2022—2023 学年高三考前定位考试
理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\sqrt{x}\geqslant 1\}$，$B=\{x||x|\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[-2,+\infty)$

2. 若复数 $z=\dfrac{m+2i}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于第二象限，则实数 m 的取值范围是

A. $(-2,2)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, 0<x<1,\\ 4^{x-2}, x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(f(1))=$

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

4. 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，然后横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin x$ 的图象，则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为

A. $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

5. 已知 $\left(ax-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中的常数项是 672，则 $a=$

A. 3^9　　B. 2^9　　C. 2　　D. 1

6. 已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$AB=2DC=2AD=2$，BC 的中点为 E，则 $\overrightarrow{AE}=$

A. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$　　C. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D. $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB=4$，$AC=4$，$BC=4\sqrt{2}$，$PA=6$，D 为 PB 的中点，则异面直线 AD 与 PC 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$　　B. $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$　　C. $\dfrac{5}{14}$　　D. $\dfrac{9}{13}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-ae^x, x<a,\\ -(x-2)^2, x\geqslant a\end{cases}$ 的最大值为 0，则实数 a 的取值范围为

A. $[0,2]$　　B. $[0,1]$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $[0,2)$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\sin A=\sin B\cos C$ 且 $c=2\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\dfrac{c+a}{\sin C+\sin A}=$

A. $8\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 8　　D. 4

10. 2022 年卡塔尔世界杯上，32 支球队分成 8 个小组，每个小组的前两名才能出线，晋级到 1/8 决赛. 某参赛队在开赛前预测：本队获得小组第一的概率为 0.6，获得小组第二的概率为 0.3；若获得小组第一，则 1/8 决赛获胜的概率为 0.9，若获得小组第二，则 1/8 决赛获胜的概率为 0.3. 那么在已知该队小组出线的条件下，其 1/8 决赛获胜的概率为

A. 0.54　　B. 0.63　　C. 0.7　　D. 0.9

11. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 是 C 上异于原点 O 的任意一点，线段 PF 的中点为 M，则以 F 为圆心且与直线 OM 相切的圆的面积最大值为

A. π　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

12. 已知函数 $f(x)=x^3-x+a$ 的图象关于原点对称，则与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2+\dfrac{1}{4}$ 均相切的直线 l 有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 十九世纪初，我国数学家董祐诚在研究椭圆求周长时曾说："椭圆求周旧无其术，秀水朱先生鸿为言圆柱斜剖成椭圆，是可以勾股形求之."也就是说可以通过斜截圆柱法得到椭圆. 若用一个与圆柱底面成 60°的平面截该圆柱，则截得的椭圆的离心率为________.

14. 若 $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{5}{2}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{\ln(e^{2x}+1)-ax}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则实数 $a=$________.

16. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=3$，点 P 为侧棱 DD_1 上一点，过 A,C 两点作垂直于 BP 的截面，以此截面为底面，以 B 为顶点作棱锥，则该棱锥的外接球的表面积的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

在等比数列$\{a_n\}$中，$a_7=8a_4$，且$\frac{1}{2}a_2$，a_3-4，a_4-12成等差数列.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)设$b_n=(-1)^n\log_2 a_n$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求满足$|T_k|=20$的 k 的值.

18. (12 分)

小王去自动取款机取款，发现自己忘记了 6 位密码的最后一位数字，他决定从 0～9 中不重复地随机选择 1 个进行尝试，直到输对密码，或者输错三次银行卡被锁定为止.

