2023 北京首都师大附中高一（下）期中

数　　学

第 I 卷（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，$\boldsymbol{c}=(3,0)$，若 $\boldsymbol{a}//(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，则 $m=$

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

2. 若角 α 的终边在第三象限，则下列三角函数值中小于零的是

A. $\sin(\pi+\alpha)$ B. $\cos(\pi-\alpha)$　C. $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$　D. $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

3. 下列选项使得函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 单调递减的是

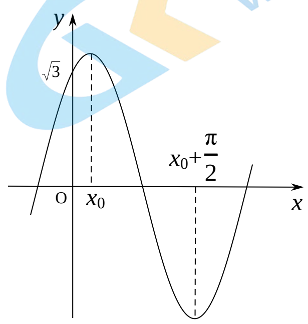
A. $[-\frac{11\pi}{12},-\frac{7\pi}{12}]$　　B. $[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}]$

C. $[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$　　D. $[\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}]$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，$\angle C=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle B=$

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

5. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图像如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式为



A. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

B. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

C. $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

D. $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

6. 已知 $\alpha\in(-\pi,\pi)$，且 $\sin\alpha=-\cos\frac{\pi}{7}$，则 α 的值是

A. $\frac{19\pi}{14}$ 或 $\frac{23\pi}{14}$　　B. $\frac{\pi}{7}$ 或 $-\frac{\pi}{7}$　　C. $-\frac{5\pi}{14}$ 或 $\frac{5\pi}{14}$　　D. $-\frac{5\pi}{14}$ 或 $-\frac{9\pi}{14}$

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量，则“$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 为锐角”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<\sqrt{2}$”的

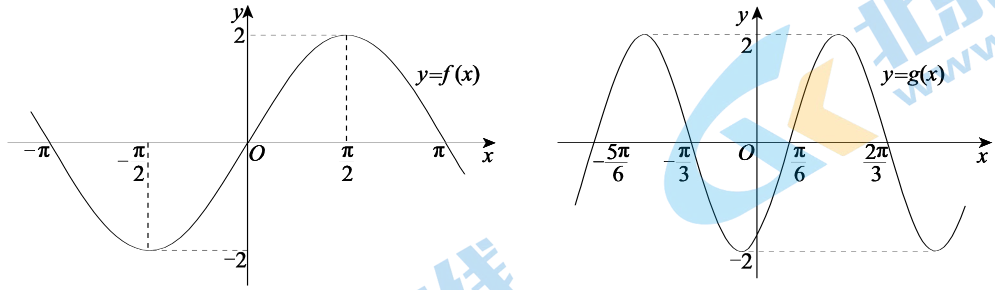
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $f(x)=A_1\sin(\omega_1 x+\varphi_1)$， $g(x)=A_2\sin(\omega_2 x+\varphi_2)$，其图像如下图所示.



为得到函数 $g(x)$ 的图象，只需先将函数 $f(x)$ 图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），再

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

9. 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \sin x\geqslant\cos x,\\ \cos x, & \sin x<\cos x\end{cases}$，给出下列四个命题：

① 该函数的值域为 $[-1,1]$；

② 当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ （$k\in\mathbf{Z}$）时，该函数取得最大值；

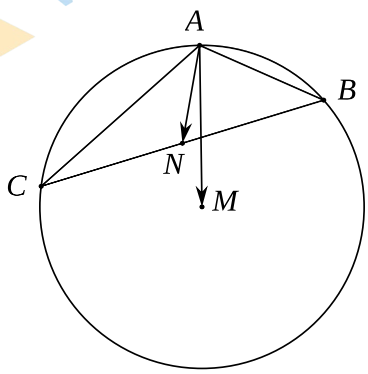
③ 该函数是以 π 为最小正周期的周期函数；

④ 当且仅当 $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ （$k\in\mathbf{Z}$）时， $f(x)<0$.

上述命题中真命题的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 圆 M 为 $\triangle ABC$ 的外接圆， $AB=4$， $AC=6$， N 为边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}=$



A. 5

B. 10

C. 13

D. 26

第 II 卷（共 80 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. $\tan\dfrac{5\pi}{3}=$______.

12. 已知扇形OAB的圆心角为4 rad，面积是2 cm^2，则该扇形的周长是________cm.

13. 已知非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，那么$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为______.

14. 已知关于x的方程$\cos^2 x-\sin x+2a=0$在$(0,\dfrac{\pi}{2}]$内有解，那么实数a的取值范围为______.

15. $\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle BAC$的角平分线交BC于点D.若

$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则$\dfrac{\lambda}{\mu}=$______.

