时函数 $f(x)$ 的最小值是 -1，故C正确；由图象可知函数 $f(x)$ 的图象不关于原点对称，故D错误.

6. C 【解析】当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，由图象可得 $f(b)<f(a)<f(c)$.

7. A 【解析】因为 $\tan\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{3}{4}$，所以 $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{9}{25}$，故 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{10}\right)\right]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}-2x\right)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=1-2\times\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$.

8. C 【解析】不妨设点 P 在双曲线 E 的右支上，则 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，因为 $|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4c$，所以 $|PF_1|=2c+a$，$|PF_2|=2c-a$. 设 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta=2b^2$，所以 $\sin\theta=\frac{4b^2}{|PF_1||PF_2|}=\frac{4b^2}{(2c+a)(2c-a)}=\frac{4b^2}{4c^2-a^2}$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cdot\cos\theta$，即 $4c^2=(2c+a)^2+(2c-a)^2-2(2c+a)(2c-a)\cos\theta$，得 $\cos\theta=\frac{2c^2+a^2}{4c^2-a^2}$，结合 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，解得 $e=\frac{c}{a}=2$. 所以双曲线 E 的离心率是2.

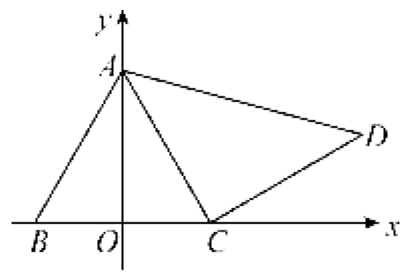
二、选择题

9. ABD 【解析】甲同学的体温的极差为 $36.6-36.1=0.5$ ℃，故A选项正确；甲同学的体温从低到高依次为36.1 ℃，36.1 ℃，36.3 ℃，36.3 ℃，36.3 ℃，36.5 ℃，36.6 ℃，故众数为36.3 ℃，故B选项正确；乙同学的体温从低到高依次为36.2 ℃，36.3 ℃，36.3 ℃，36.4 ℃，36.5 ℃，36.5 ℃，36.6 ℃，故中位数为36.4 ℃，而平均数也是36.4 ℃，故C选项错误；从折线图上可以看出，乙同学的体温比甲同学的体温稳定，故D选项正确.

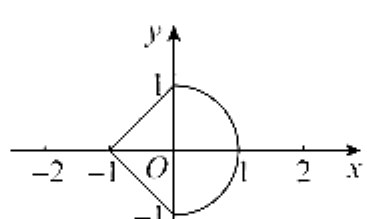
10. AC 【解析】由真分数的性质，可得A正确；由 $0<n<m<1$ 得 $m-n>0$，$1-\frac{1}{mn}<0$，所以 $m+\frac{1}{m}-\left(n+\frac{1}{n}\right)=(m-n)\left(1-\frac{1}{mn}\right)<0$，即 $m+\frac{1}{m}<n+\frac{1}{n}$，故B错误；$m^n>m^m>n^m$，故C正确；$\log_m n>\log_m m=1=\log_n n>\log_n m$，故D错误.

11. ABD 【解析】由已知可得 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=1$，又由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $\overrightarrow{AC}^2=1$，故选项A正确；由 $\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$，得 $\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以 $AC\perp CD$，则 $|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}|$，故选项B正确；由于 BC 与 AD 不平行，故选项C错误；建立如图所示的平面直角坐标系，则 $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{1}{2},0\right)$，$D\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，故选项 D 正确.



12. ABD 【解析】如图，曲线 Γ 围成的封闭图形为 y 轴左侧直角边长为$\sqrt{2}$的等腰直角三角形和 y 轴右侧半径为 1 的半圆，则其面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\frac{1}{2}\pi\times1^2=1+\frac{\pi}{2}$，故选项 A 正确；若直线 $y=x+m$ 与圆$x^2+y^2=1$ 有交点，则圆心$(0,0)$到直线的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\leqslant1$，解得$-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$，结合图形可得当直线 $y=x+m$ 与曲线 Γ 有交点时，m 的取值范围为$[-\sqrt{2},1]$，故选项 B 正确；点$(1,1)$到直线 $y=-x-1$ 的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，由图形可以判断点$(1,1)$与曲线上的点$(-1,0)$的距离大于$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故选项 C 错误；曲线 Γ 上的点到直线 $x+2y+\sqrt{5}=0$ 的最大距离 $d=\frac{|\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}+1=2$，故选项 D 正确.



