高三数学查漏补缺题

2019.5

说明：

1. 提供的题目并非一组试卷，小题（选、填）主要针对以前没有考到的知识点，或者在试题的呈现形式上没有用过的试题。

2. 教师要根据自己学校的学生情况，有针对性地选择使用，也可以不用。

3. 试题按照中心组教师的建议和一些教师的建议匆匆赶制而成，难免出错，希望老师们及时指出问题，以便及时改正。

【集合与简易逻辑】

1. 给出下列命题：

①若命题 p： $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x-1<0$，则 $\neg p:\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2+x-1\geq 0$；

②命题“若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=2$”的否命题为“若 $x^2-3x+2=0$，则 $x\neq 2$”；

③若 $p\wedge q$ 为假命题，$p\vee q$ 为真命题，则命题 p,q 一真一假，

其中正确命题的序号是（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③

答案：C

2. 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}|\lg(x-1)\leqslant 0\}$，$N=\{x\in\mathbf{Z}||x|<2\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $(1,2)$　　C. $(-2,2]$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

答案：D

3. 在 ΔABC 中，“$\cos A<\cos B$”是“$\sin A>\sin B$”的

A. 充分必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

答案：C

【复数】

1. 如果复数 $z=a^2+a-2+(a^2-3a+2)\mathrm{i}$ 为纯虚数，那么实数 a 的值为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. -2　　D. 1 或 -2

答案：C

2. 若 $\frac{m+i}{1+i}=ni$，则实数 $m=$________，实数 $n=$________.

解：$\frac{m+i}{1+i}=ni \Leftrightarrow m+i=ni(1+i) \Leftrightarrow m+i=-n+ni \Leftrightarrow \begin{cases} m=-n, \\ 1=n \end{cases}$

所以 $m=-1, n=1$.

【不等式与线性规划】

1. 已知 $m\in(0,1)$，令 $a=\log_m 2$，$b=m^2$，$c=2^m$，那么 a,b,c 之间的大小关系为（　　）

A. $b<c<a$　　B. $b<a<c$　　C. $a<b<c$　　D. $c<a<b$

答案：C

2. 设 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0$，“不等式 $m+\frac{4}{m}>4$”成立的一个必要不充分条件是（　　）

A. $m\neq 2$　　B. $m>0$ 且 $m\neq 2$　　C. $m>2$　　D. $m\geq 2$

答案：A

3. 若 $4^x+4^y=1$，则 $x+y$ 的取值范围是________.

答案：$(-\infty,-1]$

4. 设 D 为不等式组 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ x-y\leq 0, \\ x+3y\leq 3 \end{cases}$ 表示的平面区域，对于区域 D 内除原点外的任一点 $A(x,y)$，

则：(1) $z=2x-y$ 的最小值为________；(2) $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围是________.

答案：(1) $-\frac{9}{2}$；　(2) $[-\sqrt{2},0]$.

【数列】

1. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，下列结论中正确的是（　　）.

A. 若 $a_1+a_2>0$，则 $a_2+a_3>0$　　B. 若 $a_1+a_3<0$，则 $a_1+a_2<0$

C. 若 $0<a_1<a_2$，则 $a_2>\sqrt{a_1a_3}$　　D. 若 $a_1<0$，则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

答案：C

2. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 $n=$________时，$\{a_n\}$ 的前 n

项和最大.

答案：8

3. 已知数列$\{a_n\}$，$a_2=2$，$a_n+a_{n+1}=3n,n\in N^*$，则$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=$______

解析：法一：通过具体罗列各项 $a_3=4$，$a_4=5$，$a_5=7$，

$a_6=8,a_7=10,a_8=11,a_9=13,a_{10}=14,a_{11}=16,a_{12}=17$，

所以$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=57$

法二：由递推关系进一步可得相邻几项之间的关系

$a_n+a_{n+1}=3n$，$a_{n+1}+a_{n+2}=3n+3$，

两式相减可得$a_{n+2}-a_n=3$，

所以数列$\{a_n\}$ 隔项成等差数列，所以$a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10},a_{12}$是以 2 为首项，以 3 为公差，共有 6 项的等差数列，用求和公式得 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=6\times 2+\dfrac{6\times 5}{2}\times 3=57$

4. 数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列，公比$q>1$，且$a_5=b_5$，则

A．$a_3+a_7>b_4+b_6$　　B．$a_3+a_7\ge b_4+b_6$

C．$a_3+a_7<b_4+b_6$　　D．$a_3+a_7=b_4+b_6$

答案：C

推荐理由：等差等比的性质，与不等式结合

5. （建议文科学生使用）．已知$\{a_n\}$是等差数列，满足$a_1=2$，$a_4=14$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_4=6$，且$\{a_n-b_n\}$是等比数列．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有$b_n\le b_k$成立，求正整数$k$的值．

解：（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为d，则$d=\dfrac{a_4-a_1}{3}=4$

所以$a_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$，

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4n-2$（$n\in \mathbf{N}^*$）．

设$c_n=a_n-b_n$，则$\{c_n\}$为等比数列．

$c_1=a_1-b_1=2-1=1$，$c_4=a_4-b_4=14-6=8$

设$\{c_n\}$的公比为q，则$q^3=\dfrac{c_4}{c_1}=8$，故$q=2$.

则$c_n=2^{n-1}$，即$a_n-b_n=2^{n-1}$

所以$b_n=4n-2-2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（Ⅱ）由题意，b_k应为数列$\{b_n\}$的最大项.

由$b_{n+1}-b_n=4(n+1)-2-2^n-4n+2+2^{n-1}=4n-2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）

当$n<3$时，$b_{n+1}-b_n>0$，$b_n<b_{n+1}$，即$b_1<b_2<b_3$；

当$n=3$时，$b_{n+1}-b_n=0$，即$b_3=b_4$；

当$n>3$时，$b_{n+1}-b_n<0$，$b_n>b_{n+1}$，即$b_4>b_5>b_6>\cdots$

所以数列$\{b_n\}$中的最大项为b_3和b_4.

故存在$k=3$或4，使$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$b_n\le b_k$成立.

6. （限于理科学生）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若对任意正整数n，总存在正整数m，使得$S_n=a_m$，则称$\{a_n\}$是“H数列”．

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，证明：$\{a_n\}$是“H数列”；

（Ⅱ）设$\{a_n\}$是等差数列，其首项$a_1=1$，公差$d<0$．若$\{a_n\}$ 是“H数列”，求d的值；

（Ⅲ）证明：对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“H数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$成立.

