2020 年 3 月牛栏山一中高三高考适应性测试试题

数学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题共 40 分)

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数是（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　（B）$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　（C）$1+\mathrm{i}$　　（D）$1-\mathrm{i}$

2.已知集合 $A=\{-2,3,1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$．若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值集合为（　）

（A）$\{1\}$　　（B）$\{\sqrt{3}\}$　　（C）$\{1,-1\}$　　（D）$\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

3.在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是

（A）-80　　（B）-10　　（C）5　　（D）40

4.在 ΔABC 中，“$\cos A<\cos B$”是“$\sin A>\sin B$"的　（　　　）

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

5.设 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0$，“不等式 $m+\dfrac{4}{m}>4$”成立的一个必要不充分条件是（　　）

（A）$m\neq 2$　　（B）$m>0$ 且 $m\neq 2$　　（C）$m>2$　　（D）$m\geq 2$

6.已知两条直线 l,m 与两个平面 α,β，下列命题正确的是　（　　）

（A）若 $l/\!/\alpha, l\perp m$，则 $m\perp\alpha$

（B）若 $l\perp\alpha, l/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

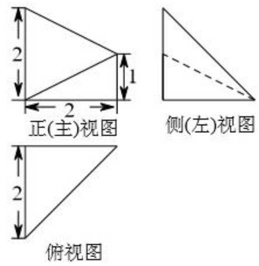
（C）若 $l/\!/\alpha, m/\!/\alpha$，则 $l/\!/m$

（D）若 $\alpha/\!/\beta, m/\!/\alpha$，则 $m/\!/\beta$

7.已知直线 $x+a^2y+6=0$ 与直线 $(a-2)x+3ay+2a=0$ 平行，则 a 的值为（　　）

（A）0 或 3 或 -1　　（B）0 或 3　　（C）3 或 -1　　（D）0 或 -1

8. 某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为



（A）1

（B）2

（C）3

（D）4

9.已知$\triangle ABC$的边长为 4 的正三角形，点D为边BC的中点，点E满足$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$，那么$\overrightarrow{EB}\bullet\overrightarrow{EC}$的值为（　　）

（A）$-\dfrac{8}{3}$　　　（B）-1　　　（C）1　　　（D）3

10. 当$x\in[0,1]$时，下列关于函数$y=(mx-1)^2$的图象与$y=\sqrt{x+m}$的图象交点个数说法正确的是（　　）

（A） 当$m\in[0,1]$时，有两个交点

（B） 当$m\in(1,2]$时，没有交点

（C）当$m\in(2,3]$时，有且只有一个交点

（D）当$m\in(3,+\infty)$时，有两个交点

第二部分(非选择题共 110 分)

二、填空题共 5 题，每题 5 分，共 25 分。

11.已知函数$f(x)=\cos^2(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$的周期为$\pi$，则$\omega=$________.

12.已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$的一条渐近线方程为$x=2y$，则$m=$_________.

13.已知点$P(x,y)$在直线$y=x$上，满足点P到圆$x^2+(y-1)^2=4$的距离为 3 的P点个数为___________ 个.

14.若函数$f(x)=(x-1)|x+a|$在区间$(1,2)$上为增函数，写出一个满足条件的实数a的值________.

15．对于集合$M=\{a|a=x^2-y^2,x\in Z,y\in Z\}$，给出如下三个结论：

①如果$B=\{b|b=2n+1,n\in N\}$，那么$B\subseteq M$；

②若$C=\{c|c=2n,n\in N\}$，对于$\forall c\in C$，则有$c\in M$；

③如果$a_1\in M,a_2\in M$，那么$a_1a_2\in M$.

④如果$a_1 \in M, a_2 \in M$，那么$a_1 + a_2 \in M$

其中，正确结论的序号是__________.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错得 0 分，其它作答得 3 分。

三、解答题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.(本小题 14 分)

已知函数$f(x)=(1+\tan x)\sin 2x$

(Ⅰ)求函数$f(x)$的定义域；

(Ⅱ)求函数$f(x)$的单调递减区间；

(Ⅲ)求函数$f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$上的最值。

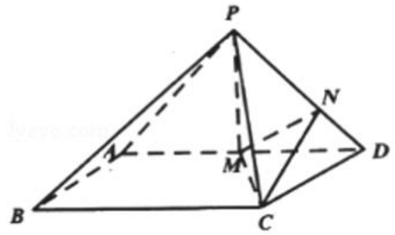
17.(本小题 14 分)

如图，平面PAD⊥平面$ABCD$，$PA=PD$，四边形$ABCD$为平行四边形，$\angle ABC=45°$，$AB=AC=2$，M为线段AD的中点，点N满足$\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{ND}$.

