秘密 ★ 启用前 【考试时间：2021 年 11 月 1 日 15：00—17：00】

绵阳市高中 2019 级第一次诊断性考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，$B=\{-1，0，1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1，0\}$　　B．$\{-1，1\}$

C．$\{0，1\}$　　D．$\{-1，0，1\}$

2．若 $0<a<b$，则下列结论正确的是

A．$\ln a>\ln b$　　B．$b^2<a^2$

C．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D．$(\frac{1}{2})^a>(\frac{1}{2})^b$

3．“$\ln(x+2)<0$”是“$x<-1$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．设 D，E 为 $\triangle ABC$ 所在平面内两点，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，则

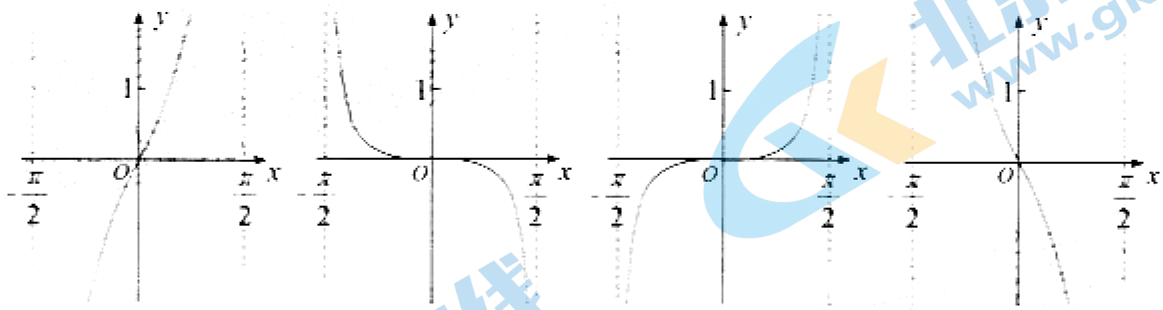
A．$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{DE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

5．设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0,\\2x+y-8\leqslant 0,\\y\leqslant 3\end{cases}$ 则 $z=3x+4y$ 的最大值是

A．12　　B. 17　　C. 18　　D．$\frac{39}{2}$

6．函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x}$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 上的图象大致为



A　　　　　　B　　　　　　C　　　　　　D

7．通常人们用震级来描述地震的大小．地震震级是对地震本身大小的相对量度，用 M 表示，强制性国家标准 GB17740—1999《地震震级的规定》规定了我国地震震级的计算和使用要求，即通过地震面波质点运动最大值 $(A/T)_{\max}$ 进行测定，计算公式如下：$M=\lg(A/T)_{\max}+1.66\lg\Delta+3.5$（其中 Δ 为震中距），已知某次某地发生了 4.8 级地震，测得地震面波质点运动最大值为 0.01，则震中距大约为

A．58　　　　B．78　　　　C．98　　　　D．118

8．已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x，满足 $f(x)+f(-x)=0$，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=2^x-m$（m 为常数），则 $f(1-\log_2 3)=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　　　C．$\dfrac{1}{3}$　　　　D．$-\dfrac{1}{3}$

9．若 $a=(\dfrac{16}{81})^{-\frac{1}{4}}$，$b=\log_3 2+\log_2 3$，$c=\dfrac{3}{2}\log_3 2$，则 a，b，c 的大小关系为

A．$c>b>a$　　　　B．$b>a>c$　　　　C．$a>c>b$　　　　D．$b>c>a$

10．设 $f(x)=\begin{cases}x+2,(x\leqslant0),\\ \sqrt{x},(x>0),\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a-2)$，则 $f(5-a)=$

A．2　　　　B．0 或 1　　　　C．2 或 $\sqrt{5}$　　　　D．$\sqrt{5}$

11．已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 -5，S_3，S_6 成等差数列，则 S_9-S_6 的最小值为

A．25　　　　B．20

C．15　　　　D．10

12．把函数 $f(x)=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x_1)=g(x_2)-6$，x_1，$x_2\in[-\pi,\pi]$，则 x_1-x_2 的最大值为

A．$\dfrac{3\pi}{4}$　　　　B．π　　　　C．$\dfrac{7\pi}{4}$　　　　D．2π

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=2$，$S_7=35$，则 $a_6=$________.

14. 已知平面向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(m,-1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$________.

15. 已知 $\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin\beta=\frac{1}{3}$，若 $3\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$________.

16. 已知函数 $f(x)=2x^2-ax$，若不等式 $|f(x)|\leq 1$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. （12 分）

已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，点 $M(-\frac{7\pi}{24},-2)$ 是该函数图象的一个最低点.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式及函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若 $x\in[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}]$，求函数 $y=f(x)$ 的值域.

18. （12 分）

已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=2a_n-2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n+1}a_na_{n+1}$.

19. （12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，从以下三个条件中任选一个：①$b\tan C=(2a-b)\tan B$；②$2c\cos B=2a-b$；③$ac\cos A+a^2(\cos C-1)=b^2-c^2$，解答如下问题.