(Ⅰ)求小王的该银行卡被锁定的概率；

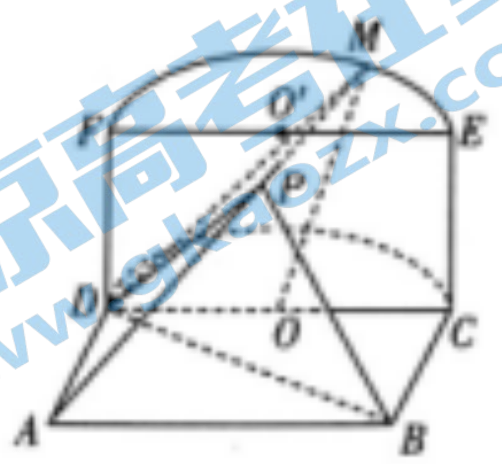
(Ⅱ)设小王尝试输入该银行卡密码的次数为 X，求 X 的分布列、数学期望及方差.

19. (12 分)

如图，矩形 $ABCD$ 与半圆柱 $O'O$ 相接，半圆柱的轴截面 $DCEF\perp$平面 $ABCD$，线段 DC 的中点为 O，M 是$\overset{\frown}{EF}$上一点，$AD=1$，$AB=2$，OM 与底面 $ABCD$ 所成的角为$\frac{\pi}{4}$.

(Ⅰ)在线段 AM 上有一点 P 满足 $AP=2PM$，证明：$MO\parallel$平面 PBD；

(Ⅱ)若$\overset{\frown}{FM}=2\overset{\frown}{ME}$，求平面 AMD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值.



20. (12 分)

已知函数$f(x)=(x-1)e^x-ax^2$.

(Ⅰ)当$a=\frac{e^2}{2}$时，求$f(x)$的极值；

(Ⅱ)若关于 x 的不等式$f(x)+(2-x)e^x\geqslant(2-a)x+a$在$[0,+\infty)$上恒成立，求实数 a 的取值范围.

21. (12 分)

设双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，且 E 的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{2}$.

(Ⅰ)求 E 的方程；

(Ⅱ)过 F_2 作两条相互垂直的直线 l_1 和 l_2，与 E 的右支分别交于 A，C 两点和 B，D 两点，求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)，直线 l 过点 $M(1,0)$，且倾斜角为 α.

(Ⅰ)若 l 经过 C 上纵坐标最大的点，求 l 的参数方程；

(Ⅱ)若 l 与 C 交于 A，B 两点，且$||MA|-|MB||=\frac{2}{5}$，求$\cos\alpha$的值.

23. [选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数$f(x)=|x-1|+|x-2|$.

(Ⅰ)求不等式$f(x)<x$的解集；

(Ⅱ)已知 a，b 为正实数，证明：关于 x 的不等式$f(x)\geqslant\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}$的解集为 $\mathbf{R}$.

2022—2023 学年高三考前定位考试

理科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　由 $A=\{x|x\geqslant 1\}$, $B=\{x||x|\leqslant 2\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=[-2,+\infty)$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查复数的基本运算及几何意义.

解析　由题得 $z=\dfrac{m+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(m+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}=\dfrac{m-2}{2}+\dfrac{m+2}{2}\mathrm{i}$,因为 z 对应的点位于第二象限,所以 $\begin{cases}m-2<0,\\ m+2>0,\end{cases}$ 所以 $-2<m<2$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查分段函数求值.

解析　$f(1)=4^{1-2}=\dfrac{1}{4}$, $\therefore f(f(1))=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\log_2\dfrac{1}{4}=-2$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$,纵坐标不变得到 $y=\sin 2x$ 的图象,再将 $y=\sin 2x$ 图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象. 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时, $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$, $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查二项式定理的应用.

解析　展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r(ax)^{9-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=\mathrm{C}_9^r\cdot a^{9-r}(-1)^r\cdot x^{9-\frac{3r}{2}}$,令 $9-\dfrac{3r}{2}=0$,得 $r=6$, $\therefore$ 常数项是 $T_{6+1}=a^3\cdot\mathrm{C}_9^6=672$,故 $a=2$.

6. 答案　B

命题意图　本题考查平面向量的线性运算.