解答：（Ⅰ）当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，当$n=1$时，$a_1=S_1=2$，

$\therefore n=1$时，$S_1=a_1$，当$n\geqslant 2$时，$S_n=a_{n+1}$，$\therefore\{a_n\}$是“H数列”．

（Ⅱ）$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists m\in\mathbf{N}^*$使$S_n=a_m$，即$n+\dfrac{n(n-1)}{2}d=1+(m-1)d$

取 $n=2$ 得 $1+d=(m-1)d$， $m=2+\frac{1}{d}$

$\because d<0$，$\therefore m<2$，又 $m\in\mathbf{N}^*$，$\therefore m=1$，$\therefore d=-1$.

（III）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d

令 $b_n=a_1-(n-1)a_1=(2-n)a_1$，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$b_{n+1}-b_n=-a_1$

$c_n=(n-1)(a_1+d)$，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$c_{n+1}-c_n=a_1+d$

则 $b_n+c_n=a_1+(n-1)d=a_n$，且 $\{b_n\},\{c_n\}$ 为等差数列.

$\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}(-a_1)$，令 $T_n=(2-m)a_1$，则 $m=\frac{n(n-3)}{2}+2$

当 $n=1$ 时 $m=1$；

当 $n=2$ 时 $m=1$；

当 $n\geqslant 3$ 时，由于 n 与 $n-3$ 奇偶性不同，即 $n(n-3)$ 非负偶数，$m\in\mathbf{N}^*$

因此对 $\forall n$，都可找到 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $T_n=b_m$ 成立，即 $\{b_n\}$ 为"H数列".

$\{c_n\}$ 的前 n 项和 $R_n=\frac{n(n-1)}{2}(a_1+d)$，令 $c_m=(m-1)(a_1+d)=R_n$，则 $m=\frac{n(n-1)}{2}+1$

$\because$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$n(n-1)$ 是非负偶数，$\therefore m\in\mathbf{N}^*$

即对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都可找到 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $R_n=c_m$ 成立，即 $\{c_n\}$ 为"H数列"

因此命题得证.

【平面向量】

1．设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$________.

答案：$\frac{1}{2}$

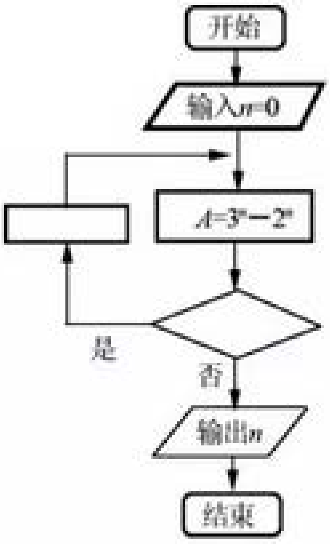
2．设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 2\theta,\cos\theta),\boldsymbol{b}=(\cos\theta,1)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\tan\theta=$________.

答案：$\frac{1}{2}$

3．设向量 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，则实数 $\lambda=$________.

答案：± 3

【程序框图】



1. 如图所示的程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n，那么在◇和▭两个空白框中，可以分别填入（　　）

A. $A>1\ 000$ 和 $n=n+1$

B. $A>1\ 000$ 和 $n=n+2$

C. $A\leq 1\ 000$ 和 $n=n+1$

D. $A\leq 1\ 000$ 和 $n=n+2$

答案：D

【三角函数】

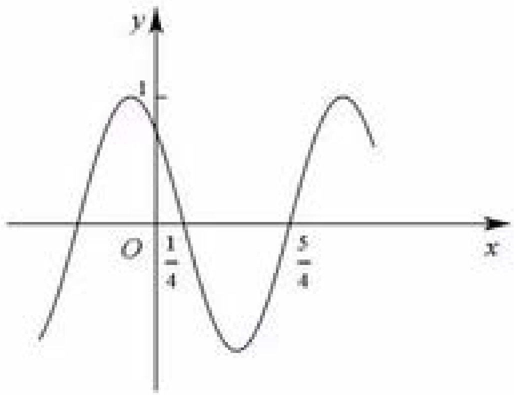
1. 若角 α 的终边过点 $(1,-2)$，则 $\sin 2\alpha=$ ______

解：$x=1, y=-2, r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times(-\dfrac{2}{\sqrt{5}})\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{4}{5}$

2. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为（　　）.



A. $\left(k\pi-\dfrac{1}{4}, k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4}, 2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $\left(k-\dfrac{1}{4}, k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(2k-\dfrac{1}{4}, 2k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

答案：D

3. 已知函数 $f(x)=a\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 的一条对称轴为 $x=-\dfrac{\pi}{6}$，$f(x_1)+f(x_2)=0$，且函数

$f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性，则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

答案：C

推荐理由：四次考试中，由对称性确定函数解析式研究函数性质未考察

【解三角形】

1. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边长分别是 a,b,c，已知 $c=2$，$C=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{3}$，则 $a=$______，$b=$______；

（Ⅱ）若 $\triangle ABC$ 有且仅有一解，则 a 的取值范围是______.

答案：（Ⅰ）2，2；（Ⅱ）$(0,2]\cup\{\frac{4\sqrt{3}}{3}\}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a\sin B-b\cos C=c\cos B$.

（Ⅰ）判断 $\triangle ABC$ 的形状；

（Ⅱ）若 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{2}$，求 $f(A)$ 的取值范围.

解答：（Ⅰ）法一：因为 $a\sin B-b\cos C=c\cos B$，

由正弦定理可得 $\sin A\sin B-\sin B\cos C=\sin C\cos B$.

即 $\sin A\sin B=\sin C\cos B+\cos C\sin B$，

所以 $\sin(C+B)=\sin A\sin B$.

因为在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，

所以 $\sin A=\sin A\sin B$　又 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sin B=1$，$B=\frac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 为 $B=\frac{\pi}{2}$ 的直角三角形.

法二：因为 $a\sin B-b\cos C=c\cos B$，

由余弦定理可得 $a\sin B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即 $a\sin B=a$.

因为 $a\neq 0$，所以 $\sin B=1$.

所以在 $\triangle ABC$ 中，$B=\frac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 为 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 的直角三角形.

（Ⅱ）因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{2}{3}\cos x+\dfrac{1}{2}=\cos^2 x-\dfrac{2}{3}\cos x$

$=(\cos x-\dfrac{1}{3})^2-\dfrac{1}{9}$.

所以 $f(A)=(\cos A-\dfrac{1}{3})^2-\dfrac{1}{9}$.

因为 $\triangle ABC$ 是 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 的直角三角形，

所以 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，且 $0<\cos A<1$，

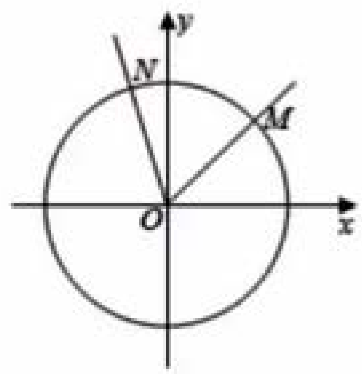
所以 当 $\cos A=\dfrac{1}{3}$ 时，$f(A)$ 有最小值是 $-\dfrac{1}{9}$.