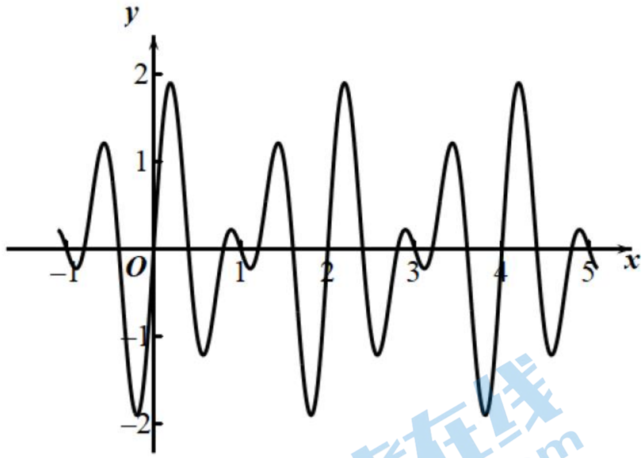
16. 声音是由物体振动而产生的声波通过介质（空气、固体或液体）传播并能被人的听觉器官所感知的波动现象.在现实生活中经常需要把两个不同的声波进行合成，这种技术被广泛运用在乐器的调音和耳机的主动降噪技术方面.

（1）若甲声波的数学模型为$f_1(t)=\sin 200\pi t$，乙声波的数学模型为$f_2(t)=\sin(200\pi t+\varphi)$（$\varphi>0$），甲、乙声波合成后的数学模型为 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$.要使$f(t)=0$恒成立，则φ的最小值为

____________；

（2）技术人员获取某种声波，其数学模型记为$H(t)$，其部分图像如图所示，对该声波进行逆向分析，发现它是由S_1，S_2两种不同的声波合成得到的，S_1，S_2的数学模型分别记为$f(t)$和$g(t)$，满足$H(t)=f(t)+g(t)$.

已知S_1，S_2两种声波的数学模型源自于下列四个函数中的两个.



① $y=\sin\dfrac{\pi}{2}t$；　② $y=\sin 2\pi t$；

③ $y=\sin 3\pi t$；　④ $y=2\sin 3\pi t$.

则S_1，S_2两种声波的数学模型分别是______.（填写序号）

三、解答题（本大题共 5 小题，共 50 分。应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题 11 分）

已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上的最大值，并求出此时对应的 x 的值.

18.（本小题 11 分）

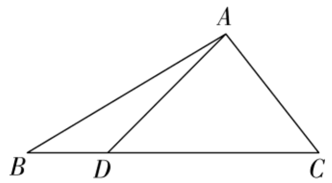
已知 α,β 为锐角，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（I）求 $\sin 2\alpha$ 的值；

（II）求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

19.（本小题 10 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，$\cos C=\frac{3}{5}$，$CD=7$，$AC=5$.



（I）求 AD 的长；

（II）若 $AB=8$，求 $\angle B$ 的大小.

20.（本小题 10 分）

设函数 $f(x)=4\sin\frac{\omega x}{2}\cos(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{3})+m$（$\omega>0$，$m\in\mathbf{R}$）. 在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 $f(x)$ 存在.

条件①：$f(-x)=f(x)$；

条件②：$f(x)$ 的最小正周期为 π；

条件③：$f(x)$ 的最大值与最小值之和为 0.

（I）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（II）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，求实数 a 的最大值.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多组条件分别解答，按第一组解答计分.

21.（本小题 8 分）

对平面向量 $\alpha=(x,y)$，定义 $M(\alpha)=|x|+|y|$.

（I）设 $\alpha=(3,-2)$，求 $M(\alpha)$；

（II）设 $A(0,2)$， $B(2,0)$， $C(4,1)$， $D(5,3)$， $E(6,2)$，点 $P(x,y)$ 是平面内的动点，其中 x,y 是整数.

（i）记 $M(\overrightarrow{PA}),M(\overrightarrow{PB}),M(\overrightarrow{PC}),M(\overrightarrow{PD}),M(\overrightarrow{PE})$ 的最大值为 $t(P)$，直接写出 $t(P)$ 的最小值及当 $t(P)$ 取最小值时，点 P 的坐标.

（ii）记 $s(P)=M(\overrightarrow{PA})+M(\overrightarrow{PB})+M(\overrightarrow{PC})+M(\overrightarrow{PD})+M(\overrightarrow{PE})$. 求 $s(P)$ 的最小值及相应的点 P 的坐标.

参考答案

第 I 卷（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	B	D	A	D	A	A	A	C

第 II 卷（共 80 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. $-\sqrt{3}$

12. $6\,cm$.