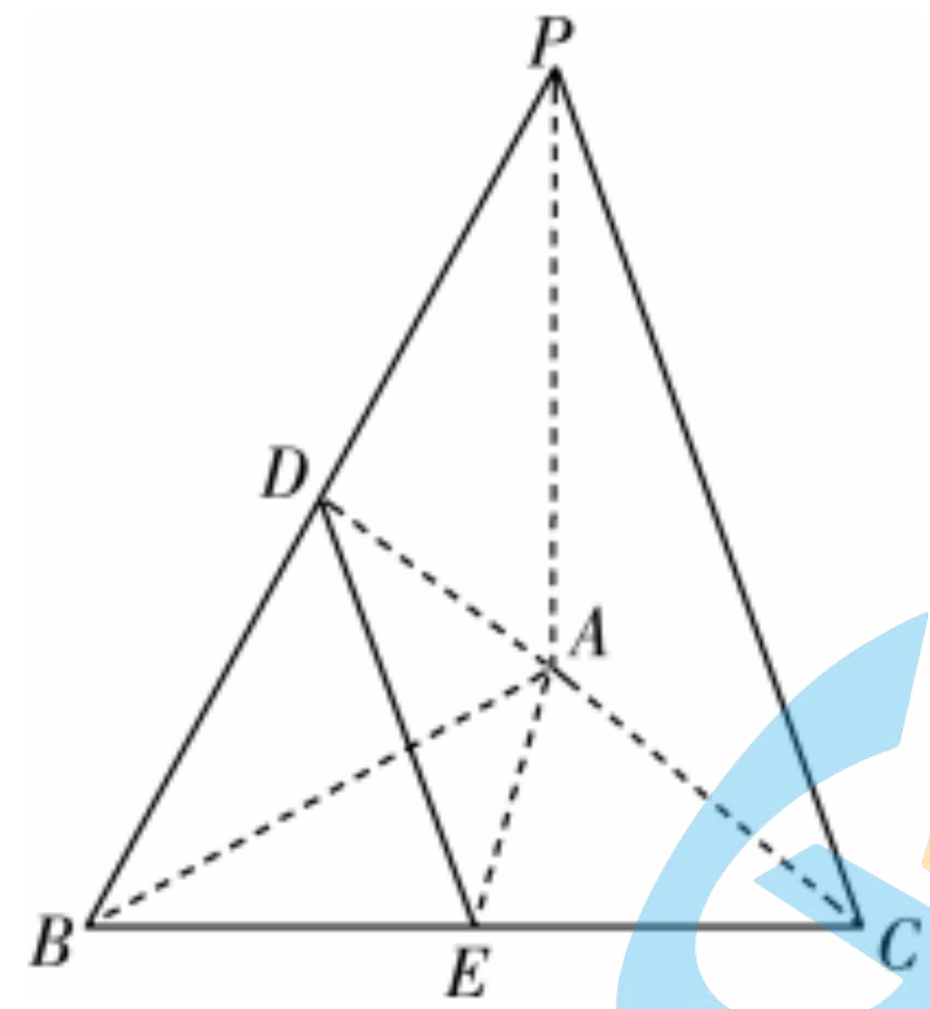
解析　$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$, $\therefore \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}$, $\therefore \overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查异面直线所成的角的计算.

解析　如图所示,取 BC 的中点 E,连接 AE, DE,则 $DE/\!/PC$, $\angle ADE$ 或其补角即为异面直线 AD 与 PC 所成的角. 容易计算得 $AE=2\sqrt{2}$, $DE=\sqrt{13}$, $DA=\sqrt{13}$,在 $\triangle ADE$ 中,根据余弦定理可得 $\cos\angle ADE=\dfrac{AD^2+DE^2-AE^2}{2AD\cdot DE}=$

$\frac{13+13-8}{2\times13}=\frac{9}{13}$.



8. **答案**　A

命题意图　本题考查分段函数的单调性.