所以 $f(A)$ 的取值范围是 $[-\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{3})$.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 α 的顶点与与原点 O 重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边分别与单位圆交于 $M(x_1,y_1)$，将 α 的终边按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$，交单位圆于 $N(x_2,y_2)$，记 $f(\alpha)=y_1+y_2$.

（Ⅰ）求函数 $f(\alpha)$ 的值域；

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中，若 $f(C)=\sqrt{3}, c=7, \sin A+\sin B=\dfrac{13\sqrt{3}}{14}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.



解：（Ⅰ）$y_1=\sin\alpha, y_2=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\therefore f(\alpha)=y_1+y_2=\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, \therefore \dfrac{\pi}{6}<\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\le\sqrt{3}$，函数 $f(\alpha)$ 的值域是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$.

（Ⅱ）$f(C)=\sqrt{3}\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}, \sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

$\because 0<C<\pi, \therefore \dfrac{\pi}{6}<C+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore C+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}, C=\dfrac{\pi}{3}$,

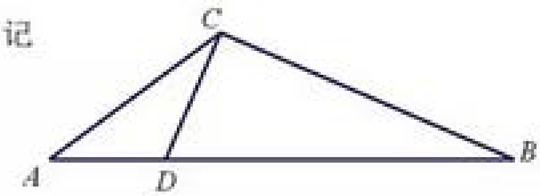
由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，又 $\sin A+\sin B=\frac{13\sqrt{3}}{14}$

得 $a+b=13$

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab$，得 $ab=40$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=10\sqrt{3}$.

4. 如图，在 ΔABC 中，点 D 在边 AB 上，且 $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$. 记 $\angle ACD=\alpha, \angle BCD=\beta$.



（Ⅰ）求证：$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\beta}{3\sin\alpha}$；

（Ⅱ）若 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，$AB=\sqrt{19}$，求 BC 的长.

解：（Ⅰ）

在 ΔACD 中，由正弦定理，有 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\alpha}$

在 ΔBCD 中，由正弦定理，有 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\beta}$

因为 $\angle ADC+\angle BDC=\pi$，所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$

因为 $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\beta}{3\sin\alpha}$

（Ⅱ）因为 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，

由（Ⅰ）得 $\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{3\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}$

设 $AC=2k, BC=3k, k>0$，由余弦定理，

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$

代入，得到 $19=4k^2+9k^2-2\cdot 2k\cdot 3k\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，

解得 $k=1$，所以 $BC=3$．

【排列组合与二项式定理（理科学生使用）】

1．将序号分别为 1，2，3，4，5 的 5 张参观券全部分给 4 人，每人至少 1 张，如果分给同一人的 2 张参观券连号，那么不同的分法种数是______．（用数字作答）

答案：96

*2．某学校高三年级有两个文科班，四个理科班，现每个班指定 1 人，对各班的卫生进行检查．若每班只安排一人检查，且文科班学生不检查文科班，理科班学生不检查自己所在的班，则不同安排方法的种数是（　　）

A．48　　B．72　　C．84　　D．168

答案：D

3．若 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_3=$________（用数字作答）

答案：−80

4．现在有 5 名志愿者到 3 个不同的地方参加义务植树，则每个地方至少有一名志愿者的方案共有___种．

解析：根据题意，先将 5 名志愿者氛围 3 组，有两种分组方法（1）分为 2,2,1 的三组，有 $\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}=15$ 种方法（2）分为 3,1,1 的三组，有 $\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}=10$ 种方法，则共有 10+15=25 种分组方法，再将分好的三组对应 3 个不同的场馆，有 $A_3^3=6$ 种情况

所以共有 $25\times6=150$ 种不同的分配方案

故答案为 150

推荐理由：期中、期末没考排列组合，一模、二模的排列组合用枚举法比较方便，对排列组合知识的考察不够全面，此题突出了排列组合的核心方法，提醒学生要全面备考，系统梳理排列组合知识。

【极坐标系与参数方程（理科学生使用）】

1．已知直线 $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\end{cases}$（　t　为参数）与曲线 $M:\rho=2\cos\theta$ 交于 P,Q 两点，则 $|PQ|=$（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

答案：C

2. 在以 O 为极点的极坐标系中，圆 $\rho=4\sin\theta$ 和直线 $\rho\sin\theta=a$ 相交于 A,B 两点. 若 ΔAOB 是等边三角形，则 a 的值为________.

答案：3

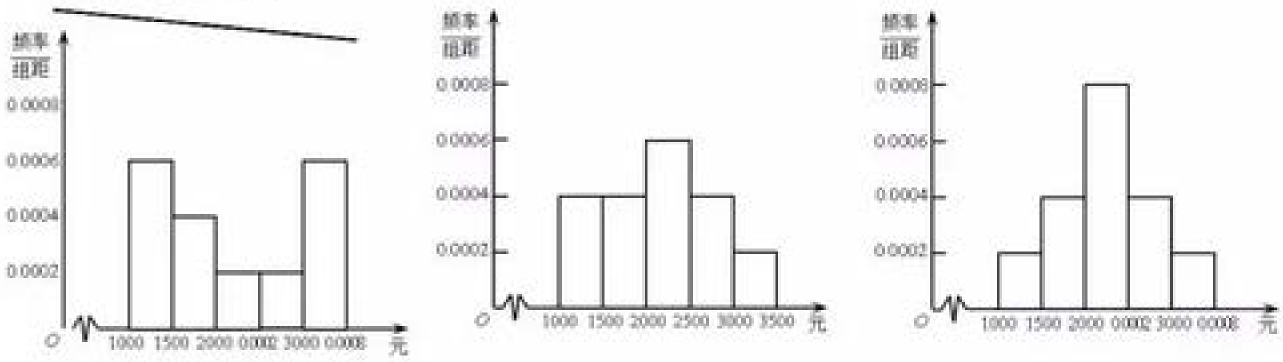
【概率统计】

1. 某班级有 50 名学生，现要采取系统抽样的方法在这 50 名学生中抽出 10 名学生，将这 50 名学生随机编号 1～50 号，并分组，第一组 1～5 号，第二组 6～10 号，…，第十组 46～50 号，若在第三组中抽得号码为 12 的学生，则在第八组中抽得号码为______的学生.

答案：37　　（注：仅以此例补漏抽样方法，分层抽样不再补例.）

2. 了解本市居民的生活成本，甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查. 他们将调查所得到的数据分别绘制成频率分布直方图（如图所示），记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1，s_2，s_3，则它们的大小关系为________.