三、填空题

13. 0 【解析】因为函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln1=0$，所以函数 $f(x)$是奇函数，又 $\ln\frac{1}{5}=-\ln5$，所以 $f(\ln5)+f\left(\ln\frac{1}{5}\right)=0$.

14. -2^n 【解析】当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+m$ ①，又 $S_n=2a_n+m$ ②，由②−①得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=-m$，则 $a_2=-2m$，$a_3=-4m$，因为 $a_2^2+2a_3=0$，即 $4m^2-8m=0$，解得 $m=2$，所以 $a_n=-2^n$.

15. $\sqrt{2}$ 【解析】根据对称性不妨设直线 AB 的方程为 $x=my-1(m>0)$，把 $x=my-1$ 代入 $y^2=4x$ 得 $y^2-4my+4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1\cdot y_2=4$，又$|MA|=|AB|$，所以 $y_2=2y_1$，所以 $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=2\sqrt{2}$，所以$\triangle ABF$ 的面积为$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

16. $(-\infty,-e]\cup[e,+\infty)$ 【解析】因为当 $x>0$ 时，$f(x)$与 $g(x)$的图象有且只有一个交点，所以关于 x 的方程 $ax^2=be^x$ 在区间$(0,+\infty)$上有且只有一个解，分离参数得$\frac{a}{b}=\frac{e^x}{x^2}$，令 $h(x)=\frac{e^x}{x^2}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，所以函数 $h(x)$在区间$(0,2)$上单调递减，在区间$(2,+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(2)=\frac{e^2}{4}$，故$\frac{a}{b}=\frac{e^2}{4}$，当 $a>0$，$b>0$ 时，$a+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{a}{b}}=e$，当且仅当 $a=\frac{1}{b}$，即 $a=\frac{e}{2}$，$b=\frac{2}{e}$时，等号成立；当$a<0$，$b<0$ 时，$a+\frac{1}{b}\leqslant-2\sqrt{\frac{a}{b}}=-e$，当且仅当 $a=\frac{1}{b}$，即 $a=-\frac{e}{2}$，$b=-\frac{2}{e}$时，等号成立，所以 $a+\frac{1}{b}$的取值范围为$(-\infty,-e]\cup[e,+\infty)$.

四、解答题

17. 解：(1)由$(a-2c)\cos B+b\cos A=0$，

得 $a\cos B-2c\cos B+b\cos A=0$，

所以 $a\cos B+b\cos A=2c\cos B$. (2 分)

根据正弦定理得

$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin C\cos B$，

所以 $\sin(A+B)=\sin C=2\sin C\cos B$. (3 分)

因为 $\sin C\neq0$，

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. (4 分)

因为 $0<B<\pi$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$. (5 分)

(2)在$\triangle ABC$ 中，因为 $B=\frac{\pi}{3}$，$a=3$，$b=3\sqrt{7}$，

由余弦定理，得 $63=c^2+9-6c\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $c^2-3c-54=0$，解得 $c=9$ 或 $c=-6$(舍去). (8 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times9\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$，

即$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{27\sqrt{3}}{4}$. (10 分)

18. 解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1a_2=2$，又 $a_1=1$，得 $a_2=2$，

由 $a_na_{n+1}=2^n$ ①，

得 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}$ ②，①②两式相除可得$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$，

则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=2$，且 $b_1=a_2=2$， (3 分)

所以数列$\{b_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

故 $b_n=2^n$. (5 分)

(2)当 n 为奇数时，$c_n=\sqrt{\frac{b_n}{2}}=2^{\frac{n-1}{2}}$； (6 分)

当 n 为偶数时，$\sqrt{\log_2b_n}=\sqrt{n}$，

$c_n=\frac{2}{\sqrt{\log_2b_n}+\sqrt{\log_2b_{n+2}}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$. (9 分)

所以数列$\{c_n\}$的前14项和为

$c_1+c_2+\cdots+c_{14}=(c_1+c_3+\cdots+c_{13})+(c_2+c_4+\cdots+c_{14})$

$=(1+2+2^2+\cdots+2^6)+[(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{14})]$

$=2^7-1+4-\sqrt{2}$

$=131-\sqrt{2}$. (12分)

19. **解**:(1)设"获三等奖"为事件A,由题意得$P(A)\geqslant\frac{5}{9}$, (1分)

又$P(A)=\frac{A_n^3}{n^3}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$, (3分)

