2019 北京石景山区高三一模

数　　学（理）

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

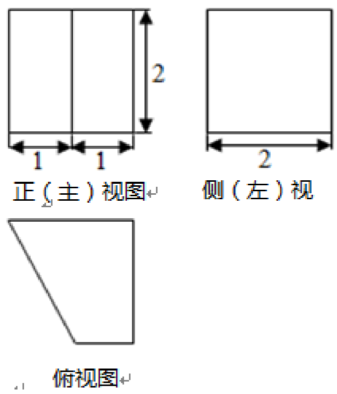
1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 1\}$，$Q=\{2,3\}$，则下列关系中正确的是

A. $P=Q$　　B. PÜ Q　　C. QÜ P　　D. $P\cup Q=\mathbf{R}$

2. 设 i 是虚数单位，若复数 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则复数 z 的模为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 某几何体的三视图如右图所示，该几何体的体积为



A. 2

B. 6

C. 10

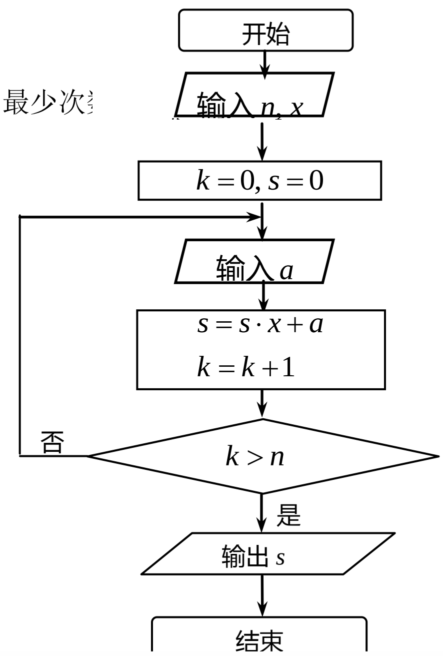
D. 24

4. 九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏．在某种玩法中，用 a_n 表示解下 $n(n\leqslant 9, n\in\mathbf{N}^*)$ 个圆环所需的移动最少次

$a_n=\begin{cases}2a_{n-1}-1, & n\text{为偶数}\\ 2a_{n-1}+2, & n\text{为奇数}\end{cases}$，则解下 4 个圆环所需的最少移动次数为

A. 7　　B. 10　　C. 12　　D. 22

5. 中国南宋时期的数学家秦九韶提出了一种多项式简化算法，右图是实现该算法的程序框图，如输入的 $x=1, n=2$，依次输入的 a 为 1，2，



3，运行程序，输出的 s 的值为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 6

6. 已知平面向量 $\vec{a}=(k,2),\vec{b}=(1,k),k\in\mathbf{R}$，则 $k=\sqrt{2}$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 若 $x>y>a>b>1$，则下列各式中一定正确的是

A. $a^x>b^y$　　B. $\ln x<\ln y$　　C. $\sin x>\sin y$　　D. $\frac{a}{x}<\frac{b}{y}$

8. 已知函数 $f(x)=a\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 的一条对称轴为 $x=-\frac{\pi}{6}$，$f(x_1)+f(x_2)=0$，

且函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上具有单调性，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\ y-x\leqslant 1,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为_________.

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$，$a_4=16$，则其前 n 项和 $S_n=$_______.

11. 在极坐标系中，直线 $\rho\sin\theta=2$ 与圆 $\rho=4\sin\theta$ 的位置关系为______. （填“相交”、“相切”或“相离”）

12. 若四面体各棱的长是 1 或 2，且该四面体不是正四面体，则其表面积的值可能是______. （只需写出一个可能的值）

13. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点 F 作其渐近线的平行线 l，直线 l 与 y 轴交于点 P，若线段 OP 的中点为双曲线的虚轴端点（O 为坐标原点），则双曲线的离心率为____.

14. 在直角坐标系 xOy 中，点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$，设集合 $M=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，

且 $A, B \in M$，$|AB|=1$，则 $x_1x_2+y_1y_2=$________；点 A，B 到 x 轴距离之和的最小值为__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. （本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，$b=2\sqrt{3}$，$c=3$，$\cos B=-\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 $\sin C$ 的值；

（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. （本小题 13 分）

某不透明纸箱中共有 4 个小球，其中 1 个白球，3 个红球，它们除颜色外均相同.

（Ⅰ）一次从纸箱中摸出两个小球，求恰好摸出 2 个红球的概率；

（Ⅱ）每次从纸箱中摸出一个小球，记录颜色后放回纸箱，这样摸取 4 次，记得到红球的次数为 ξ，求 ξ 的分布列；

（Ⅲ）每次从纸箱中摸出一个小球，记录颜色后放回纸箱，这样摸取 100 次，得到几次红球的概率最大？只需写出结论.