（用“>”连接）



甲　　乙　　丙

答案：$s_1>s_2>s_3$

3. 某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如下表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值.

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型

号汽车的满意率相等.

(Ⅰ)从所有的回访客户中随机抽取1人，求这个客户满意的概率；

(Ⅱ)从Ⅰ型号和Ⅴ型号汽车的所有客户中各随机抽取1人，设其中满意的人数为ξ，求ξ的分布列和期望；

(Ⅲ)用"$\eta_1=1$"，"$\eta_2=1$"，"$\eta_3=1$"，"$\eta_4=1$"，"$\eta_5=1$"分别表示Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ型号汽车让客户满意，"$\eta_1=0$"，"$\eta_2=0$"，"$\eta_3=0$"，"$\eta_4=0$"，"$\eta_5=0$"分别表示Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ型号汽车让客户不满意. 写出方差$D\eta_1,D\eta_2,D\eta_3,D\eta_4,D\eta_5$的大小关系.

解：(Ⅰ)由题意知，样本中的回访客户的总数是$250+100+200+700+350=1600$，

满意的客户人数$250\times0.5+100\times0.3+200\times0.6+700\times0.3+350\times0.2=555$，

故所求概率为$\dfrac{555}{1600}=\dfrac{111}{320}$.

(Ⅱ) $\xi=0,1,2$.

设事件A为"从Ⅰ型号汽车所有客户中随机抽取的人满意"，

事件B为"从Ⅴ型号汽车所有客户中随机抽取的人满意"，且A、B为独立事件.

根据题意，$P(A)$估计为0.5，$P(B)$估计为0.2 .

则$P(\xi=0)=P(\overline{A}\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=0.5\times0.8=0.4$；

$P(\xi=1)=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)$

$=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$；

$P(\xi=2)=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.2=0.1$.

ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.4	0.5	0.1

ξ的期望$E(\xi)=0\times0.4+1\times0.5+2\times0.1=0.7$.

(Ⅲ) $D\eta_1>D\eta_3>D\eta_2=D\eta_4>D\eta_5$.

推荐理由：独立事件、对立事件的概率研究，随机变量方差的判断

【立体几何】

1. 已知a，b是两条不同直线，α，β是两个不同平面，则

A. a// α，a⊥b，则 b⊥α

B. a⊥α，a⊥b，则 b// α

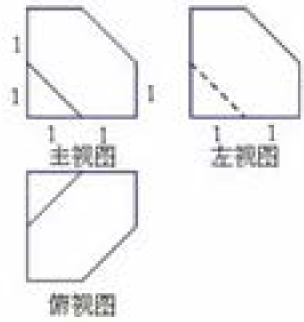
C. a⊂α，b⊂α，a// β，b// β，则 α // β

D. a∩b=A，a// α，b// α，a// β，b// β，则 α // β

答案：D

2. 已知一几何体的三视图如图所示， 则该几何体的体积为___ ；

表面积为____.



答案：$V=4, S=12+3\sqrt{3}$

3. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，

过点 A，P，Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S．则下列命题正确的是 ________. (写出所有正确命题的编号)

①当 $0<CQ<\frac{1}{2}$ 时，S 为四边形；

②当 $CQ=\frac{1}{2}$ 时，S 为等腰梯形；

③当 $CQ=\frac{3}{4}$ 时，S 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R=\frac{1}{3}$；

④当 $\frac{3}{4}<CQ<1$ 时，S 为六边形；

⑤当 $CQ=1$ 时，S 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【参考答案】(2013 高考安徽理 15) ①②③⑤.

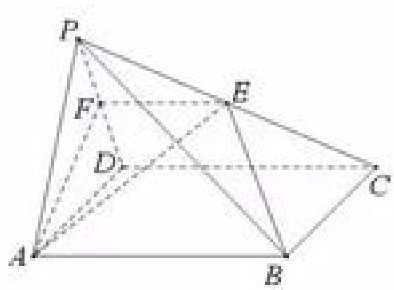
推荐理由：二模第 8 题学生不熟练，花的时间多，需强化训练。

4. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形．点 E 是棱 PC 的中点，平面 ABE 与棱 PD 交于点 F．

（Ⅰ）求证：AB // EF；

（Ⅱ）若 $PA=AD$，且平面 PAD ⊥ 平面 $ABCD$，试证明 AF ⊥ 平面 PCD；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，线段 PB 上是否存在点 M，使得 EM ⊥ 平面 PCD？（直接给出结论，不需要说明理由）



解析：

（Ⅰ）证明：因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AB \parallel CD$.

又因为 $AB \not\subset$ 平面 PCD，$CD \subset$ 平面 PCD，

所以 $AB \parallel$ 平面 PCD.

又因为 A,B,E,F 四点共面，且平面 $ABEF \cap$ 平面 $PCD = EF$，

所以 $AB \parallel EF$.

（Ⅱ）在正方形 $ABCD$ 中，$CD \perp AD$.

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD.

又 $AF \subset$ 平面 PAD

所以 $CD \perp AF$.

由（Ⅰ）可知 $AB \parallel EF$，

又因为 $AB \parallel CD$，所以 $CD \parallel EF$. 由点 E 是棱 PC 中点，所以点 F 是棱 PD 中点.

在△PAD 中，因为 $PA = AD$，所以 $AF \perp PD$.

又因为 $PD \cap CD = D$，所以 $AF \perp$ 平面 PCD.

（Ⅲ）不存在.

5. 如图，$AC = 2ED$，$AC \parallel$ 平面 EDB，$AC \perp$ 平面 BCD，平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC.

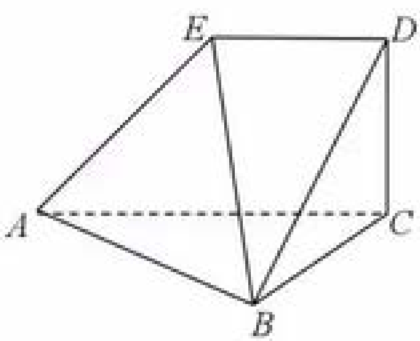
（Ⅰ）求证：$AC \parallel ED$；

（Ⅱ）求证：$DC \perp BC$；

（Ⅲ）当 $BC = CD = DE = 1$ 时，求二面角 $A - BE - D$ 的余弦值；

（Ⅳ）在棱 AB 上是否存在点 P 满足 $EP \parallel$ 平面 BDC

（Ⅴ）设 $\dfrac{CD}{CE} = k$，是否存在 k 满足平面 $ABE \perp$ 平面 CBE？若存在求出 k 值，若不存在说明理由.



