绝密★启用前

“天一大联考·三晋名校联盟”
2022—2023 学年(下)高三顶尖计划联考

数　学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid(x+2)(x-7)\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid\log_3 x>1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{5,6\}$　　B. $\{4,5,6\}$　　C. $\{3,4,5,6\}$　　D. $\{4,5,6,7\}$

2. 已知 $z-2\bar{z}=1+6\mathrm{i}$,则 z 的虚部为

A. -6　　B. $-6\mathrm{i}$　　C. 2　　D. $2\mathrm{i}$

3. 已知圆 $C_1: x^2+(y-2)^2=5$ 和 $C_2: (x+2)^2+y^2=5$ 交于 A,B 两点,则 $|AB|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{23}$　　D. $2\sqrt{23}$

4. 已知 $\tan\alpha=-7$,则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=$

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

5. 如图是一款多功能粉碎机的实物图,它的进物仓可看作正四棱台,已知该四棱台的上底面边长为 40 cm,下底面边长为 10 cm,侧棱长为 30 cm,则该款粉碎机进物仓的容积为

A. $8\,600\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$　　B. $8\,600\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

C. $10\,500\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$　　D. $10\,500\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+a_4=2$, $a_3+a_4+a_5+a_6=4$,则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=$

A. 32　　B. 64　　C. 96　　D. 128

7. 若直线 $y=x+a$ 与函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 和 $g(x)=\ln x+b$ 的图象都相切,则 $a+b=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 3

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线与 C 交于 A,B 两点，D 为 AB 的中点，且 $DM\perp l$ 于点 M，AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N，四边形 $DMFN$ 的面积为 $32\sqrt{3}$，则 $p=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在 $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中，下列结论正确的是

A. 第 6 项和第 7 项的二项式系数相等　　B. 奇数项的二项式系数和为 256

C. 常数项为 84　　D. 有理项有 2 项

10. 已知正实数 a,b 满足 $a+4b=2$，则

A. $ab\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $2^a+16^b\geqslant4$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{9}{2}$　　D. $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqslant4$

11. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，且曲线 $y=f(x)$ 关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，则

A. $f(x)$ 以 2π 为周期

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

C. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后对应的函数为偶函数

D. 函数 $y=f(x)+\frac{9}{10}$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点

12. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=2AB=2AA_1=4$，E 是棱 B_1C_1 的中点，过点 B,E,D_1 的平面 α 交棱 AD 于点 F，点 P 为线段 D_1F 上一动点，则

A. 三棱锥 $P-ABE$ 的体积为定值

B. 存在点 P，使得 $DP\perp\alpha$

C. 直线 PE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值的最大值为 $\sqrt{2}$

D. 三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球表面积的取值范围是 $[12\pi,44\pi]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的右焦点为 F，点 $A(0,m)$，若直线 AF 与 C 只有一个交点，则 $m=$ ________.

14. 已知向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，b 与 $a-\frac{3}{2}b$ 垂直，$|b|=2$，则 $|a|=$ ________.

15. 某产品的质量检验过程依次为进货检验(IQC)、生产过程检验(IPQC)、出货检验(OQC)三个环节. 已知某产品 IQC 的单独通过率为 $\frac{4}{5}$，IPQC 的单独通过率为 $\frac{3}{4}$，规定上一类检验不通过则不进入下一类检验，未通过可修复后再检验一次(修复后无需从头检验，通过率不变且每类检验最多两次)，且各类检验间相互独立，则一件该产品能进入 OQC 环节的概率为________.

16. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)+g(x-2)=3$，$f(x-1)-g(-x)=1$，且 $g(-1)=2$，$g(x-1)$ 为偶函数，则 $\sum\limits_{k=1}^{83}[f(k)+g(k)]=$ ________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$；② $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$；③ $b_n=2^na_n$，这三个条件中任选一个补充在下面横线上，并解答问题.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=na_n-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

(Ⅰ) 证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(Ⅱ) 若 $a_1=2$，设________，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，且 $\sqrt{3}b=c(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$.

(Ⅰ) 求 C；

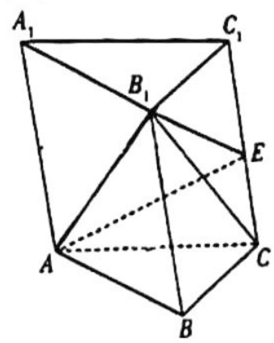
(Ⅱ) 若 $AB\perp AC$，$AC=3$，角 C 的平分线交 AB 于点 D，点 E 满足 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$，求 $\sin\angle AEB$.

19. (12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1B_1B 为菱形，E 为棱 CC_1 的中点，$\triangle AB_1C$ 为等边三角形.