(Ⅰ)求证：直线PB∥平面MNC；

(Ⅱ)求证：平面MNC⊥平面PAD；

(Ⅲ)若平面PAB⊥平面PCD，求直线BP与平面PCD所成角的正弦值.



18.(本小题 14 分)

由于研究性学习的需要,中学生李华持续收集了手机“微信运动”团队中特定 20 名成员每天行走的步数,其中某一天的数据记录如下:

5860	6520	7326	6798	7325	8430	8215	7453	7446	6754
7638	6834	6460	6830	9860	8753	9450	9860	7290	7850

对这 20 个数据按组距 1000 进行分组,并统计整理,绘制了如下尚不完整的统计图表:

步数分组统计表（设步数为x）

组别	步数分组	频数
A	$5500 \le x < 6500$	2
B	$6500 \le x < 7500$	10
C	$7500 \le x < 8500$	m
D	$8500 \le x < 9500$	2
E	$9500 \le x < 10500$	n

(Ⅰ)写出 m,n 的值,并回答这 20 名"微信运动"团队成员一天行走步数的中位数落在哪个组别;

(Ⅱ)记 C 组步数数据的平均数与方差分别为 v_1, s_1^2,E 组步数数据的平均数与方差分别为 v_2, s_2^2,试分别比较 v_1 与 v_2, s_1^2 与 s_2^2 的大小;(只需写出结论)

(Ⅲ)从上述 A,E 两个组别的数据中任取 2 个数据,记这 2 个数据步数差的绝对值为 ξ,求 ξ 的分布列和数学期望.

19.(本小题 15 分)

设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c), a,b,c\in\mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(Ⅰ)若 $a=b=c$,$f(4)=8$,求 a 的值;

(Ⅱ)若 $a\neq b$,$b=c$,且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中,求 $f(x)$ 的极小值;

(Ⅲ)若 $a=0, 0<b\leqslant 1, c=1$,且 $f(x)$ 的极大值为 M,求证:$M\leq\dfrac{4}{27}$.

20.(本小题 14 分)

已知 F_1 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点,过 F_1 的直线 l 与椭圆交于两点 P,Q.

(Ⅰ)若直线 l 的倾斜角为 45°,求 $|PQ|$;

(Ⅱ)设直线 l 的斜率为 $k\ (k\neq 0)$,点 P 关于原点的对称点为 P',点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q',$P'Q'$ 所在直线的斜率为 k'. 若 $|k'|=2$,求 k 的值.

21.(本小题 14 分)

给定数列 a_1，$a_2,\cdots$，a_n.对 $i=1,2,\cdots,n-1$，该数列前 i 项的最大值记为 A_i，后 $n-i$ 项 a_{i+1}，$a_{i+2},\cdots$，a_n 的最小值记为 B_i，$d_i=A_i-B_i$.

(Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 为 3，4，7，1，写出 d_1，d_2，d_3 的值;

(Ⅱ)设 a_1，$a_2,\cdots$，a_n（$n\geq 4$）是公比大于 1 的等比数列，且 $a_1>0$.证明：

d_1，d_2，…，d_{n-1} 是等比数列;

(III)设 d_1，d_2，…，d_{n-1} 是公差大于 0 的等差数列，且 $d_1>0$，证明：a_1，a_2，…，a_{n-1} 是等差数列.

2020年3月牛栏山一中高三高考适应性测试

数学评分标准

1.A；2.C；3.A; 4.C；5.A；6；B; 7.D; 8.C; 9.B; 10.B

11.1　12. $\frac{1}{4}$　13.0　14.a⩾-1 或 a⩽-3 的所有数均可　15 .①③

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得5分，不选或有错得0分，其它作答得3分。

16 解：（1）函数的定义域为$\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z\}$……………………………2 分

（2）$f(x)=(1+\tan x)\sin 2x=2\sin x\cos x+2\sin^2 x$……………………………………4 分

$=\sin 2x-\cos 2x+1$……………………………………………………5 分

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$…………………………………………………………6 分

$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$……………………………………………………7 分

$\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{7\pi}{8}+k\pi(k\in Z)$,……………………………………………8 分

由于定义域为$\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z\}$……………………………9 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$[\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{7\pi}{8}+k\pi](k\in Z)$…………11 分

（3）由于 $0\le x<\frac{\pi}{2}$，$0\le 2x<\pi$，$-\frac{\pi}{4}\le 2x-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$……………………12 分

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)$有最大值 $\sqrt{2}+1$………………………………13 分

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ 即 $x=0$ 时，$f(x)$有最小值 0…………………………………14 分

17(本小题 14 分)