解：（Ⅰ）因为 $AC \parallel$ 平面 EDB，平面 $ACDE \cap$ 平面 $EDB = ED$，且 $AC \not\subset$ 平面 EDB，

所以 $AC \parallel ED$.

（Ⅱ）法 1：因为 $AC \perp$ 平面 BCD，所以 $AC \perp CD$，

因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC，且平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$，$CD \subset$ 平面 $ACDE$，

所以 $CD \perp$ 平面 ABC，

所以 $CD \perp CB$。

（Ⅱ）法 2：因为 $AC \perp$ 平面 BCD，所以 $AC \perp CD$， $AC \perp CB$，

因为平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$，

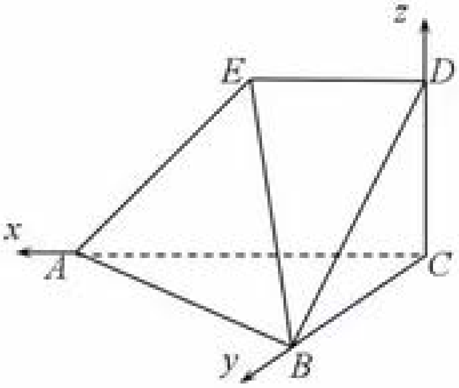
所以 $\angle DCB$ 为二面角 $D-AC-B$ 的平面角，

又因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC，

所以 $\angle DCB = 90^\circ$，即 $CD \perp CB$。

（Ⅲ）由（Ⅱ）证明可知 $AC \perp CD$， $AC \perp CB$，

$CD \perp CB$，



所以如图建立空间直角坐标系，因为

$BC = CD = DE = 1$，

所以 $A(2,0,0), B(0,1,0), D(0,0,1), E(1,0,1)$，

所以

$\overrightarrow{DE} = (1,0,0), \overrightarrow{BD} = (0,-1,1), \overrightarrow{AE} = (-1,0,1), \overrightarrow{AB} = (-2,1,0)$ 设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$，

则

由 $\begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot \boldsymbol{m} = 0, \\ \overrightarrow{BD} \cdot \boldsymbol{m} = 0, \end{cases}$ 可得 $\boldsymbol{m} = (0,1,1)$。

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x',y',z')$，则

由 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \end{cases}$ 可得 $\boldsymbol{n} = (1,2,1)$。

所以 $\cos < \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} >= \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

所以，依据题意可得二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

（Ⅳ）法 1：取 AC 中点 F，连接 EF，过点 F 作 $FP \parallel BC$ 交 AB 于点 P，

所以 P 为 AB 中点.

因为 $AC = 2ED, AC \parallel ED$，所以 $ED \underline{\parallel} FC$，所以 $EF \parallel CD$。

所以平面 $EFP \parallel$ 平面 BCD，

所以 $EP \parallel$ 平面 BCD。

法 2：设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP} = (1-2\lambda, \lambda, -1)$，

由（II）证明可知平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{k}=(1,0,0)$，

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{k}=0$ 可得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

所以当 P 为 AB 中点时，AP 与平面 BCD 成角为 0°，

所以当 P 为 AB 中点时，AP // 平面 BCD.

（V）设 $AC=2a$，则 $A(2a,0,0),E(a,0,ka),B(0,b,0)$，则

$\overrightarrow{AE}=(-a,0,ka),\overrightarrow{AB}=(-2a,b,0)$，

设平面 CBE 的法向量为 $\boldsymbol{m}'=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}'=0,\\ \overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}'=0,\end{cases}$ 可得一个法向量 $\boldsymbol{m}'=(k,0,-1)$，

设平面 ABE 的法向量 $\boldsymbol{n}'=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 可得一个法向量 $\boldsymbol{n}'=(k,\frac{2ak}{b},1)$，

由 $\boldsymbol{m}'\cdot\boldsymbol{n}'=0$ 可得 $k=1$.

所以当 $k=1$ 时，平面 $ABE\perp$ 平面 CBE.

说明：本题可以根据文理科需要分别组合成文科或理科立体几何的解答题。

【函数与导数】

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\le 1\\ 1-\log_2 x,x>1\end{cases}$，则满足 $f(x)\le 2$ 的 x 的取值范围是

A．[-1，2]　　B．[0，2]　　C．[1，+∞）　　D．[0，+∞）

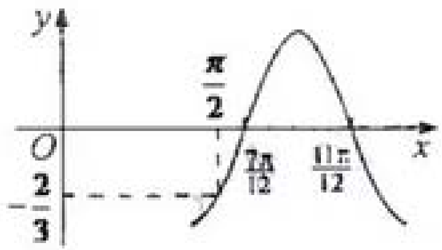
答案：D

2．已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(0<a<3)$，若 $x_1<x_2$，且 $x_1+x_2=1-a$，试比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系.

答案：$f(x_1)<f(x_2)$

3．已知函数 $f(x)$=Acos（$\omega x+\varphi$）的图象如图所示，$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{3}$，则 $f(\frac{\pi}{6})$=（　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$



答案：B

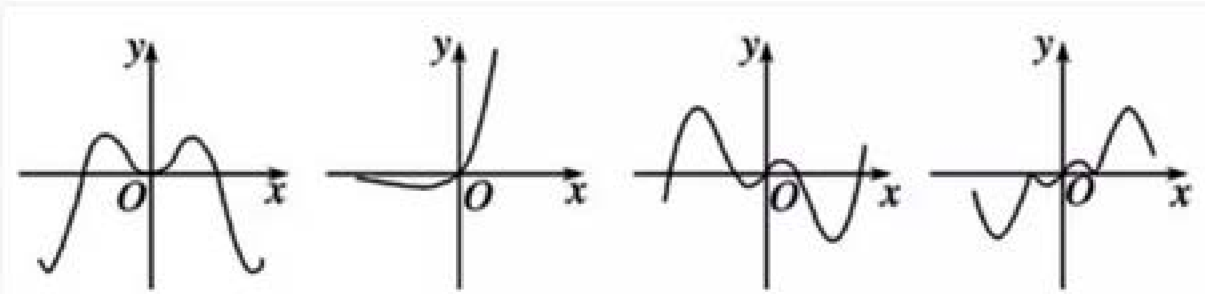
*4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\ln x-2x, x>0, \\ x^2+\frac{3}{2}x, x\le 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y=-1$ 的对称点在 $y=kx-1$ 的图像上，则实数 k 的取值范围是（　）

A. $(\frac{1}{2},1)$　　B. $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$　　C. $(\frac{1}{3},1)$　　D. $(\frac{1}{2},2)$

答案 A

*5. 给出下列四个函数：① $y=x\cdot\sin x$；② $y=x\cdot\cos x$；③ $y=x\cdot|\cos x|$；④ $y=x\cdot 2^x$．

这四个函数的部分图象如下，但顺序被打乱，则按照从左到右的顺序将图象对应的函数序号安排正确的一组是(　　)



A. ①④②③　　B. ①④③②　　C. ④①②③　　D. ③④②①

答案：A

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |\ln x| & x>0, \\ x^2+2x-1 & x\le 0. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的图象与直线 $y=ax-1$ 有且只有三个公共点，则实数 a 的取值范围是______.