解析　若 $a=0$，$f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\-(x-2)^2,x\geqslant0,\end{cases}$ $\therefore f(x)$ 的最大值为 0. 若 $a<0$，当 $x<a$ 时，$f(x)>0$，不符合条件. 若 $a>0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ae^x$ 单调递减，$f(x)<0$，当 $x\geqslant a$ 时，根据二次函数的性质，要使 $f(x)$ 的最大值为 0，需 $a\leqslant2$. 综上可得 $0\leqslant a\leqslant2$.

9. **答案**　D

命题意图　本题考查正弦定理的应用及三角恒等变换.

解析　在 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin A=\sin B\cos C$ 可得 $\sin(B+C)=\sin B\cos C$，所以 $\cos B\sin C=0$，因为 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，且 $\cos B=0$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，又 $A=\frac{\pi}{6}$，可得 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{c+a}{\sin C+\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

10. **答案**　C

命题意图　本题考查条件概率的计算.

解析　设该队小组出线为事件 A，该队 1/8 决赛获胜为事件 B，则 $P(A)=0.3+0.6=0.9$，$P(AB)=0.6\times0.9+0.3\times0.3=0.63$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.63}{0.9}=0.7$.

11. **答案**　B

命题意图　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析　设 $P(t^2,2t)$（不妨令 $t>0$），由已知可得 $F(1,0)$，则 $M\left(\frac{t^2+1}{2},t\right)$，所以直线 OM 的方程为 $y=\frac{2t}{t^2+1}x$，设 $k=\frac{2t}{t^2+1}$，则 $k=\frac{2}{t+\frac{1}{t}}\leqslant1$（当且仅当 $t=1$ 时取“$=$”），所以点 F 到直线 OM 的距离为 $\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，即圆 F 的半径最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，面积最大值为 $\frac{\pi}{2}$.

12. **答案**　C

命题意图　本题考查导数的几何意义.

解析　根据题意，$f(-x)=-f(x)$，所以 $a=0$，所以 $f(x)=x^3-x$，因为 $f'(x)=3x^2-1$，所以 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，整理得 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$. 设 $g(x)=x^2+\frac{1}{4}$，直线 l 与 $g(x)$ 的图象相切于点 $(x_2,g(x_2))$，因为 $g'(x)=2x$，所以切线方程为 $y-\left(x_2^2+\frac{1}{4}\right)=2x_2(x-x_2)$，整理得

$y=2x_2x-x_2^2+\frac{1}{4}$,则 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2,\\-2x_1^3=-x_2^2+\frac{1}{4},\end{cases}$ (＊) 整理得 $\left(\frac{3x_1^2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-2x_1^3-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2=0$. 令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2$,则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$.

当 x 变化时,$h'(x)$,$h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-\frac{7}{108}$	↗	0	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

又 $h(-1)>0$,$h(2)>0$,故 $h(x)$ 共有 3 个零点,一个为 0,另外两个分别位于区间 $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ 和 $(1,2)$ 内,所以方程组(＊)有 3 组解,故满足题中条件的直线 l 有 3 条.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

命题意图 本题考查椭圆的基本性质.

解析 设圆柱的底面半径为 r,则椭圆短轴长为 $2b=2r$,长轴长为 $2a=4r$,则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. **答案** $-\frac{1}{8}$

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 由 $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{5}{2}$,得 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$,故 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{8}$.