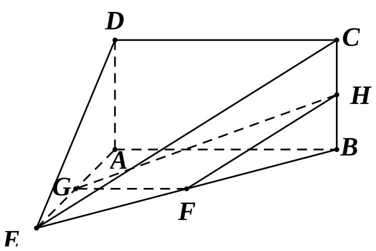
17. （本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 AEB，且四边形 $ABCD$ 为矩形，$\angle BAE=120^\circ$，$AE=AB=4$，$AD=2$，F, G 分别为 BE, AE 的中点，H 在线段 BC 上（不包括端点）.

（Ⅰ）求证：$CD \,//$ 平面 FGH；

（Ⅱ）求证：平面 $DAF \perp$ 平面 CEB；

（Ⅲ）是否存在点 H，使得二面角 $H-GF-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$？若存在，求 $\frac{BH}{BC}$；若不存在，说明理由.



18.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=e^{x}-ax+1$， $a>0$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a ；

（Ⅱ）当 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，求 a 的最大值.

19. （本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$ ，右焦点为 $F(c,0)$ ，左顶点为 A ，右顶点 B 在直线 $l:x=2$ 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设点 P 是椭圆 C 上异于 A ， B 的点，直线 AP 交直线 l 于点 D ，当点 P 运动时，判断以 BD 为直径的圆与直线 PF 的位置关系，并加以证明.

20.（本小题 13 分）

若项数为 n 的单调递增数列 $\{a_n\}$ 满足：

①$a_1=1$；

②对任意 k （ $k\in\mathbf{N}^*$， $2\leqslant k\leqslant n$ ），存在 i,j （ $i\in\mathbf{N}^*,j\in\mathbf{N}^*$， $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ ）使得 $a_k=a_i+a_j$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P .

（Ⅰ）分别判断数列 $1,3,4,7$ 和 $1,2,3,5$ 是否具有性质 P ，并说明理由；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P ，且 $a_n=36$ ，

（ⅰ）证明数列 $\{a_n\}$ 的项数 $n\geqslant 7$ ；

（ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 中所有项的和的最小值.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	B	A	D	C	A	C

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. -1；　　10. $2^{n+1}-2$；　　11. 相交；

12. $2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 或 $\sqrt{15}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{4}$；　　13. 2 ；　　14. $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. （本小题 13 分）

解：(Ⅰ)在$\triangle ABC$中，$\cos B=-\dfrac{1}{3}$，

$$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\because b=2\sqrt{3}，c=3,$$

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{3}{\sin C}$，

$$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(Ⅱ)由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得 $12=a^2+9-2\times3a\times(-\dfrac{1}{3})$，

$$\therefore a^2+2a-3=0,$$

解得 $a=1$ 或 $a=-3$（舍）

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}.$$

16．（本小题 13 分）

解：(Ⅰ)设“一次从纸箱中摸出两个小球，恰好摸出 2 个红球”为事件 A.

则 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$.

(Ⅱ) ξ 可能取 0，1，2，3，4.

$P(\xi=0)=C_4^0(\frac{3}{4})^0(1-\frac{3}{4})^4=\frac{1}{256}$， $P(\xi=1)=C_4^1(\frac{3}{4})^1(1-\frac{3}{4})^3=\frac{3}{64}$，

$P(\xi=2)=C_4^2(\frac{3}{4})^2(1-\frac{3}{4})^2=\frac{27}{128}$， $P(\xi=3)=C_4^3(\frac{3}{4})^3(1-\frac{3}{4})^1=\frac{27}{64}$，

$P(\xi=4)=C_4^4(\frac{3}{4})^4(1-\frac{3}{4})^0=\frac{81}{256}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

(Ⅲ) 75.

17．（本小题 14 分）

(Ⅰ) 证明：在矩形 $ABCD$ 中， $CD \parallel AB$，

$\because F$，G 分别为 BE，AE 的中点，

$\therefore FG \parallel AB$， 且 $FG=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore CD \parallel FG$，

$\because CD \not\subset$ 平面 FGH， $FG \subset$ 平面 FGH，

$\therefore CD \parallel$ 平面 FGH.