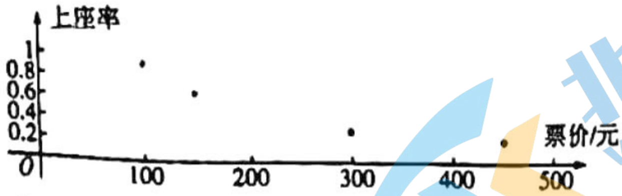
(Ⅰ) 求证：$AB_1\perp B_1C_1$；

(Ⅱ) 若 $AC\perp BC$，$AC=4$，$BC=3$，求平面 AA_1B_1B 和平面 AB_1E 夹角的余弦值.



20.（12 分）

某剧场的座位数量是固定的，管理人员统计了最近在该剧场举办的五场表演的票价 x_i（单位：元）和上座率 y_i（上座人数与总座位数的比值）的数据，其中 $i=1,2,3,4,5$，并根据统计数据得到如下的散点图：



（Ⅰ）由散点图判断 $y=bx+a$ 与 $y=c\ln x+d$ 哪个模型能更好地对 y 与 x 的关系进行拟合（给出判断即可，不必说明理由），并根据你的判断结果求回归方程；

（Ⅱ）根据（Ⅰ）所求的回归方程，预测票价为多少时，剧场的门票收入最多.

参考数据：$\bar{x}=240$，$\bar{y}=0.5$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=365\ 000$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=457.5$；设 $z_i=\ln x_i$，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}z_i\approx 27$，$\sum\limits_{i=1}^{5}z_i^2\approx 147.4$，$\sum\limits_{i=1}^{5}z_iy_i\approx 12.7$；$e^{5.2}\approx 180$，$e^{5.4}\approx 220$，$e^{6.4}\approx 600$.

参考公式：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，三点 $M_1(-2,\sqrt{2})$，$M_2(2,-\sqrt{2})$，$M_3\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有两个点在椭圆上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若 C 的上顶点为 E，右焦点为 F，过点 F 的直线交 C 于 A，B 两点（与椭圆顶点不重合），直线 EA，EB 分别交直线 $x-y-4=0$ 于 P，Q 两点，求 $\triangle EPQ$ 面积的最小值.

22.（12 分）

设函数 $f(x)=(x+1)e^x+m(x+2)^2$，$m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若当 $x\in[-2,+\infty)$ 时，不等式 $f(x-1)\geqslant m(x^2+3x)-e$ 恒成立，求 m 的取值范围.

2022—2023 学年(下)高三顶尖计划联考

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　由 $(x+2)(x-7)\leqslant 0$,得 $-2\leqslant x\leqslant 7$,由 $\log_3 x>1$,得 $x>3$,所以 $A\cap B=\{4,5,6,7\}$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查复数的基本运算.

解析　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\bar{z}=a-bi$. 因为 $z-2\bar{z}=1+6i$,所以 $-a+3bi=1+6i$,所以 $a=-1$,$b=2$,所以 z 的虚部为 2.

3. 答案　B

命题意图　本题考查圆与圆的位置关系.

解析　将 $x^2+(y-2)^2=5$ 和 $(x+2)^2+y^2=5$ 相减得直线 $AB:y=-x$,点 $(0,2)$ 到直线 $x+y=0$ 的距离 $d=\sqrt{2}$,所以 $|AB|=2\sqrt{5-2}=2\sqrt{3}$.

4. 答案　A

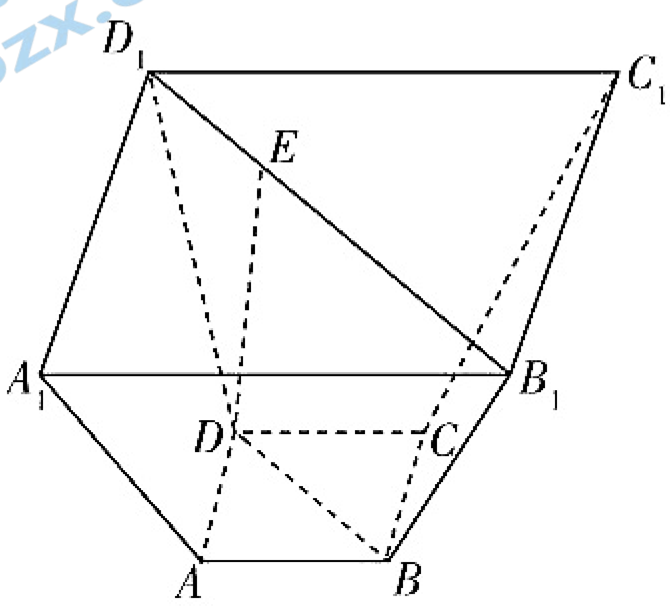
命题意图　本题考查三角恒等变换的应用.

解析　因为 $\tan\alpha=-7$,所以 $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查四棱台的体积计算.