（*I*）证明：连接 *BD* 交 *CM* 于 *O*，连接 *ON*，

∵$\triangle OMD\backsim\triangle OCB$，

∴$\frac{OD}{OB}=\frac{DM}{BC}=\frac{1}{2}$,

∴$\frac{OD}{BD}=\frac{1}{3}$,

∵$\vec{PN}=2\vec{ND}$，∴$\frac{DN}{DP}=\frac{1}{3}$,

∴$\frac{OD}{BD}=\frac{DN}{PD}$，∴$ON\parallel PB$,

又 $ON\subset$平面 MNC，$PB\not\subset$平面 MNC，

∴$PB\parallel$平面 MNC. ……………………………………………4 分

（II）证明：∵$AB=AC$，$AB=CD$，

∴$AC=CD$，又 M 是 AD 的中点，

∴$CM\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

∴$CM\perp$ 平面 PAD，又 $CM\subset$ 平面 MNC，

∴平面 $MNC\perp$ 平面 PAD. ……………………………………………8 分

（III）解：∵$AB=AC$，$\angle ABC=45°$，∴$AB\perp AC$，

以 A 为原点，以 AB，AC 和平面过 A 点的垂线为坐标轴建立空间坐标系 $A-xyz$，

设 $PM=a$，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(-2,2,0)$，$M(-1,1,0)$，

∴$P(-1,1,a)$.

∴$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,1,a)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,-1,a)$，……10 分

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1=0\\ -x_1+y_1+az_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=1$ 可得 $\vec{m}=(0,-a,1)$，……………………………………………………11 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x_2=0\\ x_2-y_2+az_2=0\end{cases}$，

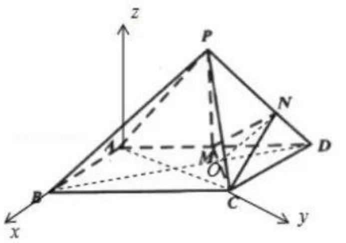
令 $z=1$ 可得 $\vec{n}=(0,a,1)$. ……………………………………………………12 分

∵平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，∴$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即 $1-a^2=0$，故 $a=1$.

∴$\overrightarrow{BP}=(-3,1,1)$，$\vec{n}=(0,1,1)$，

∴$\cos\langle\overrightarrow{BP},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{11}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$. ……………………………………13 分

∴直线 BP 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$. ……………………………………………14 分



18 本小题 14 分

解:（Ⅰ）$m=4, n=2, B$;··3 分

（Ⅱ）$v_1 < v_2, s_1^2 > s_2^2$;··5 分

（Ⅲ）ξ 的可能取值为 0,600,3400,4000,···6 分

P(ξ=0)= $\frac{1}{6}$···7 分

P(ξ=600)= $\frac{1}{6}$···8 分

P(ξ=3400)= $\frac{1}{6}$···9 分

P(ξ=4000)= $\frac{1}{6}$···10 分

ξ	0	600	3400	4000
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

···11 分

ξ 的数学期望为 $E\xi = 0\times\frac{1}{6}+600\times\frac{1}{6}+3400\times\frac{1}{3}+4000\times\frac{1}{3}=\frac{7700}{3}$ ························13 分

ξ 的数学期望为 $\frac{7700}{3}$ ························14 分

19(本小题 15 分)

解：（1）因为 $a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$．

因为 $f(4)=8$，所以 $(4-a)^3=8$，解得 $a=2$．···············2分

（2）因为 $b=c$，

所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)$．令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\frac{2a+b}{3}$．·······3分

因为 $a,b,\frac{2a+b}{3}$，都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，

所以 $\frac{2a+b}{3}=1, a=3, b=-3$．··········4分

所以$\dfrac{2a+b}{3}=1, a=3, b=-3$．………4分

此时$f(x)=(x-3)(x+3)^2$，$f'(x)=3(x+3)(x-1)$．……5分

令$f'(x)=0$，得$x=-3$或$x=1$．列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

…………………………6分

所以$f(x)$的极小值为$f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$．…………7分

（3）因为$a=0, c=1$，所以$f(x)=x(x-b)(x-1)=x^3-(b+1)x^2+bx$，

$f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$．………………8分

因为$0<b\le 1$，所以$\Delta=4(b+1)^2-12b=(2b-1)^2+3>0$，

则$f'(x)$有2个不同的零点，设为$x_1, x_2\left(x_1<x_2\right)$．

由$f'(x)=0$，得$x_1=\dfrac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}, x_2=\dfrac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$．………9分

列表如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$\left(x_1,x_2\right)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$的极大值$M=f\left(x_1\right)$．…………………10分

因为$0<b\le 1$，所以$x_1\in(0,1)$．…………………11分

当$x\in(0,1)$时，$f(x)=x(x-b)(x-1)\le x(x-1)^2$．…………12分

令$g(x)=x(x-1)^2, x\in(0,1)$，则$g'(x)=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-1)$．………13分