13. $\frac{5\pi}{6}$

14. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

15. $\frac{1}{2}$

16.② ③

三、解答题（本大题共 5 小题，共 50 分。应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 解析：

（1） $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$， ------5 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ------------6 分

（II）由（I）知 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$. ------------8 分

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取最大值 $\frac{3}{2}$. ------------11 分

18. 解：（ I ）$\because \cos\alpha=\frac{3}{5}$，且 α 为锐角

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$ ------------4 分

（ II ） $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$ ------------5 分

$\because \alpha,\beta$ 为锐角

$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ------------7 分

$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ------------8 分

$\therefore \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=2$ -----------9 分

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{4}{3}-2}{1+\frac{4}{3}\times 2}=-\dfrac{2}{11}$ -----------11 分

19. 解析：（I）在$\triangle ADC$ 中，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，$CD=7$，$AC=5$．

由余弦定理得 $AD^2=AC^2+CD^2-2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos C=5^2+7^2-2\times5\times7\times\dfrac{3}{5}=32$，

所以 $AD=4\sqrt{2}$． ………………5 分

（II）由 $\cos C=\dfrac{3}{5}$ 且 $C\in(0,\pi)$，得 $\sin C=\dfrac{4}{5}$， ………………6 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，得 $\sin B=\dfrac{1}{2}$， ………………8分

又因为 $AB>AC$，所以 $B<C<\dfrac{\pi}{2}$， ………………9分

所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$． …………………………10 分

20. **解：**（Ⅰ） $f(x)=4\sin\dfrac{\omega x}{2}(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\omega x}{2})+m$ ……………2 分

$=2\sin\dfrac{\omega x}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+m$

$=\sin\omega x+\sqrt{3}(1-\cos\omega x)+m$ ……………3 分

$=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x+\sqrt{3}+m$

$=2\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}+m$． ……………4 分

选择条件②③：

由条件②得，$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$．　　…………5 分

由③知，$(2+\sqrt{3}+m)+(-2+\sqrt{3}+m)=0$，所以 $m=-\sqrt{3}$．　　…………6 分

则 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，

（Ⅱ）令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，　　…………7 分

所以 $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$．　　…………8 分

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递增，且 $0\in[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$，此时 $k=0$，

所以 $a\leqslant\dfrac{5\pi}{12}$，故实数 a 的最大值为 $\dfrac{5\pi}{12}$．　　…………10 分

说明：不可以选择条件①：

当 $x=0$ 时，$\sin(-\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\neq\pm 1$，所以①不成立

21.解析：（Ⅰ）当 $\alpha=(3,-2)$ 时，$M(\alpha)=|3|+|-2|=5$；　　…………2 分

（Ⅱ）$t(P)$ 的最小值为 3，此时点 P 的坐标为 $(3,2)$．　　…………4 分

一方面，当点 P 的坐标为 $(3,2)$ 时，$\overrightarrow{PA}=(-3,0)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(1,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(2,1)$，$\overrightarrow{PE}=(3,0)$，$M(\overrightarrow{PA})=M(\overrightarrow{PB})=M(\overrightarrow{PD})=M(\overrightarrow{PE})=3$，$M(\overrightarrow{PC})=2$．

此时，$t(P)=3$．

另一方面，设 $P(x,y)$，其中 $x,y\in\mathbf{N}^*$．

$t(P)\geqslant M(\overrightarrow{PA})=|x|+|y-2|\geqslant|x|$；

$t(P)\geqslant M(\overrightarrow{PE})=|x-6|+|y-2|\geqslant|x-6|$．

相加得 $2t(P)\geqslant|x|+|x-6|=6$，故 $t(P)\geqslant 3$．

欲使上述等号均成立，有 $|x|=|x-6|=3$，且 $|y-2|=0$，得 $x=3,y=2$．

（Ⅱ）设点 P 的坐标为 (x,y)．

$M(\overrightarrow{PA})=|x-0|+|y-2|$

$s_2(P)=|y-2|+|y-0|+|y-1|+|y-3|+|y-2|$

$M(\overrightarrow{PC})=|x-4|+|y-1|$

$M(\overrightarrow{PD})=|x-5|+|y-3|$

$M(\overrightarrow{PE})=|x-6|+|y-2|$

所以，$s(P)=s_1(P)+s_2(P)$，其中

$s_1(P)=|x-0|+|x-2|+|x-4|+|x-5|+|x-6|$

$=(|x-0|+|x-6|)+(|x-2|+|x-5|)+|x-4|$

$\geqslant 6+3+0$

$=9$．（当且仅当 $x=4$ 时，等号成立）

$s_2(P)=|y-2|+|y-0|+|y-1|+|y-3|+|y-2|$

$=(|y-0|+|y-3|)+(|y-1|+|y-2|)+|y-2|$

$\geqslant 3+1+0$

$=4$．（当且仅当 $y=2$ 时，等号成立）

所以，$s(P)\geqslant 13$，当且仅当 $x=4$ 且 $y=2$ 时，等号成立，即点 $P(4,2)$ 时，等号成立.　　…………8 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。