解析　画出满足题意的正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,如图所示,则 $B_1D_1=40\sqrt{2}$,$BD=10\sqrt{2}$. 过点 D 作 $DE\perp B_1D_1$ 于点 E,则 $D_1E=15\sqrt{2}$,$DE=\sqrt{30^2-(15\sqrt{2})^2}=15\sqrt{2}$,所以该正四棱台的体积为 $V=\dfrac{1}{3}(40^2+10^2+10\times 40)\times 15\sqrt{2}=10\ 500\sqrt{2}(\mathrm{cm}^3)$.



6. 答案　B

命题意图　本题考查等比数列的基本性质.

解析　设$\{a_n\}$的公比为q,则$a_3+a_4+a_5+a_6=q^2(a_1+a_2+a_3+a_4)$,得$q^2=2$,所以$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times 2^5=64$.

7. **答案**　D

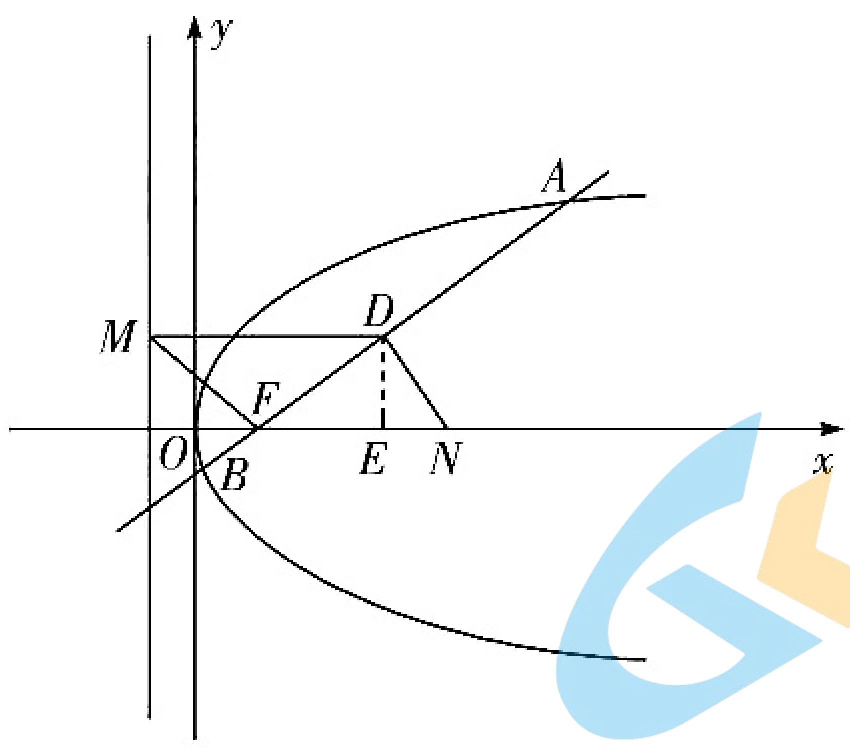
命题意图　本题考查导数的几何意义.

解析　设直线$y=x+a$与函数$f(x)$和$g(x)$的图象分别相切于点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则由$f(x)=e^x$,得$f'(x)=e^x$,令$e^{x_1}=1$,得$x_1=0$,$y_1=1$,将$(0,1)$代入$y=x+a$中得$a=1$,由$g(x)=\ln x+b$,得$g'(x)=\frac{1}{x}$,令$\frac{1}{x_2}=1$,得$x_2=1$,$y_2=b$,将$(1,b)$代入$y=x+1$中得$b=2$,所以$a+b=3$.

8. **答案**　A

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　由题意知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,直线$AB$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$. 设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$D(x_0,y_0)$,由$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$得$y^2-2\sqrt{3}py-p^2=0$,所以$y_1+y_2=2\sqrt{3}p$,所以$y_0=\sqrt{3}p$,由$y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$,得$x_0=\frac{7p}{2}$. 如图所示,作$DE\perp x$轴于点$E$,则$|DE|=\sqrt{3}p$. 因为$DN\perp DF$,$\angle DFN=30°$,故$|EF|=3p$,$|EN|=p$,所以$|DM|=x_0+\frac{p}{2}=4p$,$|FN|=4p$,又$FN/\!/DM$,得四边形$DMFN$为平行四边形. 所以其面积为$4p\times\sqrt{3}p=32\sqrt{3}$,解得$p=2\sqrt{2}$.



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. **答案**　BC

命题意图　本题考查二项式定理的应用.

解析　$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$的展开式中共有10项,由二项式系数的性质可得展开式中的第5项和第6项的二项式系数相等,故A错误;由已知可得二项式系数之和为2^9,且展开式中奇数项的二项式系数和与偶数项的二项式系数和相等,所以奇数项的二项式系数和为$2^8=256$,故B正确;展开式的通项为$T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_9^r x^{9-\frac{3}{2}r}(0\leqslant r\leqslant 9,r\in\mathbf{N})$,令$9-\frac{3}{2}r=0$,解得$r=6$,故常数项为$C_9^6=C_9^3=84$,故C正确;有理项中$x$的指数为整数,故$r=0$,2,4,6,8,故有理项有5项,故D错误.

