

# 2023 北京高中合格考数学

## (第二次)

### 第一部分 (选择题 共 60 分)

一、选择题：共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\{0, 1\}$                       B.  $\{0, 1, 2\}$                       C.  $\{0, 2\}$                       D.  $\{1, 2\}$

2. 函数  $y = \log_2 x$  的图象经过点 ( )

- A.  $(1, 0)$                       B.  $(1, 1)$                       C.  $(-1, 1)$                       D.  $(2, 2)$

3. 要得到函数  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象，只要将函数  $y = \cos x$  的图象 ( )

- A. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度                      B. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度                      D. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度

4. 已知向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, x)$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $x$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $-1$                       C.  $2$                       D.  $-2$

5. 已知平面内的两个非零向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $\vec{a} = -3\vec{b}$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  ( )

- A. 相等                      B. 方向相同                      C. 垂直                      D. 方向相反

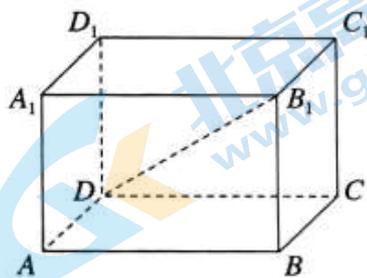
6.  $\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \log_3 9 =$  ( )

- A.  $-5$                       B.  $-1$                       C.  $0$                       D.  $1$

7. 在复平面内，复数  $z = -2 + i$  对应的点位于 ( )

- A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限

8. 如图，在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AD = AA_1 = 2$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$ , 则  $B_1D =$  ( )



A.3                                  B. 4                                  C. 5                                  D. 6

9. 函数  $f(x) = 2^x - 2$  的零点个数是 ( )

A. 1                                  B. 2                                  C. 3                                  D. 4

10. 不等式  $(x+3)(x-1) < 0$  的解集是 ( )

A.  $\{x | -3 < x < 1\}$                                   B.  $\{x | -1 < x < 3\}$   
C.  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$                                   D.  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

11. 复数  $(2+i)^2 = ( )$

A.  $4-3i$                                   B.  $3-4i$                                   C.  $4+3i$                                   D.  $3+4i$

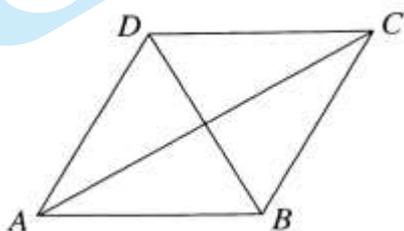
12. 已知  $x > 0$ , 则  $x + \frac{4}{x}$  的最小值为 ( )

A. 1                                  B. 2                                  C. 3                                  D. 4

13. 甲、乙两人在罚球线进行投篮比赛, 甲的命中率为 0.7, 乙的命中率为 0.8, 甲、乙命中与否互不影响. 甲、乙两人各投篮 1 次, 那么“甲、乙两人都命中”的概率为 ( )

A. 0.08                                  B. 0.14                                  C. 0.24                                  D. 0.56

14. 如图, 四边形  $ABCD$  是菱形, 下列结论正确的是 ( )



A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$                                   B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$                                   C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$                                   D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

15. 已知直线  $l, m$  和平面  $\alpha$ , 满足  $l \parallel m, m \perp \alpha$ , 则下列结论正确的是 ( )

A.  $l \parallel \alpha$                                   B.  $l \subset \alpha$                                   C.  $l \perp \alpha$                                   D.  $l$  是平面  $\alpha$  的斜线

16. 已知  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\sin(-\alpha) = ( )$

A.  $-\frac{4}{5}$                                   B.  $-\frac{3}{5}$                                   C.  $\frac{3}{5}$                                   D.  $\frac{4}{5}$

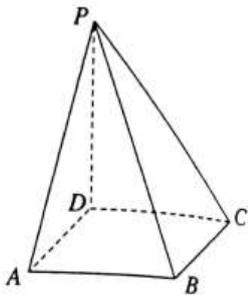
17. 在核酸检测中, “10 合 1” 混采检测是指将 10 个人的样本混合在一个采集管中进行检测. 采集时, 将采集管发放给 10 人中的第一个人. 某同学参加 “10 合 1” 混采, 他拿到采集管的概率为 ( )

A.  $\frac{9}{10}$                                   B.  $\frac{1}{2}$                                   C.  $\frac{1}{9}$                                   D.  $\frac{1}{10}$

18. “ $a > b > 0$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的 ( )

A. 充分而不必要条件                                  B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                                  D. 既不充分也不必要条件





- (1) 求证:  $AB \parallel$  平面  $PCD$ ;  
 (2) 求证:  $AB \perp$  平面  $PAD$ .