15. **答案** 1

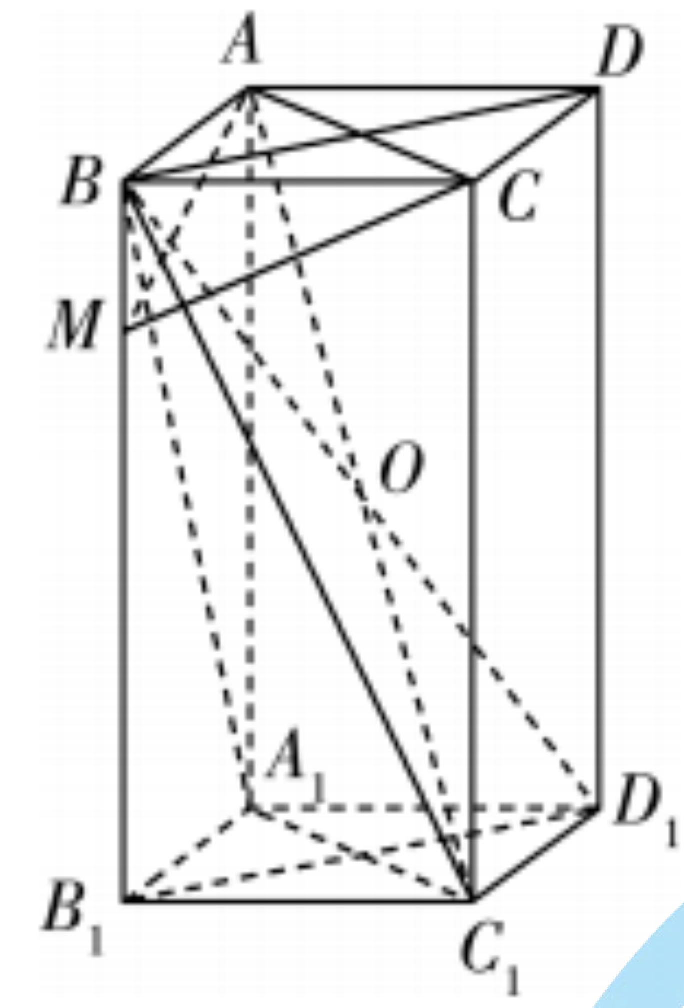
命题意图 本题考查奇函数的性质.

解析 设 $g(x)=2^x-2^{-x}$,$h(x)=\ln(e^{2x}+1)-ax$. 因为 $g(-x)+g(x)=2^{-x}-2^x+2^x-2^{-x}=0$,所以 $g(x)$ 为奇函数,则 $h(x)$ 为偶函数,则 $h(-x)=\ln(e^{-2x}+1)+ax=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right)+ax=\ln(e^{2x}+1)-(2-a)x=h(x)=\ln(e^{2x}+1)-ax$,所以 $2-a=a$,$a=1$.

16. **答案** $\left[\frac{19}{9}\pi,11\pi\right]$

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征.

解析 如图所示,当 P 与点 D 重合时,过 A,C 与 BP 垂直的截面为平面 ACC_1A_1,四棱锥 $B-ACC_1A_1$ 的外接球的球心为对角面 ACC_1A_1 的中心 O,直径为 $AC_1=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$,此时外接球的表面积最大,最大为 11π. 当 P 与点 D_1 重合时,过 A,C 与 BP 垂直的截面为平面 ACM,在平面 BDD_1B_1 内利用三角形相似可以求得 $BM=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$,三棱锥 $B-ACM$ 的外接球直径为 $\sqrt{\frac{1}{3^2}+1^2+1^2}=\sqrt{\frac{19}{9}}$,此时外接球的表面积最小,最小为 $\frac{19}{9}\pi$.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列与等比数列的基本性质.

解析 （Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q. ………………………………（1 分）

$\because a_7=8a_4$，$\therefore a_4q^3=8a_4$，$\therefore q=2$. ………………………………（2 分）

$\because \frac{1}{2}a_2,a_3-4,a_4-12$ 成等差数列，

$\therefore 2(a_3-4)=\frac{1}{2}a_2+a_4-12$，$\therefore 2(4a_1-4)=a_1+8a_1-12$，$\therefore a_1=4$. ………………………………（4 分）

$\therefore a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$. ………………………………（6 分）

（Ⅱ）$b_n=(-1)^n\log_2 a_n=(-1)^n(n+1)$. ………………………………（7 分）

当 k 为偶数时，$T_k=-2+3-4+5-\cdots-k+(k+1)=\frac{k}{2}$，

令 $|T_k|=\frac{k}{2}=20$，得 $k=40$； ………………………………（9 分）

当 k 为奇数时，$T_k=T_{k+1}-(k+2)=\frac{k+1}{2}-(k+2)=-\frac{k+3}{2}$，

令 $|T_k|=\frac{k+3}{2}=20$，得 $k=37$. ………………………………（11 分）

$\therefore k=40$ 或 37. ………………………………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查相互独立事件的概率计算以及随机变量的分布列与期望.