所以$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\geqslant\frac{5}{9}$,整理得$4n^2-27n+18\geqslant0$,

解得$n\leqslant\frac{3}{4}$(舍去),或$n\geqslant6$. (5分)

所以n的最小值为6. (6分)

(2)设顾客在一次抽奖中获奖金额为随机变量ξ,则ξ的所有可能取值为108,60,18.根据题意得

$P(\xi=108)=\frac{C_6^1}{6^3}=\frac{1}{36}$, (7分)

$P(\xi=60)=\frac{C_6^1C_5^1C_3^2}{6^3}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$, (8分)

$P(\xi=18)=\frac{C_6^1A_5^2}{6^3}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$, (9分)

所以ξ的分布列为

ξ	108	60	18
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{9}$

(10分)

所以$E(\xi)=108\times\frac{1}{36}+60\times\frac{5}{12}+18\times\frac{5}{9}=38$. (12分)

20. (1)**证明**:因为$PA\perp$平面ABC,$AB\subset$平面ABC,

所以$PA\perp AB$. (1分)

因为在$\triangle ABC$中,$AB=2$,$BC=4$,$\angle ABC=60°$,

所以由余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=12$,所以$AC=2\sqrt{3}$,

所以$BC^2=AB^2+AC^2$,

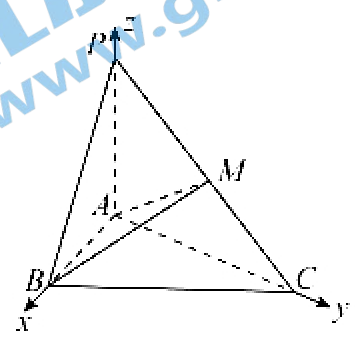
所以$AB\perp AC$. (3分)

又$PA\cap AC=A$,$PA\subset$平面PAC,$AC\subset$平面PAC,

所以$AB\perp$平面PAC. (4分)

又$AB\subset$平面ABM,所以平面$ABM\perp$平面PAC. (5分)

(2)**解**:由(1)知直线AB,AC,AP两两垂直,以A为原点,AB,AC,AP所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则$A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$P(0,0,4)$,$C(0,2\sqrt{3},0)$,则$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{PC}=(0,2\sqrt{3},-4)$. (6分)

设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$\overrightarrow{PM}=(0,2\sqrt{3}\lambda,-4\lambda)$,

所以$M(0,2\sqrt{3}\lambda,4-4\lambda)$,$\overrightarrow{AM}=(0,2\sqrt{3}\lambda,4-4\lambda)$.

设异面直线AM与BC所成的角为α,

则$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$,

即$\frac{3\lambda}{2\sqrt{7\lambda^2-8\lambda+4}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$,

解得$\lambda=\frac{1}{2}$,所以$\overrightarrow{AM}=(0,\sqrt{3},2)$. (8分)

设平面ABM的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}y+2z=0,\\ 2x=0,\end{cases}$

令$y=\sqrt{3}$,得$z=-\frac{3}{2}$,

所以$\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$. (9分)

设平面PBC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x',y',z')$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x'+2\sqrt{3}y'=0,\\ 2x'-4z'=0,\end{cases}$

令$x'=1$,得$y'=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$z'=\frac{1}{2}$,

所以$\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2}\right)$. (10分)

所以$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=$

$$\frac{1-\frac{3}{4}}{\sqrt{3+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{133}}{133},$$

所以平面ABM与平面PBC所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{133}}{133}$. (12分)

21. **解**:(1)因为椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(\sqrt{3},0)$,

所以$a^2-b^2=3$ ①. (1分)

由题意得直线AB的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即$bx+ay-ab=0$,

所以原点O到直线AB的距离为$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{5}{4}$ ②. (3分)

联立①②,解得$a^2=4$,$b^2=1$,

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (4分)

(2)直线 AE 的斜率为定值，理由如下：

由题意得直线 l 的方程为 $y=k(x-2)+1$，$k>0$.

联立 $\begin{cases}y=k(x-2)+1,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2-(16k^2-8k)x+16k^2-16k=0$.　　(6 分)

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2-8k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{16k^2-16k}{1+4k^2}$，

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=x_2$，得 $y_D=\dfrac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}$.