(Ⅱ) 证明：在矩形 $ABCD$ 中， $AD \perp AB$，

$\because$矩形 $ABCD\perp$平面 AEB，且平面 $ABCD\cap$ 平面 $AEB=AB$，

$\therefore AD\perp$平面 AEB，

又 $BE\subset$平面 AEB，

$\therefore AD\perp BE$，

$\because AE=AB$， F 为 BE 的中点，

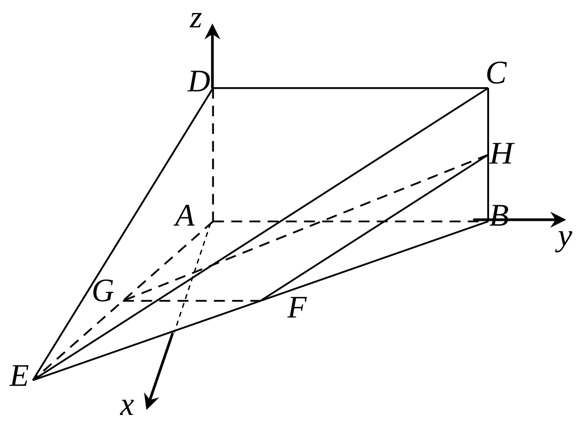
$\therefore AF\perp BE$，

又 $AD\cap AF=A$，

$\therefore BE\perp$平面 ADF，

$\because BE\subset$平面 CEB，

$\therefore$平面 $DAF\perp$平面 CEB.



（III）在平面 ABE 内作 AB 的垂线，如图建立

空间直角坐标系 $A-xyz$，

$\because \angle BAE=120^\circ$， $AE=AB=4$， $AD=2$，

$\therefore A(0,0,0)$， $B(0,4,0)$， $C(0,4,2)$，

$E(2\sqrt{3},-2,0)$， $G(\sqrt{3},-1,0)$， $F(\sqrt{3},1,0)$，

设 $\dfrac{BH}{BC}=\lambda$， $\therefore \overrightarrow{BH}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda(0,0,2)=(0,0,2\lambda)$，

$\therefore H(0,4,2\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{GF}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{FH}=(-\sqrt{3},3,2\lambda)$，

设平面 FGH 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{GF}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FH}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ -\sqrt{3}x+3y+2\lambda z=0,\end{cases}$

令 $x=2\lambda$，则 $z=\sqrt{3}$，

$\therefore \vec{n}=(2\lambda,0,\sqrt{3})$ 是平面 FGH 的一个法向量，

∵ $AD\perp$ 平面 AEB，

∴平面 AEB 的法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$，

∵二面角 $H-GF-B$ 的大小 $\dfrac{\pi}{6}$

∴ $|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AD}>|=\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(2\lambda)^2+3}\cdot 2}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$，

∵ H 在 BC 上，∴ $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

18．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）∵ $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+1$

∴ $f'(x)=e^x-a$，

∴ $f'(1)=e-a$，

由题设知 $f'(1)=0$，即 $e-a=0$，解得 $a=e$.

经验证 $a=e$ 满足题意。

（Ⅱ）方法一：

令 $f'(x)=0$，即 $e^x=a$，则 $x=\ln a$

（1）当 $\ln a<1$ 时，即 $0<a<e$

对于任意 $x\in(-\infty,\ln a)$ 有 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减；

对于任意 $x\in(\ln a,1)$ 有 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(\ln a,1)$ 单调递增，

因此当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 有最小值为 $a-a\ln a+1=a(1-\ln a)+1>0$ 成立.

（2）当 $\ln a\geq 1$ 时，即 $a\geq e$

对于任意 $x\in(-\infty,1)$ 有 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，

因为 $f(x)>0$，所以 $f(1)\geq 0$，即 $a\leq e+1$，

综上，a 的最大值为 $e+1$.

方法二：由题设知，当 $x<1$ 时，$f(x)=e^x-ax+1>0$，

（1）当 $0<x<1$ 时，$a<\dfrac{e^x+1}{x}$.

设 $g(x)=\dfrac{e^x+1}{x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{xe^x-e^x-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x-1}{x^2}<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

因此，$g(x)$ 的最小值大于 $g(1)=e+1$，所以 $a\le e+1$.

（2）当 $x=0$ 时，$f(x)=2>0$ 成立.

（3）当 $x<0$ 时，$a>\dfrac{e^x+1}{x}$，因为 $\dfrac{e^x+1}{x}<0$，

所以当 $a=e+1$ 时，$a>\dfrac{e^x+1}{x}$ 成立.

综上，a 的最大值为 $e+1$.

19．（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）依题可知 $B(a,0)$，$a=2$

因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $c=1$　　$b=\sqrt{3}$

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

证明如下：由题意可设直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)(k\neq 0)$.

则点 D 坐标为 $(2,4k)$，BD 中点 E 的坐标为 $(2,2k)$，

由 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得

$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$.

设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $-2x_0=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$.

所以 $x_0=\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}$， $y_0=k(x_0+2)=\dfrac{12k}{3+4k^2}$.

因为点 F 坐标为 $(1,\ 0)$，

①当 $k=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 的坐标为 $(1,\ \pm\dfrac{3}{2})$，直线 PF 的方程为 $x=1$，

点 D 的坐标　为 $(2,\ \pm2)$.

此时以 BD 为直径的圆 $(x-2)^2+(y\mp1)^2=1$ 与直线 PF 相切.