解析 （Ⅰ）设“小王的该银行卡被锁定”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$. ………………………………（3 分）

（Ⅱ）由题意，X 的所有可能取值为 1，2，3， ………………………………（4 分）

则 $P(X=1)=\frac{1}{10}$，$P(X=2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$，$P(X=3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times 1=\frac{4}{5}$， ………………………………（7 分）

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

………………………………（8 分）

所以数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{4}{5}=\frac{27}{10}$， ………………………………（10 分）

方差 $D(X)=\left(1-\frac{27}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\left(2-\frac{27}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\left(3-\frac{27}{10}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{41}{100}$. ………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查线面平行的证明以及空间向量的应用.

解析 （Ⅰ）如图，连接 AO，交 BD 于 Q，连接 PQ.

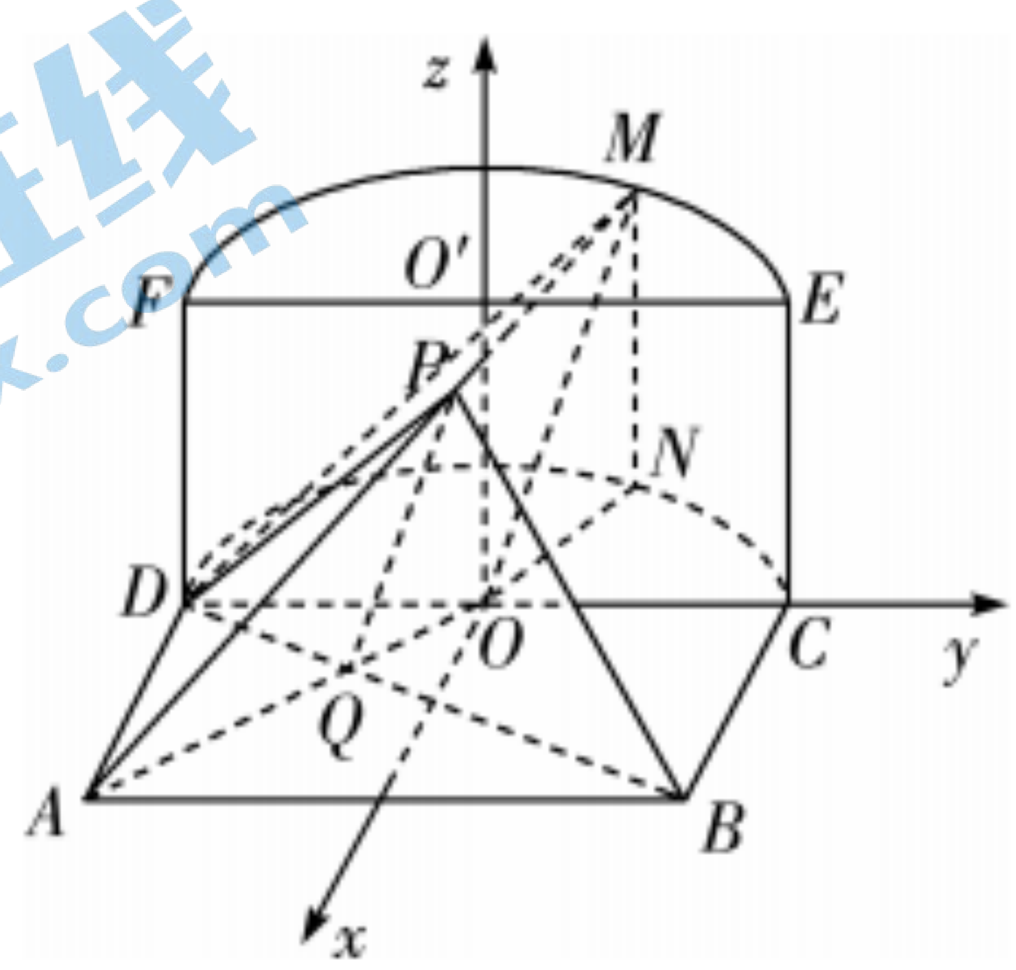
因为 $OD /\!/ AB$，由条件可知 $\triangle AQB \backsim \triangle OQD$，所以 $\frac{AQ}{QO}=\frac{AB}{DO}=2$. ……………………（2 分）