所以点 D 的坐标为 $\left(x_2,\dfrac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}\right)$.　　(8 分)

设 $E(x_E,y_E)$，则 $x_E=x_2$，$y_E=\dfrac{1}{2}(y_2+y_D)=\dfrac{1}{2}\left[y_2+\dfrac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}\right]$，$k_{AE}=\dfrac{y_E}{x_2-2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left[y_2+\dfrac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}\right]}{x_2-2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_2}{x_2-2}+\dfrac{y_1}{x_1-2}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{k(x_2-2)+1}{x_2-2}+\dfrac{k(x_1-2)+1}{x_1-2}\right]=k+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_2-2}+\dfrac{1}{x_1-2}\right)=k+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=k+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\dfrac{16k^2-8k}{1+4k^2}-4}{\dfrac{16k^2-16k}{1+4k^2}-2\times\dfrac{16k^2-8k}{1+4k^2}+4}=-\dfrac{1}{2}$.　　(11 分)

所以直线 AE 的斜率为定值 $-\dfrac{1}{2}$.　　(12 分)

22. (1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+ax-a=(x-1)(a-e^{-x})=\dfrac{(x-1)(ae^x-1)}{e^x}$.　　(1 分)

①当 $a\leqslant 0$ 时，$ae^x-1<0$，令 $f'(x)>0$，得 $x<1$；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$.　　(2 分)

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\ln a$ 或 $x=1$；

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<-\ln a$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $-\ln a<x<1$；　　(3 分)

当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，且仅在 $x=1$ 处 $f'(x)=0$；　　(4 分)

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<1$ 或 $x>-\ln a$；令 $f'(x)<0$，得 $1<x<-\ln a$.　　(5 分)

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$，$(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(1,-\ln a)$ 上单调递减；

当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\ln a)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-\ln a,1)$ 上单调递减.　　(6 分)

(2)**证明**：由题意得 $g(x)=f'(x)=(1-x)e^{-x}+a(x-1)$，则 $g'(x)=(x-2)e^{-x}+a$.

要使函数 $g(x)$ 有两个极值点，则方程 $g'(x)=0$ 有两个不同的根，且这两根的左、右两侧 $g'(x)$ 的函数值异号.　　(7 分)

令 $p(x)=g'(x)$，则 $p'(x)=(3-x)e^{-x}$.

令 $p'(x)>0$，得 $x<3$；令 $p'(x)<0$，得 $x>3$，

所以函数 $g'(x)$ 在区间 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递减.

则函数 $g'(x)$ 在 $x=3$ 处取得极大值，也是最大值.

当 $-e^{-3}<a<0$ 时，$g'(3)=e^{-3}+a>0$ 且 $g'(2)=a<0$，

所以 $g'(2)g'(3)<0$，所以函数 $g'(x)$ 在区间 $(2,3)$ 上至少存在一个零点 m.

又函数 $g'(x)$ 在区间 $(-\infty,3)$ 上单调递增.

所以函数 $g'(x)$ 在区间 $(-\infty,3)$ 上存在唯一的零点 m.

且当 $x\in(-\infty,m)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(m,3)$ 时，$g'(x)>0$.

所以 $x=m$ 是函数 $g(x)$ 的极小值点.　　(9 分)

下面证明函数 $g(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上存在唯一的极大值点.

先证：当 $x>3$ 时，$e^x>x^2$.

令 $h(x)=e^x-x^2$，$h(3)=e^3-9>0$.

$h'(x)=e^x-2x$，$h'(3)=e^3-6>0$.

令 $q(x)=h'(x)$.

当 $x>3$ 时，$q'(x)=e^x-2>e^3-2>0$，

所以函数 $h'(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增.

$h'(x)>h'(3)>0$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>h(3)>0$，即 $e^x>x^2(x>3)$.　　(10 分)

当 $x>3$ 时，取 $x_0=-\dfrac{1}{a}>e^3>3$.

$g'(x_0)=(x_0-2)e^{-x_0}+a=\dfrac{x_0-2}{e^{x_0}}+a<\dfrac{x_0}{e^{x_0}}+a<\dfrac{x_0}{x_0^2}+a=\dfrac{1}{x_0}+a=-a+a=0$，

由零点存在性定理，得函数 $g'(x)$ 在区间 $(3,x_0)$ 上至少存在一个零点.

又函数 $g'(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $g'(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上存在唯一的零点 n.

且在区间 $(3,n)$ 上，$g'(x)>0$，在区间 $(n,+\infty)$ 上，$g'(x)<0$，所以 $x=n$ 是函数 $g(x)$ 的极大值点.

综上，函数 $g(x)$ 有两个极值点.　　(12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。