② 当 $k\neq\pm\dfrac{1}{2}$ 时，直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\dfrac{y_0}{x_0-1}=\dfrac{4k}{1-4k^2}$.

所以直线 PF 的方程为 $y=\dfrac{4k}{1-4k^2}(x-1)$，即 $x-\dfrac{1-4k^2}{4k}y-1=0$.

故点 E 到直线 PF 的距离

$$d=\frac{|2-\frac{1-4k^2}{4k}\times2k-1|}{\sqrt{1+(\frac{1-4k^2}{4k})^2}}=\frac{\frac{1+4k^2}{2}}{\sqrt{(\frac{1+4k^2}{4k})^2}}=|2k|$$

（或直线 PF 的方程为 $\dfrac{4k}{1-4k^2}x-y-\dfrac{4k}{1-4k^2}=0$，

故点 E 到直线 PF 的距离

$$d=\frac{\left|\frac{8k}{1-4k^2}-2k-\frac{4k}{1-4k^2}\right|}{\sqrt{\frac{16k^2}{(1-4k^2)^2}+1}}=\frac{\left|\frac{2k+8k^3}{1-4k^2}\right|}{\frac{1+4k^2}{|1-4k^2|}}=2|k|$$）

又因为 $|BD|=2R=4|k|$ ，故以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

综上得，当点 P 运动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

解法二:

（Ⅱ）以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

证明如下：设点 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1(y_0\neq 0)$

① 当 $x_0=1$ 时，点 P 的坐标为 $(1,\ \pm\frac{3}{2})$，直线 PF 的方程为 $x=1$，

点 D 的坐标为 $(2,\ \pm 2)$，

此时以 BD 为直径的圆 $(x-2)^2+(y\mp 1)^2=1$ 与直线 PF 相切，

② 当 $x_0\neq 1$ 时直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

点 D 的坐标为 $D(2,\frac{4y_0}{x_0+2})$，BD 中点 E 的坐标为 $(2,\frac{2y_0}{x_0+2})$，故 $|BE|=|\frac{2y_0}{x_0+2}|$

直线 PF 的斜率为 $k_{PF}=\frac{y_0}{x_0-1}$，

故直线 PF 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，即 $x-\frac{x_0-1}{y_0}y-1=0$，

所以点 E 到直线 PF 的距离 $d=\frac{|2-\frac{x_0-1}{y_0}\times\frac{2y_0}{x_0+2}-1|}{\sqrt{1+(\frac{x_0-1}{y_0})^2}}=|\frac{2y_0}{x_0+2}|=|BE|$

故以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

综上得，当点 P 运动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

20．（本题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $3\neq 1+1$，所以 $1,3,4,7$ 不具有性质 P；

因为 $2=1+1$，$3=1+2$，$5=2+3$，所以 $1,2,3,5$ 具有性质 P.

（Ⅱ）

（ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，又 $a_k=a_i+a_j$，

所以 $a_i\leq a_j<a_k$ 即 $a_i\leq a_j\leq a_{k-1}$，

所以 $a_k\leq 2a_{k-1}$，

$a_1=1$，所以 $a_2\leq 2$，$a_3\leq 4$，$a_4\leq 8$，$a_5\leq 16$，$a_6\leq 32$，

又因为$a_n=36$，所以$n\geq 7$.

（ii）因为$36=18+18$，$18=9+9$，$9=3+6$，$6=3+3$，$3=1+2$，$2=1+1$；

所以可以构造数列$1,2,3,6,9,18,36$满足性质P；

或$36=18+18$，$18=9+9$，$9=4+5$，$5=4+1$，$4=2+2$，$2=1+1$，

所以可以构造数列$1,2,4,5,9,18,36$满足性质P；

上述两个数列的和为75，下面说明75为数列$\{a_n\}$中所有项的和的最小值.

若18在数列$\{a_n\}$中，要求数列$\{a_n\}$中所有项的和的最小值，则$a_{i-1}=18$，

若18不在数列$\{a_n\}$中，则$a_i+a_j=36$，由（i）知$n\geq 7$，

则数列$\{a_n\}$中所有项的和$s=a_1+a_2+\cdots+a_n>(a_i+a_j+36)+4a_1=76$，

所以要求数列$\{a_n\}$中所有项的和的最小值，则$a_{i-1}=18$.

同理要求数列$\{a_n\}$中所有项的和的最小值，则$a_{i-2}=9$，

$9=8+1=7+2=6+3=5+4$，同理可得$a_{i-3}=6$或4；

依此类推要求数列$\{a_n\}$中所有项的和的最小值，其数列为$1,2,3,6,9,18,36$或$1,2,4,5,9,18,36$

所以数列$\{a_n\}$中所有项的和的最小值为75.

【若有不同解法，请酌情给分】