10. **答案** ABC

命题意图 本题考查基本不等式的应用.

解析 对于 A,因为 $2\sqrt{4ab}\leqslant a+4b=2$,所以 $ab\leqslant\frac{1}{4}$,故 A 正确;

对于 B,$2^a+16^b\geqslant2\sqrt{2^a\cdot16^b}=2\sqrt{2^{a+4b}}=4$,故 B 正确;

对于 C,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{4b}{a}}\right)=\frac{9}{2}$,故 C 正确;

对于 D,$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2=a+4b+4\sqrt{ab}\leqslant4$,所以 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant2$,故 D 错误.

11. **答案** BD

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调,所以 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{3\pi}{2}$,即 $\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{3\pi}{2}$,所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$,因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称,所以 $-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\omega=\frac{1}{2}-3k,k\in\mathbf{Z}$,所以当 $k=0$ 时,$\omega=\frac{1}{2}$,所以 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,故 A 错误;当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,$\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}=\pi$,故 B 正确;将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得 $g(x)=\cos\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=-\sin\frac{1}{2}x$ 的图象,$g(x)$ 为奇函数,不是偶函数,故 C 错误;令 $t=\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}$,当 $x\in[0,\pi]$ 时,$t\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$,直线 $y=-\frac{9}{10}$ 与 $y=\cos t$ 的图象在 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上有两个交点,故 D 正确.

12. **答案** ACD

命题意图 本题考查立体几何的综合问题.

解析 对于 A,因为平面 AA_1D_1D // 平面 BB_1C_1C,根据面面平行的性质,平面 α 与这两个平面的交线互相平行,即 D_1F // BE,所以 D_1F // 平面 ABE,所以三棱锥 $P-ABE$ 的体积为定值,故 A 正确.

对于 B,若存在点 P,使得 $DP\perp\alpha$,则 $DP\perp BF$,因为 $DD_1\perp BF$,$DD_1\cap DP=D$,所以 $BF\perp$ 平面 AA_1D_1D,与题意矛盾,故 B 错误.

对于 C,如图 1 所示,取 BC 的中点 Q,连接 C_1Q,则点 P 在平面 BCC_1B_1 内的射影 P' 在 C_1Q 上,直线 PE 与平面 BCC_1B_1 所成角即 $\angle PEP'$,$\tan\angle PEP'=\frac{PP'}{EP'}$,由已知可得 $PP'=2$,EP' 最小为 $\sqrt{2}$,所以 $\tan\angle PEP'$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,故 C 正确.

对于 D,如图 2,取 A_1D_1 的中点 G,连接 AG,分别取 BE,AG 的中点 O_1,O_2,连接 O_1O_2,因为 $\triangle BB_1E$ 是等腰直角三角形,所以三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上. 设三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的半径为 R,则 $OB=OP=R$,所以 $OO_1^2+O_1B^2=OO_2^2+O_2P^2$. 设 $OO_1=d$,则 $d^2+2=(2-d)^2+O_2P^2$,所以 $d=\frac{1}{2}+\frac{O_2P^2}{4}$. 当点 P 与 F 重合时,O_2P 取最小值 $\sqrt{2}$,此时 $d=1$,$R^2=3$,三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=12\pi$,当点 P 与 D_1 重合时,O_2P 取最大值 $\sqrt{10}$,此时 $d=3$,$R^2=11$,三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=44\pi$,故 D 正确.