26. 阅读下面题目及其解答过程.

已知函数  $f(x) = |x-1| + |x+1|$ .

- (1) 求证: 函数  $f(x)$  是偶函数;  
 (2) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间.

解: (1) 因为函数  $f(x)$  的定义域是 ①,

所以  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $-x \in \mathbf{R}$ .

又因为  $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1|$ ,

所以  $f(-x) =$  ②.

所以函数  $f(x)$  是偶函数.

(2) 当  $x \leq -1$  时,  $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) - (x+1) = -2x$ ,

此时函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -1]$  上单调递减.

当  $-1 < x < 1$  时,  $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) =$  ③.

当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = |x-1| + |x+1| =$  ④,

此时函数  $f(x)$  在区间 ⑤ 上单调递增.

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $[1, +\infty)$ .

以上题目的解答过程中, 设置了①~⑤五个空格, 如下的表格中为每个空格给出了两个选项, 其中只有一个正确, 请选出正确的选项, 并填写在相应的横线上 (只需填写“A”或“B”).

空格序号	选项	
①	(A) $[-1, +\infty)$	(B) $\mathbf{R}$
②	(A) $f(x)$	(B) $-f(x)$

③	(A) 2	(B) -2
④	(A) $2x$	(B) $-2x$
⑤	(A) $(-\infty, 1]$	(B) $[1, +\infty)$

27. 已知函数  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

(1) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(2) 求  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$  上的最大值及相应  $x$  的值.

28. 已知数集  $A$  含有  $n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 个元素, 定义集合  $A^* = \{x + y \mid x, y \in A\}$ .

(1) 若  $A = \{1, 2, 3\}$ , 写出  $A^*$ ;

(2) 写出一个集合  $A$ , 使得  $A = A^*$ ;

(3) 当  $n = 4$  时, 是否存在集合  $A$ , 使得  $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ ? 若存在, 写出一个符合条件的集合  $A$ ; 若不存在, 说明理由.

# 参考答案

## 第一部分（选择题 共 60 分）

一、选择题：共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】B

【分析】由并集定义可求.

【详解】由题意， $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{0, 1\}$ ，

所以  $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ .

故选：B

2. 【答案】A

【分析】根据对数的运算求解即可.

【详解】根据对数的运算可知， $\log_2 1 = 0$ ， $\log_2 1 \neq 1$ ， $\log_2(-1)$  无意义， $\log_2 2 = 1$ ，

所以函数  $y = \log_2 x$  的图象经过点  $(1, 0)$ .

故选：A

3. 【答案】D

【分析】根据三角函数图象的相位变换可得.

【详解】由三角函数图象的相位变换可知，将函数  $y = \cos x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度所得图象的解

析式为  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

故选：D

4. 【答案】C

【分析】利用平面向量垂直的坐标表示可求得实数  $x$  的值.

【详解】因为向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, x)$ ， $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + x = 0$ ，解得  $x = 2$ .

故选：C

5. 【答案】D

【分析】根据向量的共线及模的关系确定选项即可.

【详解】因为两个非零向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  满足  $\vec{a} = -3\vec{b}$ ，

所以  $\vec{a}, \vec{b}$  为共线反向向量，且模不相等，

所以 ABC 错误，D 正确.

故选：D

6. 【答案】B

【分析】根据指数幂的性质及对数的运算求解.

【详解】 $\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \log_3 9 = 1 - \log_3 3^2 = 1 - 2 = -1$ .

故选: B

7. 【答案】B

【分析】由复数的几何意义得出答案.

【详解】复数  $z = -2 + i$  对应的点坐标为  $(-2, 1)$ , 位于第二象限

故选: B

8. 【答案】B

【分析】根据长方体的性质求解.

【详解】在长方体中,  $B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$ ,

故选: B

9. 【答案】A

【分析】由函数的单调性结合  $f(1) = 0$  即可判断零点个数.

【详解】函数  $f(x) = 2^x - 2$  是  $\mathbb{R}$  上的单调递增函数, 且  $f(1) = 2 - 2 = 0$ ,

所以函数  $f(x) = 2^x - 2$  只有一个零点,

故选: A.