令 … 0，得 … $\dfrac{1}{}$ 列表如下

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{3}$．列表如下：

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，且是最大值，故 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$．……14分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\le g(x)\le\frac{4}{27}$，因此 $M\le\frac{4}{27}$．…………15分

20.(本小题 14 分)

已知 F_1 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点，过 F_1 的直线 l 与椭圆交于两点 P,Q．

（Ⅰ）若直线 l 的倾斜角为 45°，求 $|PQ|$；

（Ⅱ）设直线 l 的斜率为 k $(k\ne0)$，点 P 关于原点的对称点为 P'，点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q'，$P'Q'$ 所在直线的斜率为 k'．若 $|k'|=2$，求 k 的值.

解：（Ⅰ）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，由已知，椭圆的左焦点为 $(-1,0)$，

又直线 l 的倾斜角为 45°，所以直线 l 的方程为 $y=x+1$，……………1 分

由 $\begin{cases}y=x+1,\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 得 $7x^2+8x-8=0$，……………3 分

所以 $x_1+x_2=-\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$．……………4 分

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{2}\sqrt{(-\frac{8}{7})^2+4\times\frac{8}{7}}=\frac{24}{7}$．……………5 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，……………6 分

所以 $x_1+x_2=\frac{-8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$．……………8 分

依题意 $P'(-x_1,-y_1),Q'(x_2,-y_2)$，且 $y_1=k(x_1+1)$，$y_2=k(x_2+1)$，

所以，$|k'|=\left|\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}\right|=\left|\frac{k(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\right|$，……………10 分

所以，$|k'|=\left|\dfrac{y_1-y_2}{x_1+x_2}\right|=\left|\dfrac{k(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\right|$，……………10 分

其中$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$，……………11 分

结合 $x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}$，可得$|k'|=\left|\dfrac{3\sqrt{1+k^2}}{2k}\right|=2$．……………12 分

解得$7k^2=9$，$k=\pm\dfrac{3}{7}\sqrt{7}$．……………14 分

21(本小题 14 分)

给定数列a_1，$a_2,\cdots$，a_n.对$i=1,2,\cdots,n-1$，该数列前i项的最大值记为A_i，后$n-i$项a_{i+1}，$a_{i+2},\cdots$，a_n的最小值记为B_i，$d_i=A_i-B_i$．

（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$为 3，4，7，1，写出d_1，d_2，d_3的值;

（Ⅱ）设a_1，$a_2,\cdots$，a_n（$n\geq 4$）是公比大于 1 的等比数列，且$a_1>0$.证明：

d_1，d_2，…，d_{n-1}是等比数列;

（Ⅲ）设d_1，d_2，…，d_{n-1}是公差大于 0 的等差数列，且$d_1>0$，证明：a_1，a_2，…，a_{n-1}是等差数列.

解：(Ⅰ) $d_1=2,d_2=3,d_3=6$.……………………3分

(Ⅱ) 因为$a_1>0$，公比$q>1$，所以a_1，$a_2,\cdots$，a_n是递增数列.…………4分

因此，对$i=1,2,\cdots,n-1$，$A_i=a_i$，$B_i=a_{i+1}$．………5分

于是对$i=1,2,\cdots,n-1$，$d_i=A_i-B_i=a_i-a_{i+1}=a_1(1-q)q^{i-1}$.……6分

因此$d_i\neq 0$且$\dfrac{d_{i+1}}{d_i}=q$（$i=1,2,\cdots,n-2$），即d_1，d_2，…，d_{n-1}是等比数列. ……7分

(Ⅲ) 设d为d_1，d_2，…，d_{n-1}的公差.…………8分

对$1\leq i\leq n-2$，因为$B_i\leq B_{i+1}$，$d>0$，所以$A_{i+1}=B_{i+1}+d_{i+1}\geq B_i+d_i+d>B_i+d_i=A_i$．

……………………9分

又因为$A_{i+1}=\max\{A_i,a_{i+1}\}$，所以$a_{i+1}=A_{i+1}>A_i\geq a_i$.……………………10分

从而a_1，$a_2,\cdots$，a_{n-1}是递增数列，因此$A_i=a_i$（$i=1,2,\cdots,n-2$）. ……………11分

又因为$B_1 = A_1 - d_1 = a_1 - d_1 < a_1$，所以$B_1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$.……………12分

因此$a_n = B_1$． 所以$B_1 = B_2 = \cdots = B_{n-1} = a_n$.……………………13分

所以$a_i = A_i = B_i + d_i = a_n + d_i$.

因此对$i = 1, 2, \cdots, n-2$都有$a_{i+1} - a_i = d_{i+1} - d_i = d$，即$a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$是等差数列.……14分