因为 $AP=2PM$，所以 $MO /\!/ PQ$. ……………………（3 分）

又 $MO \not\subset$ 平面 PBD，$PQ \subset$ 平面 PBD，所以 $MO /\!/$ 平面 PBD. ……………………（4 分）

（Ⅱ）作 $MN \perp$ 平面 $ABCD$ 于 N，则 N 在 $\overset{\frown}{DC}$ 上，连接 ON，则 ON 为 OM 在平面 $ABCD$ 内的射影，所以 $\angle MON$ 为 OM 与底面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\angle MON=\frac{\pi}{4}$，所以 $ON=MN=1$. ……………………（5 分）

以 O 为坐标原点，过 O 且与 DA 平行的直线为 x 轴，直线 OC 为 y 轴，直线 OO' 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图.



……………………（6 分）

因为 $\overset{\frown}{FM}=2\overset{\frown}{ME}$，所以 $\angle CON=\frac{\pi}{3}$，则 $D(0,-1,0)$，$A(1,-1,0)$，$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{DM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1\right)$. ……………………（7 分）

设平面 AMD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=2$，则 $\boldsymbol{n}=(0,2,-3)$. ……………………（9 分）

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， ……………………（10 分）

设平面 AMD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 α，则

$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，所以平面 AMD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 （Ⅰ）当 $a=\frac{e^2}{2}$ 时，$f(x)=(x-1)e^x-\frac{e^2}{2}x^2$，

则 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-e^2x=x(e^x-e^2)$. ……………………（2 分）

令 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>2$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增， ……………………（4 分）

所以 $f(x)_{极大值}=f(0)=-1$，$f(x)_{极小值}=f(2)=-e^2$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由 $f(x)+(2-x)e^x\geqslant(2-a)x+a$，得 $e^x-ax^2\geqslant(2-a)x+a$，

即 $e^x-2x\geqslant a(x^2-x+1)$，因为 $x^2-x+1>0$，所以 $a\leqslant\frac{e^x-2x}{x^2-x+1}$. ……………………（6 分）

令 $h(x)=\dfrac{e^x-2x}{x^2-x+1}(x\geqslant 0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)(e^x-2)-(2x-1)(e^x-2x)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{(x-1)[(x-2)e^x+2(x+1)]}{(x^2-x+1)^2}$. ……………………（8 分）

令 $\varphi(x)=(x-2)e^x+2(x+1)(x\geqslant 0)$，则 $\varphi'(x)=(x-1)e^x+2$.

令 $q(x)=(x-1)e^x+2$，则 $q'(x)=xe^x$，

因为当 $x\geqslant 0$ 时，$q'(x)=xe^x\geqslant 0$，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi'(x)\geqslant\varphi'(0)=1$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$. ……………………（10 分）

所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)_{\min}=h(1)=e-2$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,e-2]$. ……………………（12 分）

21. **命题意图**　本题考查双曲线的基本性质，以及双曲线与直线的位置关系.