答案　$(0,2)$

7. 设函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx(a<b<c)$，其图象在点 $A(1,f(1))$、$B(m,f(m))$ 处的切线的斜率分别为 0，$-a$．

（Ⅰ）求证：$0\leq\frac{b}{a}<1$；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[s,\ t]$，求 $|s-t|$ 的取值范围.

解：（Ⅰ）证明：$f'(x)=ax^2+2bx+c$，由题意及导数的几何意义得

$f'(1)=a+2b+c=0$，　　（1）

$f'(m)=am^2+2bm+c=-a$，　　（2）

又 $a<b<c$，可得 $4a<a+2b+c<4c$，即 $4a<0<4c$，故 $a<0,\ c>0$，

由（1）得 $c=-a-2b$，代入 $a<b<c$，再由 $a<0$，得

$-\frac{1}{3}<\frac{b}{a}<1$，　　（3）

将 $c=-a-2b$ 代入（2）得 $am^2+2bm-2b=0$，即方程 $ax^2+2bx-2b=0$ 有实根.

故其判别式 $\Delta=4b^2+8ab\geq0$ 得　$\frac{b}{a}\leq-2$，或 $\frac{b}{a}\geq0$，　　（4）

由（3），（4）得 $0\leq\frac{b}{a}<1$；

（Ⅱ）由 $f'(x)=ax^2+2bx+c$ 的判别式 $\Delta'=4b^2-4ac>0$，

知方程 $f'(x)=ax^2+2bx+c=0\,(*)$ 有两个不等实根，设为 x_1,x_2，

又由 $f'(1)=a+2b+c=0$ 知，$x_1=1$ 为方程（　*　）的一个实根，则由

根与系数的关系得

$x_1+x_2=-\frac{2b}{a}$，$x_2=-\frac{2b}{a}-1<0<x_1$，

当 $x<x_2$ 或 $x>x_1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x_2<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[x_2,\ x_1]$，由题设知 $[x_2,\ x_1]=[s,\ t]$，

因此 $|s-t|=|x_1-x_2|=2+\frac{2b}{a}$，由（Ⅰ）知 $0\leq\frac{b}{a}<1$ 得

$|s-t|$ 的取值范围为 $[2,\ 4)$.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-e^x\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率是 0，求 a 的值；

（II）当 $a=3$，$x\in[0,1]$ 时，求证：$f(x)\le -1$；

（III）若 $f(x)$ 存在单调递增区间，请直接写出 a 的取值范围.

（Ⅰ）$f'(x)=ax-e^x$，

由题意知，$f'(1)=0$

即 $a-e=0$，

所以 $a=e$.

（Ⅱ）当 $a=3$ 时，$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-e^x$，

所以 $f'(x)=3x-e^x$.

令 $g(x)=f'(x)$，

所以 $g'(x)=3-e^x$.

因为 $x\in[0,1]$，所以 $e^x\in[1,e]$. 因此 $g'(x)=3-e^x>0$ 恒成立.

所以当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)=f'(x)$ 单调递增.

又因为 $f'(0)=-1<0$，$f'(1)=3-e>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$.

列表如下：

x	0	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$	1
$f'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$3-e$
$f(x)$	-1	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}-e$

当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\left\{-1,\dfrac{3}{2}-e\right\}=-1$.

所以当 $a=3$，$x\in[0,1]$ 时，$f(x)\le -1$.

（III）$a\in(-\infty,0)\cup(e,+\infty)$.

9. 已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x$：

（Ⅰ）若函数的最小值为-1，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若 $x_1 > x_2$，且有 $x_1+x_2=2a$，求证：$f(x_1) > f(x_2)$.

解答：（Ⅰ）定义域为 R，

因为 $f'(x)=(x-a)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化如下表：

x	$(-\infty, a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 极小值点，也是最小值点，

所以 $f(a)=-e^a=-1$，解得 $a=0$；

（Ⅱ）由题可知 $x_1 > a$，并且有 $x_2=2a-x_1$，

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-a-1)e^{x_1}-(a-x_1-1)e^{2a-x_1}$，

记 $g(x)=(x-a-1)e^x-(a-x-1)e^{2a-x}$ $x>a$，

$g'(x)=(x-a)(e^x-e^{2a-x})$，

当 $x>a$ 时，$e^x > e^{2a-x}$，即 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(a)=0$

所以有 $f(x_1)>f(x_2)$，结论成立.

10. （仅限理科）已知函数 $f(x)=e^{ax}\cdot(\frac{a}{x}+a+1)$，其中 $a\geq -1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递减区间；

（Ⅱ）若存在 $x_1>0$，$x_2<0$，使得 $f(x_1)<f(x_2)$，求 a 的取值范围.

（Ⅰ）解：$f'(x)=ae^{ax}\dfrac{(x+1)[(a+1)x-1]}{x^2}$

① 当 $a=-1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$；单调递增区间为 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$

当 $a\neq -1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$，或 $x=\frac{1}{a+1}$

② 当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，$(\frac{1}{a+1},+\infty)$

单调递增区间为 $(-1,0)$，$(0,\frac{1}{a+1})$

③ 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 为常值函数，不存在单调区间

④ 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$，$(0,\frac{1}{a+1})$

单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(\frac{1}{a+1},+\infty)$

（Ⅱ）解：① 当 $a>0$ 时，若 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a+1})=e^{\frac{a}{a+1}}(a+1)^2>1$

若 $x\in(-\infty,0)$，$f(x)_{\max}=f(-1)=e^{-a}<1$，不合题意

② 当 $a=0$ 时，显然不合题意

③ 当 $-1<a<0$ 时，取 $x_1=-\frac{a}{2}$，则 $f(x_1)=e^{-\frac{a^2}{2}}(a-1)<0$

取 $x_2=-1$，则 $f(x_2)=e^{-a}>0$，符合题意

④ 当 $a=-1$ 时，取 $x_1=1$，则 $f(x_1)=-e^{-1}<0$

取 $x_2=-1$，则 $f(x_2)=e^{-a}>0$，符合题意

综上，a 的取值范围是 $[-1,0)$．

【解析几何】

1. 直线 $x\cos\alpha+\sqrt{3}y+2=0$ 的倾斜角的取值范围是________．

答案：$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6}\pi,\pi\right)$

2. 已知直线 $x+a^2y+6=0$ 与直线 $(a-2)x+3ay+2a=0$ 平行，则 a 的值为（　　）

A. 0 或 3 或 -1　　B. 0 或 3　　C. 3 或 -1　　D. 0 或 -1

答案：D

3. 已知直线 $mx+4y-2=0$ 与 $2x-5y+n=0$ 互相垂直，垂足为 $P(1,p)$，则 $m-n+p$ 的值是（　　）

A. 24　　B. 20　　C. 0　　D. −4

答案：B

4. 已知点 $A(0,2)$，$B(2,0)$． 若点 C 在函数 $y=x^2$ 的图象上，则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为________