10. 【答案】A

【分析】先解相应方程, 然后根据二次函数开口方向判断解集即可.

【详解】解方程  $(x+3)(x-1) = 0$  得  $x = -3$  或  $x = 1$ ,

因为函数  $f(x) = (x+3)(x-1)$  开口向上,

所以不等式  $(x+3)(x-1) < 0$  的解集为  $\{x | -3 < x < 1\}$ .

故选: A

11. 【答案】D

【分析】

根据复数的乘法运算可得答案.

【详解】 $(2+i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$ .

故选: D.

12. 【答案】D

【分析】直接由基本不等式运算即可.

【详解】因为  $x > 0$ , 所以  $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ , 即  $x + \frac{4}{x}$  的最小值为 4,

当且仅当  $x = 2 > 0$  时，等号成立.

故选：D.

13. 【答案】D

【分析】根据题意，由相互独立事件的概率公式求解.

【详解】根据独立事件同时发生的概率公式可知，

“甲、乙两人都命中”的概率为  $P = 0.7 \times 0.8 = 0.56$ ，

故选：D

14. 【答案】C

【分析】根据向量相等的概念及向量的加法法则判断选项即可.

【详解】因为四边形  $ABCD$  是菱形，

所以根据向量加法的平行四边形法则知， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ，

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ ，故 C 对 D 错；

因为向量方向不同，所以  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ ，故 AB 错误.

故选：C

15. 【答案】C

【分析】根据线面垂直的性质得解.

【详解】因为  $l // m$ ， $m \perp \alpha$ ，

所以  $l \perp \alpha$ ，

故选：C

16. 【答案】B

【分析】根据诱导公式求解.

【详解】因为  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，所以  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ，

故选：B

17. 【答案】D

【分析】根据古典概型求解.

【详解】因为某同学参加“10 合 1”混采，他在 10 人组中的位置是等可能的，

有 10 个位置可排，成为第一个人的可能性为  $\frac{1}{10}$ ，

所以他拿到采集管的概率为  $\frac{1}{10}$ .

故选：D

18. 【答案】A

【分析】根据充分不必要条件的概念判断即可.

【详解】当  $a > b > 0$  时， $a^2 > b^2$ ；当  $a^2 > b^2$  时， $|a| > |b|$ ，不一定  $a > b > 0$ ，所以“ $a > b > 0$ ”

是“ $a^2 > b^2$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

19. 【答案】 B

【分析】 由  $2 \in P, 3 \notin P$ , 结合分段函数的解析式可得答案.

【详解】 由题意可知  $2 \in P, 3 \notin P$ ,

所以  $f(2) + f(3) = 1 + (-1) = 0$ ,

故选: B.

20. 【答案】 B

【分析】 根据题意算出各时间段的充电费用即可判断选项.

【详解】 由题知, 小王在 15: 00—18: 00 时段充电 0.5 小时, 费用为  $6.5 \times 0.5 \times 1.4 = 4.55$  元;

在 18: 00—21: 00 时段充电 3 小时, 费用为  $6.5 \times 3 \times 1.6 = 31.2$  元;

记在 21: 00—23: 00 时段充电时间为  $x$  小时, 费用为  $6.5x \times 1.4 = 9.1x$  元.

综上, 小王应缴纳的充电费  $y = 4.55 + 31.2 + 9.1x = 9.1x + 35.75$ ,

因为  $0 < x \leq 0.5$ , 所以  $35.75 < y \leq 40.3$ .

故选: B

## 第二部分 (非选择题 共 40 分)

二、填空题: 共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分.

21. 【答案】  $\{x | x \neq -1\}$

【分析】 根据函数解析式有意义求解即可.

【详解】 由  $x+1 \neq 0$  可得  $x \neq -1$ ,

所以函数  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  的定义域是  $\{x | x \neq -1\}$ ,

故答案为:  $\{x | x \neq -1\}$

22. 【答案】  $(-5, 4)$

【分析】 根据向量加法的坐标运算求解.

【详解】 因为  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-3, 1)$ ,

所以  $\vec{a} + 2\vec{b} = (1, 2) + (-6, 2) = (-5, 4)$ ,

故答案为:  $(-5, 4)$

23. 【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】 由二倍角的正弦公式求解.