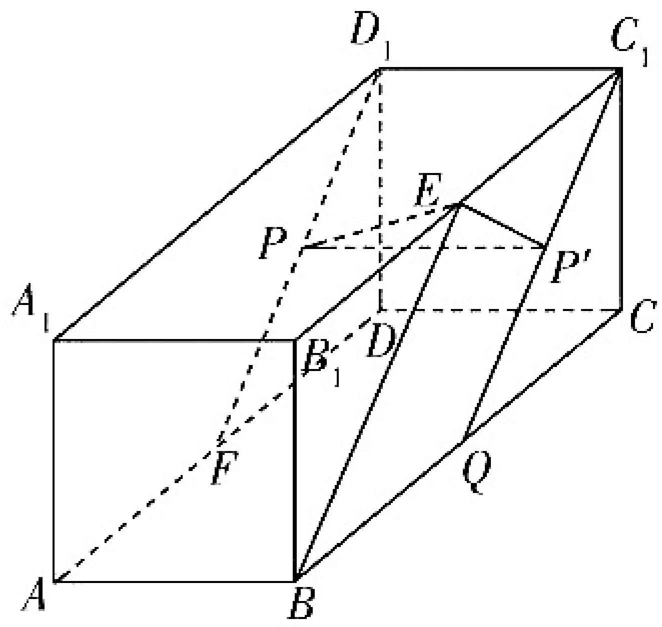


图 1

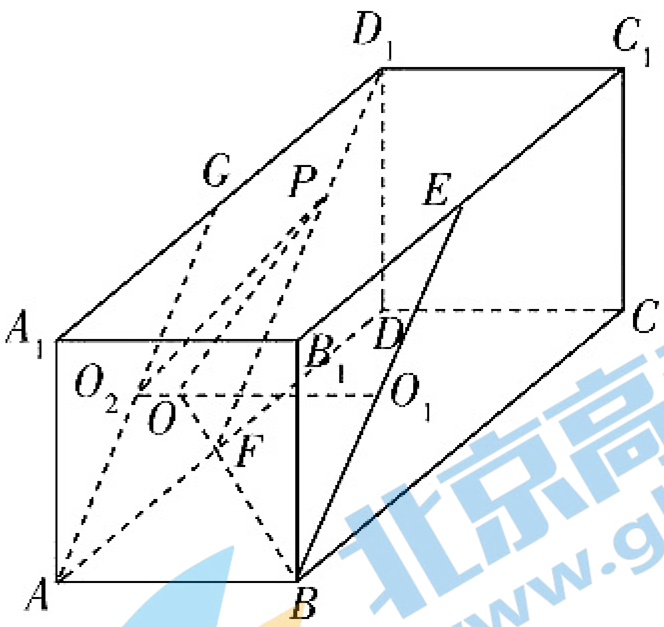


图 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\pm 4\sqrt{3}$

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 由题意知 $F(4,0)$，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$ 或 $y=-\sqrt{3}x$，因为直线 AF 与 C 只有一个交点，所以直线 AF 与 C 的渐近线平行，即 $-\frac{m}{4}=\sqrt{3}$ 或 $-\frac{m}{4}=-\sqrt{3}$，得 $m=\pm 4\sqrt{3}$.

14. **答案** 6

命题意图 本题考查平面向量的运算.

解析 设 $|\boldsymbol{a}|=t$，由已知可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=t$，$\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)=t-6=0$，即 $t=6$，所以 $|\boldsymbol{a}|=6$.

15. **答案** $\frac{9}{10}$

命题意图 本题考查概率的乘法公式的应用.

解析 设 A_i 表示第 i 次通过进货检验，B_i 表示第 i 次通过生产过程检验$(i=1,2)$，C 表示该产品能进入出货检验环节，由题意得 $P(C)=P(A_1B_1+\overline{A}_1A_2B_1+A_1\overline{B}_1B_2+\overline{A}_1A_2\overline{B}_1B_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{10}$.

16. **答案** 248

命题意图 本题考查抽象函数问题.

解析 因为 $g(x-1)$ 是偶函数，所以 $g(-x-1)=g(x-1)$，用 $x-1$ 替换 x，得 $g(-x)=g(x-2)$. 条件 $f(x-1)-g(-x)=1$ 转化为 $f(x-1)-g(x-2)=1$，所以 $\begin{cases}f(x+1)+g(x-2)=3①,\\ f(x-1)-g(x-2)=1②,\end{cases}$ ①+②得 $f(x+1)+f(x-1)=4$. 在②中用 $x+2$ 替换 x，得 $f(x+1)-g(x)=1$③，则①-③得 $g(x-2)+g(x)=2$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{83}f(k)=41\times 4+f(2)=164+f(2)$，$\sum\limits_{k=1}^{83}g(k)=41\times 2+g(2)=82+g(2)$. 在①中令 $x=1$，可得 $f(2)+g(-1)=3$，所以 $f(2)=1$. 在 $g(-x-1)=g(x-1)$ 中令 $x=1$，得 $g(-2)=g(0)$，又 $g(-2)+g(0)=2$，所以 $g(0)=1$，再由 $g(0)+g(2)=2$ 知 $g(2)=1$. 所以 $\sum\limits_{k=1}^{83}[f(k)+g(k)]=164+82+f(2)+g(2)=248$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列的概念和数列求和方法的应用.