答案：4

5. 已知直线 l_1：$mx-y+m=0$ 与直线 l_2：$x+my-1=0$ 的交点为 Q，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点为 F_1、F_2，则 $|QF_1|+|QF_2|$ 的取值范围是

A. $[2,+\infty)$　　B. $[2\sqrt{3},+\infty)$　　C. $[2,4]$　　D. $[2\sqrt{3},4]$

答案 ：4

6. 已知直线 $l:ax+(a+1)y+a+1=0(a\in R)$，试写出一个满足命题“对任意的实数 a，点 P 不在直线　　l　　上”的点 P 坐标________．

答案：直线 $x+y+1=0$ 上除点 $(0,-1)$ 的其余点

7. 已知直线 $l:ax+(a+1)y+2=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=16$ 相交于 A， B 两点，则 $|AB|$ 的取值范围是________．

答案：$\left[4\sqrt{2},8\right)$

推荐理由：

在研究直线过定点问题时，容易忽视直线旋转过程中，倾斜角（斜率）的取值范围；学生在研究过程中，需体会“过定点的无数条直线”与“过定点的所有直线”之间存在着差异。

8. 已知椭圆 W：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的上下顶点分别为 A,B，且点 B $(0,-1)$． F_1,F_2 分别为椭圆 W 的左、右焦点，且 $\angle F_1BF_2=120^\circ$．

（Ⅰ）求椭圆 W 的标准方程；

（Ⅱ）点 M 是椭圆上异于 A，B 的任意一点，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于 N，E 为线段 MN 的中点．直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C，G 为线段 BC 的中点，O 为坐标原点．求 $\angle OEG$ 的大小．

解答：（Ⅰ）依题意，得 $b=1$．又 $\angle F_1BF_2=120°$，

在 $Rt\Delta BF_1O$ 中，$\angle F_1BO=60°$，所以 $a=2$．

所以椭圆 W 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（Ⅱ）设 M (x_0,y_0)，$x_0\neq0$，则 N $(0,y_0)$，E $(\frac{x_0}{2},y_0)$．

因为点 M 在椭圆 W 上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$．即 $x_0^2=4-4y_0^2$．

又 A $(0,1)$，所以直线 AE 的方程为 $y-1=\frac{2(y_0-1)}{x_0}x$．

令 $y=-1$，得 C $(\frac{x_0}{1-y_0},-1)$．

又 B $(0,-1)$，G 为线段 BC 的中点，所以 G $(\frac{x_0}{2(1-y_0)},-1)$．

所以 $\overrightarrow{OE}=(\frac{x_0}{2},y_0)$，$\overrightarrow{GE}=(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1)$．

因为 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}=\frac{x_0}{2}(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)})+y_0(y_0+1)$

$$=\frac{x_0^2}{4}-\frac{x_0^2}{4(1-y_0)}+y_0^2+y_0$$

$$=1-\frac{4-4y_0^2}{4(1-y_0)}+y_0$$

$$=1-y_0-1+y_0=0，$$

所以 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$．$\angle OEG=90°$．

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过点 P 的直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率；

（Ⅱ）若直线 l 与 x 轴、y 轴分别相交于 A,B 两点，试求 ΔOAB 面积的最小值；

（Ⅲ）设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 Q 与点 F_1 关于直线 l

对称，求证：点Q,P,F_2三点共线.

解答：（Ⅰ）依题意可知$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2-1}=1$，

所以椭圆C离心率为$e=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅱ）因为直线 l 与 x 轴，y 轴分别相交于A,B两点，所以

$x_0\neq 0, y_0\neq 0$.

令$y=0$，由$\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$得$x=\frac{2}{x_0}$，则$A(\frac{2}{x_0},0)$.

令$x=0$，由$\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$得$y=\frac{1}{y_0}$，则$B(0,\frac{1}{y_0})$.

所以ΔOAB的面积$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0y_0}\right|=\frac{1}{|x_0y_0|}$.

因为点$P(x_0,y_0)$在椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$上，所以$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$.

所以$1=\frac{x_0^2}{2}+y_0^2\geq 2\frac{|x_0y_0|}{\sqrt{2}}$，即$|x_0y_0|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\frac{1}{|x_0y_0|}\geq\sqrt{2}$.

所以$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{|x_0y_0|}\geq\sqrt{2}$.

当且仅当$\frac{x_0^2}{2}=y_0^2$，即$x_0=\pm 1, y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\Delta OAB$面积的最小值为$\sqrt{2}$.

（Ⅲ）①当$x_0=0$时，$P(0,\pm 1)$.

当直线$l:y=1$时，易得$Q(-1,2)$，此时$k_{F_2P}=-1$，$k_{F_2Q}=-1$.

因为$k_{F_2Q}=k_{F_2P}$，所以三点Q,P,F_2共线.

同理，当直线$l:y=-1$时，三点Q,P,F_2共线.

②当$x_0\neq 0$时，设点$Q(m,n)$，因为点Q与点F_1关于直线 l 对称，

所以 $\begin{cases}\dfrac{x_0}{2}\cdot\dfrac{m-1}{2}+y_0\cdot\dfrac{n}{2}=1,\\ \dfrac{\frac{n}{2}-0}{\frac{m-1}{2}+1}\cdot(-\dfrac{x_0}{2y_0})=-1.\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}x_0m+2y_0n-x_0-4=0,\\ 2y_0m-x_0n+2y_0=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=\dfrac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2},\\ n=\dfrac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}.\end{cases}$

所以点 $Q(\dfrac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2},\dfrac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2})$.

又因为 $\overrightarrow{F_2P}=(x_0-1,y_0)$，$\overrightarrow{F_2Q}=(\dfrac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1,\dfrac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2})$， 且

$$(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1)\cdot y_0-\frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\cdot(x_0-1)=y_0\cdot\frac{(4x_0-8y_0^2)-(4x_0+8)(x_0-1)}{4y_0^2+x_0^2}$$

$$=y_0\cdot\frac{4x_0-8y_0^2-(4x_0^2+4x_0-8)}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-8y_0^2-4x_0^2+8}{4y_0^2+x_0^2}$$

$$=y_0\cdot\frac{-4(2y_0^2+x_0^2)+8}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-4\times2+8}{4y_0^2+x_0^2}=0.$$

所以 $\overrightarrow{F_2P}/\!/\overrightarrow{F_2Q}$. 所以点 Q,P,F_2 三点共线.