【详解】  $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

故答案为:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

24. 【答案】①②③

【分析】根据雷达图, 明显可得出甲、乙每月投资额的大小及波动幅度, 即可得出结论.

【详解】由雷达图可知, 12月份甲产品的月投资额低于乙产品的月投资额, 故①正确;

由雷达图可知, 该公司去年甲产品的月投资额的平均数在25万元附近, 比较稳定, 变化幅度小, 乙产品的月投资额的平均数明显小于25万元较多, 并且不稳定, 变化幅度大, 故②③正确.

故答案为: ①②③

三、解答题: 共4小题, 共28分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

25. 【答案】(1) 证明见详解

(2) 证明见详解

【分析】(1) 因为  $AB \parallel CD$ , 由线面平行判定定理得证;

(2) 由题意得  $AB \perp AD$ ,  $AB \perp PD$ , 根据线面垂直的判定定理得证.

【小问1详解】

由题意, 底面  $ABCD$  是矩形, 即  $AB \parallel CD$ ,

$CD \subset$  平面  $PCD$ ,  $AB \not\subset$  平面  $PCD$ , 所以  $AB \parallel$  平面  $PCD$ ;

【小问2详解】

由题意,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $AB \perp PD$ ,

又底面  $ABCD$  是矩形, 即  $AB \perp AD$ ,

$AD \cap PD = D, AD \subset$  平面  $PAD$ ,  $PD \subset$  平面  $PAD$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $PAD$ .

26. 【答案】①B②A③A④A⑤B

【分析】①由具体函数的定义域求解; ②由  $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = f(x)$  求解; ③由  $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$  求解; ④  $f(x) = |x-1| + |x+1| = x-1 + x+1 = 2x$  求解; ⑤由一次函数的单调性判断.

【详解】解: ①因为  $f(x) = |x-1| + |x+1|$ , 所以  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ; 故答案为: B.

②因为  $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = f(x)$ , 故答案为: A.

③因为  $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$ , 故答案为: A.

④因为  $f(x) = |x-1| + |x+1| = x-1 + x+1 = 2x$ , 故答案为: A;

⑤因为当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = 2x$ , 所以函数是  $[1, +\infty)$  上的增函数, 故答案为: B.

27. 【答案】(1)  $\pi$

(2)  $2, x = \frac{\pi}{6}$

【分析】(1) 根据正弦型函数的周期公式得解；

(2) 根据自变量的取值范围求出  $2x + \frac{\pi}{6}$  的范围，再由正弦函数求解即可。

【小问 1 详解】

因为函数  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ,

所以周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ,

即函数最小正周期为  $\pi$ .

【小问 2 详解】

因为  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ , 所以  $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ ,

所以  $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ ,  $-2 \leq f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$ ,

所以  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$  上的最大值为 2,

此时  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{6}$ .

28. 【答案】(1)  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

(2)  $\{0\}$

(3) 不存在，理由见解析。

【分析】(1) 根据集合的新定义，写出  $A^*$  中元素即可得解；

(2) 根据条件分析集合中元素即可得解；

(3) 根据题意可得不存在，利用反证法证明即可。

【小问 1 详解】

因为  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $A^* = \{x + y | x, y \in A\}$ ,

所以  $1+1=2, 1+2=3, 1+3=4, 2+2=4, 2+3=5, 3+3=6$  为  $A^*$  中元素，

故  $A^* = \{x + y | x, y \in A\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

【小问 2 详解】

取  $A = \{0\}$ , 此时  $A^* = \{x + y | x, y \in A\} = \{0\}$ ,

满足  $A = A^*$ .

【小问 3 详解】

当  $n=4$  时，不存在集合  $A$ ，使得  $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 。

(反证法)

假设  $n=4$  时，存在集合  $A$ ，使得  $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ ，

不妨设  $A = \{a, b, c, d\}$ ，且  $a < b < c < d$ ，

则  $2a < a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < 2d$ ，

所以  $2a, a+b, a+c, b+c, b+d, c+d, 2d$  为  $A^*$  中 7 个不同的元素，

所以  $2a=2, a+b=3, a+c=4, b+c=6, b+d=7, c+d=8, 2d=10$ ，

由  $2a=2, a+b=3, a+c=4$  解得  $a=1, b=2, c=3$ 。

此时， $b+c=5 \in A^*$  与  $5 \notin A^*$  矛盾，

所以假设不成立，

故不存在这样的集合  $A$ 。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：[京考一点通](#)，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