解析 (1)因为 $S_n=na_n-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$①，

所以 $S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{3}{2}(n+1)$②, ……………………………………………………（1 分）

② − ①得 $a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n-3n$,

整理得 $a_{n+1}-a_n=3$, ……………………………………………………………………………（3 分）

由等差数列的定义可知 $\{a_n\}$ 是等差数列. ……………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\{a_n\}$ 的公差 $d=3$,

又因为 $a_1=2$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$. …………………………………………………（6 分）

若选①:

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}=\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})}=\frac{1}{3}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}),$$ …（8 分）

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{3}[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{5})+(\sqrt{11}-\sqrt{8})+\cdots+(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})]$

$=\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………………………………………（10 分）

若选②:

$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$, …………………………………………………（8 分）

所以 $T_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}$. ……………………………………………………………（10 分）

若选③:

$b_n=2^na_n=(3n-1)\cdot 2^n$,

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2\times 2^1+5\times 2^2+8\times 2^3+\cdots+(3n-1)\times 2^n$,

则 $2T_n=2\times 2^2+5\times 2^3+8\times 2^4+\cdots+(3n-1)\times 2^{n+1}$, ………………………………………（7 分）

两式作差得 $-T_n=2\times 2^1+3\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+3\times 2^n-(3n-1)\times 2^{n+1}$

$=4+\frac{12(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-1)\times 2^{n+1}=-8+(4-3n)\times 2^{n+1}$. ……………………………（9 分）

所以 $T_n=8+(3n-4)\times 2^{n+1}$. ………………………………………………………………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 （Ⅰ）由条件和正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B=\sin C(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$, ……………………………（1 分）

所以 $\sqrt{3}\sin(A+C)=\sin C(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$,

展开后整理得 $\sqrt{3}\sin A\cos C=\sin C\sin A$. …………………………………………………………（3 分）

因为 $\sin A\neq 0$,所以 $\sqrt{3}\cos C=\sin C$,所以 $\tan C=\sqrt{3}$, ……………………………………（4 分）

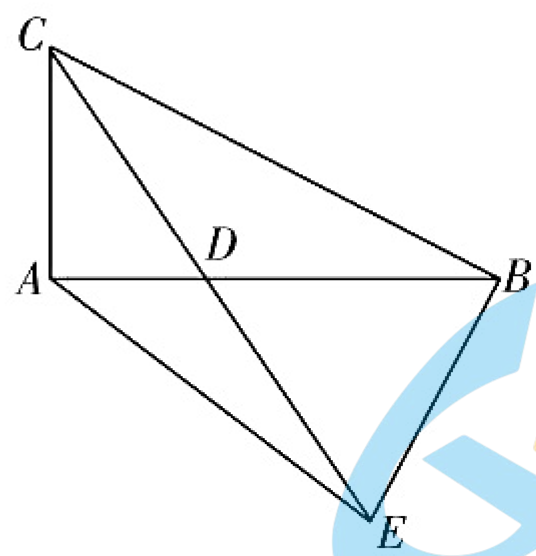
又 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）如图所示,因为 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$, $AC=3$,所以 $AB=3\sqrt{3}$,

又因为 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线,所以 $AD=\sqrt{3}$, $CD=DB=2\sqrt{3}$. ……………………………（6 分）

因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$，所以在$\triangle BDE$中，$DB=DE=2\sqrt{3}$，

又$\angle BDE=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\triangle BDE$为等边三角形，所以$BE=2\sqrt{3}$. ………………………………………………（8 分）



在$\triangle ADE$中，由余弦定理可得$AE^2=AD^2+DE^2-2AD\times DE\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=21$，即$AE=\sqrt{21}$，……………（10 分）

在$\triangle ABE$中，由正弦定理可得$\dfrac{AB}{\sin\angle AEB}=\dfrac{AE}{\sin\angle ABE}$，

即$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\angle AEB}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，得$\sin\angle AEB=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. ………………………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查空间垂直关系的证明，以及利用空间向量计算二面角.

解析 （Ⅰ）如图，连接A_1B，与AB_1相交于点F，连接CF，A_1C.

因为四边形AA_1B_1B为菱形，所以F为AB_1的中点，且$BF\perp AB_1$. ……………………………（1 分）

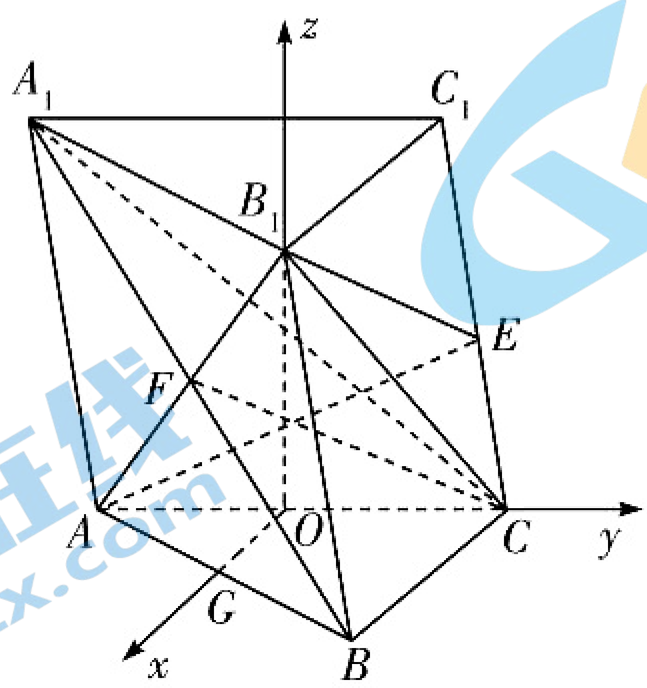
因为$\triangle AB_1C$为等边三角形，所以$CF\perp AB_1$. ………………………………………………（2 分）