（1）求角 C 的大小；

（2）若△ABC 为锐角三角形，且 $a=mb$，求实数 m 的取值范围.

20. （12 分）

已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+3a^2x-\frac{5}{3}$.

（1）若 $a=-1$ 时，求 $f(x)$在区间$[-4，2]$上的最大值与最小值；

（2）若函数 $f(x)$仅有一个零点，求 a 的取值范围.

21. （12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+ax^2-bx$，其图象在点$(0，f(0))$处的切线斜率为-3.

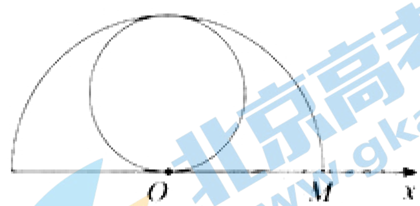
（1）求 b 的值；

（2）若 $f(x)\geq -e-1$ 在 $x\in \mathbf{R}$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系中，已知点 $M(2，0)$，曲线 C_1 是以点 O 为圆心，以 OM 为半径的半圆，曲线 C_2 是过极点且与曲线 C_1 相切于点$(2，\frac{\pi}{2})$的圆.



（1）分别写出曲线 C_1，C_2 的极坐标方程；

（2）直线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi，\rho\in \mathbf{R})$ 与曲线 C_1，C_2 分别相交于点 A，B(异于极点)，求$\triangle ABM$ 面积的最大值.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+m|-|x-2m|\ (m>0)$的最大值为 6.

（1）求 m 的值；

（2）若正数 x，y，z 满足 $x+y+z=m$，求证：$\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leqslant\sqrt{m}$.

绵阳市高中 2019 级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CDADC　ACBBA　BC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．7　　14．2　　15．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　16．$[1,\ 2\sqrt{2}]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17．解：（1）由题意得 $A=2$，$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，

∴ $\omega=4$. ……………………………………………………………2 分

∵函数 $f(x)$ 的图象经过点 $M(-\frac{7\pi}{24},-2)$，

∴ $2\cos(-\frac{7\pi}{6}+\varphi)=-2$.

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………5 分

∴ $f(x)=2\cos(4x+\frac{\pi}{6})$. ……………………………………………6 分

由 $-\pi+2k\pi\leqslant 4x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi$，

得 $-\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{24}(k\in Z)$.

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{24}](k\in Z)$. ……………8 分

（2）∵ $x\in[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}]$，

∴ $4x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，

∴ $\cos(4x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$，

∴函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,\ 2]$. ……………………………………12 分

18．解：（1）当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-2=a_1$，

解得 $a_1=2$． ……………………………………………………………………2 分

∵ $S_n=2a_n-2$，①

∴当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$．②

①－②得 $a_n=2a_{n-1}$，

整理得 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$．

∴数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 2，公比为 2 的等比数列． ……………………………5 分

∴ $a_n=2^n$． ……………………………………………………………………6 分

（2）由（1）得 $a_na_{n+1}=2\times 4^n$． ……………………………………………7 分

∴ $T_n=a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n+1}a_na_{n+1}$

$$=2(4-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}\times 4^n)=\frac{8}{5}[1-(-4)^n]．$$ ……………………………12 分

19．解：选择条件①：由 $b\tan C=(2a-b)\tan B$，得 $\frac{b\sin C}{\cos C}=\frac{(2a-b)\sin B}{\cos B}$，

由正弦定理可得，$\sin B\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\sin B\cos C$．

∴ $\sin C\cos B=2\sin A\cos C-\sin B\cos C$，

∴ $2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(C+B)=\sin A$，

∵ $A\in(0,\ \pi)$，∴ $\sin A\neq 0$，

∴ $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$．

选择条件②：由正弦定理可得，$2\sin C\cos B=2\sin A-\sin B$，

又 $\sin A=\sin(C+B)$，

∴ $2\sin C\cos B=2\sin(C+B)-\sin B=2(\sin C\cos B+\cos C\sin B)-\sin B$，

化简整理得 $2\cos C\sin B=\sin B$，由 $\sin B>0$，故 $\cos C=\frac{1}{2}$，

又 $0<C<\frac{\pi}{2}$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$．

选择条件③：由已知得，$b^2+a^2-c^2=ac\cos A+a^2\cos C$，

由余弦定理，得 $b^2+a^2-c^2=2ab\cos C$，

$\because b^2+c^2-a^2=ac\cos C+c^2\cos A$，

$\therefore 2ab\cos C=ac\cos A+a^2\cos C$，

$\because a>0$，$\therefore 2b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

由正弦定理，有 $2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………6 分

（2）$\because a=mb$，

$\therefore m=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin(B+\frac{\pi}{3})}{\sin B}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}$. ………………………………………8 分

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $B\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$，

$\therefore \tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………10 分

$\therefore \dfrac{1}{2}<m<2$. ………………………………………………………………12 分

20．解：（1）由题意得 $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$. ……………………1 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-(x-1)(x+3)$，$x\in[-4,2]$.