解析　（Ⅰ）由题意得 E 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a=2b$，……………………（2 分）

又因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5b^2}=2\sqrt{5}$，所以 $b=1$，$a=2$，……………………（3 分）

故 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）显然 l_1，l_2 的斜率都存在且不为 0，设直线 $l_1:y=k(x-\sqrt{5})(k\neq 0)$，$l_2:y=-\dfrac{1}{k}(x-\sqrt{5})$，

因为 l_1，l_2 均与 E 的右支有两个交点，所以 $|k|>\dfrac{1}{2}$，$\left|-\dfrac{1}{k}\right|>\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{4}<k^2<4$. ……………………（5 分）

将 l_1 的方程与 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 联立，可得 $(1-4k^2)x^2+8\sqrt{5}k^2x-20k^2-4=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8\sqrt{5}k^2}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-20k^2-4}{1-4k^2}$，……………………（6 分）

所以 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-8\sqrt{5}k^2}{1-4k^2}\right)^2-4\times\frac{-20k^2-4}{1-4k^2}}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{1+k^2}}{|1-4k^2|}$$

$=\dfrac{4(1+k^2)}{4k^2-1}$，……………………（7 分）

用 $-\dfrac{1}{k}$ 替换 k 可得 $|BD|=\dfrac{4(k^2+1)}{4-k^2}$，……………………（8 分）

所以 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4(1+k^2)}{4k^2-1}\cdot\dfrac{4(k^2+1)}{4-k^2}=8\cdot\dfrac{(k^2+1)^2}{(4k^2-1)(4-k^2)}$. ……………………（9 分）

令 $t=k^2+1$，所以 $k^2=t-1$，$t\in\left(\dfrac{5}{4},5\right)$，

则 $S_{ABCD}=8\cdot\dfrac{t^2}{-4t^2+25t-25}=8\cdot\dfrac{1}{-4+\dfrac{25}{t}-\dfrac{25}{t^2}}=\dfrac{8}{-25\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}}\geqslant\dfrac{32}{9}$，……………………（11 分）

当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $k=\pm 1$ 时，等号成立，

故四边形 $ABCD$ 面积的最小值为$\frac{32}{9}$. ………………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化以及直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）将 C 的参数方程化为普通方程：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$,

即 C 是一个椭圆，C 上纵坐标最大的点为其上顶点$(0,1)$, ………………………………………（2 分）

因为 l 经过点$(0,1)$和 $M(1,0)$，所以 l 的斜率为 -1，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, ……………………………（3 分）

故其参数方程可写为$\begin{cases}x=1+t\cos\frac{3\pi}{4},\\ y=t\sin\frac{3\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数），即$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. ………………………（4 分）

注：答案不唯一，其他合理答案例如$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）或$\begin{cases}x=1-t,\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（Ⅱ）直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

将其代入$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 中整理可得$(3-2\cos^2\alpha)t^2+2t\cos\alpha-2=0$, ………………………………（6 分）

设 A,B 在 l 上对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\frac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-3}$，且 t_1,t_2 符号相反，………………（7 分）

故$||MA|-|MB||=|t_1+t_2|=\left|\frac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-3}\right|=\frac{2}{5}$, ……………………………………………………（8 分）

解得 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法以及基本不等式.

解析 （Ⅰ）由 $f(x)<x$ 得$|x-1|+|x-2|<x$,

即$\begin{cases}x<1,\\ 3-2x<x,\end{cases}$或$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1<x,\end{cases}$或$\begin{cases}x>2,\\ 2x-3<x,\end{cases}$

分别解得 $x\in\varnothing$或 $1<x\leqslant 2$ 或 $2<x<3$, …………………………………………………………（3 分）

综上可得不等式 $f(x)<x$ 的解集为$(1,3)$. ………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意知 $f(x)=\begin{cases}3-2x,x<1,\\ 1,1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-3,x>2,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的值域为$[1,+\infty)$. ……………………………………（6 分）

因为 a,b 是正实数，所以 $a+1\geqslant 2\sqrt{a}$，$b+1\geqslant 2\sqrt{b}$,

所以 $a+b+2\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$, …………………………………………………………………………（8 分）

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2$，即$\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}\leqslant 1$, ……………………………………………（9 分）

因此对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}$恒成立，即该不等式解集为 $\mathbf{R}$. ……………………………（10 分）