因为$BF\cap CF=F$，所以$AB_1\perp$平面A_1BC. ………………………………………………（3 分）

因为$BC\subset$平面A_1BC，所以$AB_1\perp BC$. ………………………………………………（4 分）

因为$B_1C_1/\!/BC$，所以$AB_1\perp B_1C_1$. ………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设AC，AB的中点分别为O，G，连接B_1O，OG.



由（Ⅰ）可知$AB_1\perp BC$，又$AC\perp BC$，$AB_1\cap AC=A$，

所以$BC\perp$平面AB_1C.

因为$OG/\!/BC$，所以$OG\perp$平面AB_1C，

因为$\triangle AB_1C$为等边三角形，所以$B_1O\perp AC$. ………………………………………………（6 分）

以O为坐标原点，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB_1}$的方向分别为x轴、y轴、z轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

（7 分）

则 $A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$B(3,2,0)$，$B_1(0,0,2\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(3,4,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,0,0)$，

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$，得 $A_1(-3,-4,2\sqrt{3})$，$C_1(-3,0,2\sqrt{3})$，$E\left(-\frac{3}{2},1,\sqrt{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},3,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AA_1}=(-3,-2,2\sqrt{3})$.

设平面 AA_1B_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3x_1+4y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-3x_1-2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=3$，得 $\boldsymbol{n}=(-4,3,-\sqrt{3})$. ………………………………（9 分）

设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}x_2+3y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y_2+2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(-4,-3,\sqrt{3})$. ………………………………（10 分）

设平面 AA_1B_1B 与平面 AB_1E 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{|16-9-3|}{\sqrt{16+9+3}\times\sqrt{16+9+3}}=\frac{1}{7}$，

即平面 AA_1B_1B 与平面 AB_1E 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$. ………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查线性回归模型的应用.

解析 （Ⅰ）$y=c\ln x+d$ 能更好地对 y 与 x 的关系进行拟合. ………………………………（1 分）

设 $z=\ln x$，先求 y 关于 z 的线性回归方程.

由已知得 $\bar{z}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}z_i=5.4$，

所以 $c=\frac{\sum_{i=1}^{5}z_iy_i-5\bar{z}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}z_i^2-5\bar{z}^2}\approx\frac{12.7-5\times5.4\times0.5}{147.4-5\times5.4^2}=-0.5$，………………………………（3 分）

$d=\bar{y}-c\bar{z}=0.5-(-0.5)\times5.4=3.2$，………………………………（4 分）

所以 y 关于 z 的线性回归方程为 $y=-0.5z+3.2$，………………………………（5 分）

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=-0.5\ln x+3.2$. ………………………………（6 分）

（Ⅱ）设该剧场的总座位数为 M，由题意得门票收入为 $Mxy=M(-0.5x\ln x+3.2x)$. ………………（7 分）

设函数 $f(x)=-0.5x\ln x+3.2x$，则 $f'(x)=-0.5\ln x+2.7$，………………………………（8 分）

当 $f'(x)<0$，即 $x>e^{5.4}$ 时，函数单调递减，当 $f'(x)>0$，即 $0<x<e^{5.4}$ 时，函数单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=e^{5.4}\approx220$ 处取最大值，………………………………（11 分）

所以预测票价为 220 元时，剧场的门票收入最多. ………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的性质，椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由椭圆的对称性可知点 M_1 和 M_2 在 C 上，

代入方程得 $\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$. ………………………………（2 分）

设 C 的半焦距为 $c(c>0)$，则离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}c, b=c$，…………………………（3 分）

所以 $a=\sqrt{2}b$，解得 $a=2\sqrt{2}, b=2$. ……………………………………（4 分）

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，直线 $AB: x-my-2=0(m\neq\pm1)$. ……………………（6 分）

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\\ x-my-2=0,\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+2)y^2+4my-4=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2+2}, y_1y_2=\frac{-4}{m^2+2}$.（*）……………………………………（7 分）

设点 $P(x_P,y_P), Q(x_Q,y_Q)$.

由题可知 $E(0,2)$，所以直线 EA 的方程为 $y-2=\frac{y_1-2}{x_1}x$，

由 $y-2=\frac{y_1-2}{x_1}x$ 与 $x-y-4=0$ 联立得 $x_P=\frac{6x_1}{x_1-y_1+2}=\frac{6(my_1+2)}{(m-1)y_1+4}$，……………（8 分）

同理可得 $x_Q=\frac{6(my_2+2)}{(m-1)y_2+4}$.