综上所述，点 Q,P,F_2 三点共线.

10. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴，且右焦点到左顶点的距离为 3 .

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和焦点的坐标；

（Ⅱ）与 x 轴不垂直且不重合的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的 A, B 两点，直线 l 与 x 轴的交点为 M，点 M 关于 y 轴的对称点为 N.

（i）求 ΔABN 面积的最大值；

（ii）当 ΔABN 面积取得最大值时，求证：$\sqrt{6}<|AB|<2\sqrt{2}$.

解：（Ⅰ）因为 $\begin{cases}a+c=3\\ a^2=4\end{cases}$， 所以 $a=2,c=1$，

又 $a^2=b^2+c^2$，　所以 $b^2=3$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，焦点坐标分别为 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$

（Ⅱ）(i) 方法一：

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),l_{AB}:y=kx+t$，

所以 $M(-\frac{t}{k},0),N(\frac{t}{k},0)$

联立 $\begin{cases}y=kx+t\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$

得 $(4k^2+3)x^2+8ktx+4t^2-12=0$

$x_1+x_2=-\frac{8kt}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{4t^2-12}{4k^2+3},\Delta=48(4k^2-t^2+3)>=0$，

即 $t^2<4k^2+3$

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2-t^2+3}}{4k^2+3}$，

点 N 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|2t|}{\sqrt{1+k^2}}$

所以 $S_{\Delta ABN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|2t|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-t^2+3}}{4k^2+3}$

$$=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(4k^2-t^2+3)\cdot t^2}}{4k^2+3}$$

$$\le\frac{4\sqrt{3}\,\frac{(4k^2-t^2+3)+t^2}{2}}{4k^2+3}$$

$$\le\frac{2\sqrt{3}(4k^2+3)}{4k^2+3}$$

$$=2\sqrt{3}$$

当且仅当 $4k^2-t^2+3=t^2$ 即 $2t^2=4k^2+3$ 时等号成立。

(ii) 因为 $|AB|=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{4k^2+3}\cdot\sqrt{\frac{4k^2+3}{2}}$

$$=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1+k^2}{4k^2+3}}=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4(4k^2+3)}}$$

而 $4k^2+3>3$，

所以$0<\dfrac{1}{4(4k^2+3)}<\dfrac{1}{12}$，所以$\sqrt{6}<|AB|<2\sqrt{2}$

法二：

(i) 设直线$x=my+t(m\neq 0)$

所以$M(t,0),N(-t,0)$

联立方程$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\x=my+t\end{cases}$

化简得$(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$

所以 $\Delta=48(3m^2-t^2+4)>0$

$$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2+4}\\y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}\end{cases}$$

所以$|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{48(3m^2-t^2+4)}}{3m^2+4}$

点N到AB的距离为：$d=\dfrac{|2t|}{\sqrt{1+m^2}}$

$$S_{\Delta ABN}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{4\sqrt{3}|t|\sqrt{3m^2-t^2+4}}{3m^2+4}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}|t|\sqrt{3m^2-t^2+4}}{(|t|^2+(\sqrt{3m^2-t^2+4})^2)}$$

$$\leq\frac{4\sqrt{3}|t|\sqrt{3m^2-t^2+4}}{2|t|(\sqrt{3m^2-t^2+4})}$$

$$=2\sqrt{3}$$

当且仅当$|t|=\sqrt{3m^2-t^2+4}$，即$2t^2=3m^2+4$等号成立

(ii) $|AB|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{48(3m^2-\dfrac{3m^2+4}{2}+4)}}{3m^2+4}$

$$=2\sqrt{6}\sqrt{\frac{1+m^2}{3m^2+4}}$$

$$=2\sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3m^2+4)}}$$

因为$3m^2+4>4$

所以$|AB|\in(\sqrt{6},2\sqrt{2})$

11. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，F为右焦点，圆O：$x^2+y^2=1$，P为椭圆C上一点，且P位于第一象限，过点P作PT与圆O相切于点T，使得点F，T在OP的两侧．

（1）求椭圆C的焦距及离心率．

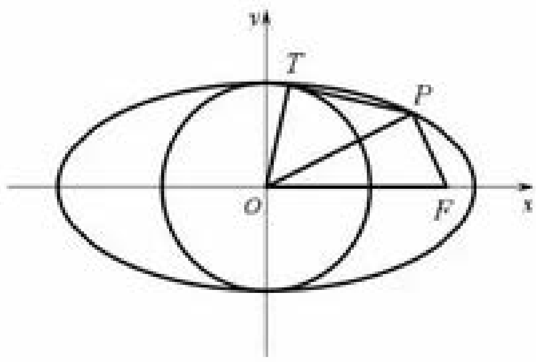
（2）求四边形$OFPT$面积的最大值．

解:（Ⅰ）在椭圆C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$中，$a=2$，$b=1$，

所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

故椭圆C的焦距为$2c=2\sqrt{3}$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅱ）设$P(x_0,y_0)$（$x_0>0$，$y_0>0$），



则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，故$y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$．

所以$|TP|^2=|OP|^2-|OT|^2=x_0^2+y_0^2-1=\frac{3}{4}x_0^2$，

所以$|TP|=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$，

$$S_{\triangle OTP}=\frac{1}{2}|OT|\cdot|TP|=\frac{\sqrt{3}}{4}x_0.$$

又$O(0,0)$，$F(\sqrt{3},0)$，故$S_{\triangle OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}y_0$．

因此$S_{四边形OFPT}=S_{\triangle OFP}+S_{\triangle OTP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{x_0}{2}+y_0)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+x_0y_0+y_0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}.$$

由$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，得$2\sqrt{\frac{x_0^2}{4}\cdot y_0^2}\le1$，即$x_0\cdot y_0\le1$，

所以$S_{四边形OFPT}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\le\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当$\frac{x_0^2}{4}=y_0^2=\frac{1}{2}$，即$x_0=\sqrt{2}$，$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立．

推荐理由：

1. 几何条件丰富，利于练习学生作图、识图。

2. 补充解析中面积处理的相关考点，难度适中。

3. 本题最值处理过程思路开阔，利于复习相关知识（函数（消元转化为研究函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{1-y_0^2}+y_0)$）、均值、三角（$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$）、线性规划（$z=\frac{x_0}{2}+y_0$）等）。

4. 计算量少，突出思维层面的复习。