由 $f'(x)>0$，解得 $-3<x<1$；

由 $f'(x)<0$，解得 $-4\leqslant x<-3$ 或 $1<x\leqslant 2$. ……………………………………3 分

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,1)$ 上单调递增，在区间 $[-4,-3)$，$(1,2]$ 单调递减.

又 $f(-4)=-\dfrac{25}{3}$，$f(-3)=-\dfrac{32}{3}$，$f(1)=0$，$f(2)=-\dfrac{7}{3}$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $[-4,2]$ 上的最大值为 0，最小值为 $-\dfrac{32}{3}$. ……………6 分

（2）函数 $f(x)$ 只有一个零点.

$\because f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$，

i)当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $3a<x<-a$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(3a,-a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<3a$ 或 $x>-a$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty，3a)$，$(-a，+\infty)$ 上单调递减.

又 $f(0)=-\frac{5}{3}<0$，

∴只需要 $f(-a)<0$，解得 $-1<a<0$.

∴实数 a 的取值范围为 $-1<a<0$.

ii) 当 $a=0$ 时，显然 $f(x)$ 只有一个零点成立. ……………………………10 分

iii) 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $-a<x<3a$，

即 $f(x)$ 在区间 $(-a，3a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<-a$ 或 $x>3a$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty，-a)$，$(3a，+\infty)$ 上单调递减；

又 $f(0)=-\frac{5}{3}<0$，∴只需要 $f(3a)<0$，解得 $0<a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上：实数 a 的取值范围是 $(-1,\frac{\sqrt[3]{5}}{3})$. ……………………………………12 分

21．解：（1）由题意得 $f'(x)=(x-1)e^x+2ax-b$. ………………………………2 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0，f(0))$ 处的切线的斜率为 -3，

∴ $f'(0)=-b-1=-3$，

解得 $b=2$. …………………………………………………………………………4 分

（2）∵ $f(x)>-e-1$ 恒成立，∴$f(1)=-e+a-2>-e-1$，即 $a>1$.

∴$f(x)\geqslant(x-2)e^x+x^2-2x$（当 $x=0$ 时，取“=”）. ……………………………6 分

令 $g(x)=(x-2)e^x+x^2-2x$，

则 $g'(x)=(x-1)e^x+2(x-1)=(x-1)(e^x+2)$.

由 $g'(x)>0$，得 $x>1$，由 $g'(x)<0$，得 $x<1$.

∴函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty，1)$ 上单调递减，

在区间 $(1，+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………8 分

∴ $g(x)_{\min}=g(1)=-e-1$，

∴$g(x)\geqslant-e-1$（当 $x=1$ 时，取“=”）.

∴$f(x)>-e-1$.

综上，实数 a 的取值范围为 $a>1$. ……………………………………12 分

22．解：（1）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ……………………………2 分

设 $P(\rho,\ \theta)$ 为曲线 C_2 上的任意一点，可得 $\rho=2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$．

∴曲线 C_2 极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ……………………………………5 分

（2）∵直线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\ \rho\in\mathbf{R})$ 与曲线 C_1，C_2 分别相交于点 A，B，

∴设 $B(\rho_B,\ \alpha)$，则 $A(\rho_A,\ \alpha)$．

由题意得 $\rho_B=2\sin\alpha$，$\rho_A=2$，

∴ $AB=\rho_A-\rho_B=2-2\sin\alpha$． ……………………………………………………7 分

∵点 M 到直线 AB 的距离 $d=OM\times\sin\alpha=2\sin\alpha$，

∴ $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}(2-2\sin\alpha)\times2\sin\alpha$

$$=2(1-\sin\alpha)\times\sin\alpha\leqslant2\times\frac{(\sin\alpha+1-\sin\alpha)^2}{4}=\frac{1}{2}$$

(当且仅当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)．

∴△ABM 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}$． ……………………………………………10 分

23．解：（1）由题意得 $f(x)=|x+m|-|x-2m|\leqslant|(x+m)-(x-2m)|=|3m|$． ………3 分

∵函数 $f(x)$ 的最大值为 6，

∴ $|3m|=6$，即 $m=\pm2$．

∵ $m>0$，∴ $m=2$． ……………………………………………………………5 分

（2）由（1）知，$x+y+z=2$，

∵ $x>0$，$y>0$，$z>0$，

∴ $2=x+y+z=(\frac{x}{2}+y)+(\frac{x}{2}+z)$

$\geqslant2\sqrt{\frac{xy}{2}}+2\sqrt{\frac{xz}{2}}$(当且仅当 $\frac{x}{2}=y=z$ 时，等号成立)． ……………………………8 分

∴ $\sqrt{2}\sqrt{xy}+\sqrt{2}\sqrt{xz}\leqslant2$，

∴ $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leqslant\sqrt{2}$(当且仅当 $x=1$，$y=z=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)． ………………10 分