所以 $|PQ|=\sqrt{2}|x_P-x_Q|=\sqrt{2}\left|\frac{6(my_1+2)}{(m-1)y_1+4}-\frac{6(my_2+2)}{(m-1)y_2+4}\right|$

$$=12\sqrt{2}\left|\frac{(m+1)(y_1-y_2)}{(m-1)^2y_1y_2+4(m-1)(y_1+y_2)+16}\right|$$

$$=12\sqrt{2}\left|\frac{(m+1)\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}{(m-1)^2y_1y_2+4(m-1)(y_1+y_2)+16}\right|.$$

将（*）代入上式整理得 $|PQ|=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{|m-7|}$. ……………………………………（9 分）

因为点 $E(0,2)$ 到直线 $x-y-4=0$ 的距离 $d=\frac{|0-2-4|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle EPQ}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{24\sqrt{m^2+1}}{|m-7|}=\frac{36\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{|m-7|}$. ……………………（10 分）

设 $m-7=t$，则 $m=t+7$，

所以 $S_{\triangle EPQ}=\frac{36\sqrt{2}\sqrt{(t+7)^2+1}}{|t|}=36\sqrt{2}\sqrt{\frac{(t+7)^2+1}{t^2}}=36\sqrt{2}\times\sqrt{50\left(\frac{1}{t}+\frac{7}{50}\right)^2+\frac{1}{50}}$，

当 $\frac{1}{t}=-\frac{7}{50}$，即 $m=-\frac{1}{7}$ 时，$(S_{\triangle EPQ})_{\min}=\frac{36}{5}$. ……………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）依题意得 $f'(x)=(x+2)e^x+2m(x+2)=(x+2)(e^x+2m)$. ………………（1 分）

①当 $m\geqslant0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<-2$，令 $f'(x)>0$，得 $x>-2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增；……………………（2 分）

②当 $-\frac{1}{2e^2}<m<0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $\ln(-2m)<x<-2$，令 $f'(x)>0$，得 $x<\ln(-2m)$ 或 $x>-2$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln(-2m),-2)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln(-2m))$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增； ………… （3 分）

③当 $m=-\dfrac{1}{2e^2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增； ……………………………… （4 分）

④当 $m<-\dfrac{1}{2e^2}$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $-2<x<\ln(-2m)$，令 $f'(x)>0$，得 $x<-2$ 或 $x>\ln(-2m)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-2,\ln(-2m))$ 上单调递减，在 $(-\infty,-2)$ 和 $(\ln(-2m),+\infty)$ 上单调递增. ………… （5 分）

（Ⅱ）当 $x\in[-2,+\infty)$ 时，$f(x-1)\geqslant m(x^2+3x)-e$ 恒成立，则 $xe^{x-1}-m(x-1)+e\geqslant 0$ 恒成立.

（ⅰ）当 $x=1$ 时，不等式即 $1+e\geqslant 0$，满足条件. ……………………………………………………………… （6 分）

（ⅱ）当 $x>1$ 时，原不等式可化为 $m\leqslant\dfrac{xe^{x-1}+e}{x-1}$，该式对任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{xe^{x-1}+e}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x^2-x-1)e^{x-1}-e}{(x-1)^2}$.

设 $k(x)=(x^2-x-1)e^{x-1}-e$，则 $k'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}=(x+2)(x-1)e^{x-1}$.

因为 $x>1$，所以 $k'(x)>0$，所以 $k(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g'(2)=k(2)=0$，所以 $x=2$ 是 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一零点， ……………………………… （8 分）

所以当 $1<x<2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)_{\min}=g(2)=3e$，所以 $m\leqslant 3e$. ……………………………………………… （9 分）

（ⅲ）当 $-2\leqslant x<1$ 时，原不等式可化为 $m\geqslant\dfrac{xe^{x-1}+e}{x-1}$，

此时对于（ⅱ）中的函数 $k(x)$，可知当 $-2\leqslant x<1$ 时，$k'(x)\leqslant 0$，

所以 $k(x)$ 在 $[-2,1)$ 上单调递减，且 $k(-2)=5e^{-3}-e<0$，

所以当 $-2\leqslant x<1$ 时，$k(x)\leqslant k(-2)<0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $[-2,1)$ 上单调递减，

所以当 $x\in[-2,1)$ 时，$g(x)_{\max}=g(-2)=\dfrac{2e^{-3}-e}{3}$，所以 $m\geqslant\dfrac{2e^{-3}-e}{3}$. ……………………………… （11 分）

综上所述，m 的取值范围是 $\left[\dfrac{2e^{-3}-e}{3},3e\right]$. ……………………………………………………… （12 分）